Algoritmos y Estructuras de Datos II

Heaps

8 de mayo de 2013

Clase de hoy

Ejercicio 5

Implementación multiplicando y dividiendo por 10 en vez de 2:

- es más ineficiente
  - desaprovecha la representación (porque no toma valores como 56)
  - las implementaciones de suc y sum resultan más ineficientes (no son constantes)
  - es más difícil
- de todas formas, a los que lo hicieron de esta forma, bien, se le ha considerado bien porque han logrado resolver algo más difícil que lo que se pedía
- pero recuerden que al implementar, eficiencia es importante

Ejercicio 5

Algunos errores conceptuales

- funciones con parámetros **in** o **out**: no se pone esto en los parámetros de funciones porque se supone que son todos **in**
- utilización de punteros: absolutamente innecesario en este ejercicio
- condicionales evitables

  x:= false
  if a mod 2 = 0 **then** x:= true **fi**

  debe escribirse

  x:= (a mod 2 = 0)

Ejercicio 5

¿Pattern matching? He visto

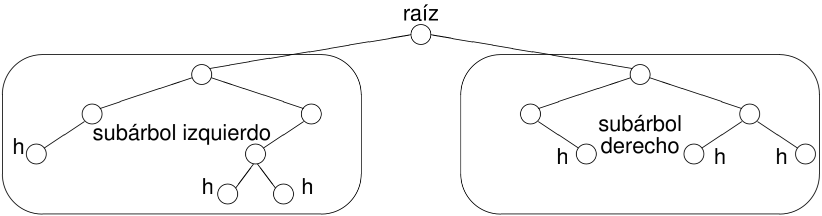
var x’: **nat**
if x = 2*x’ **then** r:= x’ **fi**

como queriendo hacer pattern matching en x, pero esto no funciona así en programación imperativa: la variable x’ debe tener su valor antes de la evaluación de la condición x = 2*x’

Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
  1. análisis de algoritmos
     - algoritmos de ordenación
     - notación $\mathcal{O}$, Ω y Θ.
     - recurrencias
  2. tipos de datos
     - tipos concretos
     - tipos abstractos
     - implementaciones
     - árboles binarios: de búsqueda (ABBs) y heaps
  3. técnicas de resolución de problemas

Intuición



Todos los árboles pueden construirse con los constructores

- $<>$, que construye un árbol vacío
- $< \_, \_, \_ >$, que construye un árbol no vacío a partir de un elemento y dos subárboles

Especificación

TAD árbol_binario[elem]

constructores

- $<>$: árbol_binario
- $<\_,\_,\_>$: árbol_binario $\times$ elem $\times$ árbol_binario $\rightarrow$ árbol_binario

operaciones

- raíz : árbol_binario $\rightarrow$ elem {se aplica sólo a un árbol no vacío}
- izquierdo : árbol_binario $\rightarrow$ árbol_binario {sólo a un árbol no vacío}
- derecho : árbol_binario $\rightarrow$ árbol_binario {sólo a un árbol no vacío}
- es_vacío : árbol_binario $\rightarrow$ booleano

ecuaciones

- raíz($<$i,r,d$>$) = r
- izquierdo($<$i,r,d$>$) = i
- derecho($<$i,r,d$>$) = d
- es_vacío($<>$) = verdadero
- es_vacío($<$i,r,d$>$) = falso

Sobre los niveles

- En el nivel 0 hay a lo sumo 1 nodo.
- En el nivel 1 hay a lo sumo 2 nodos.
- En el nivel 2 hay a lo sumo 4 nodos.
- En el nivel 3 hay a lo sumo 8 nodos.
- En el nivel i hay a lo sumo 2^i nodos.
- En un árbol de altura n hay a lo sumo $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ nodos.
- En un árbol "balanceado" la altura es del orden del $\log_2 k$ donde k es el número de nodos.

Posiciones

- Definimos $pos = [\{0, 1\}]$.
- Dado un árbol t y una posición $p \in pos$, $t \downarrow p$ es el subárbol de t que se encuentra en la posición p.
- Se define $pos(t) = \{p \in pos \mid t \downarrow p \neq <>\}$. Es el conjunto de las posiciones del árbol binario t.
- Dado un árbol t y una posición $p \in pos(t)$, $t.p$ es el elemento de t que se encuentra en la posición p.

Definición formal

- Para todo $p \in pos(t)$ y para todo $q \in pos$
  - si $p \lhd 0 +\!\!+ q \in pos(t)$ entonces $t.(p \lhd 0 +\!\!+ q) < t.p$
  - si $p \lhd 1 +\!\!+ q \in pos(t)$ entonces $t.(p \lhd 1 +\!\!+ q) > t.p$
- O como lo escribimos en los apuntes: $ABB(t)$ sii $\forall p \in \text{pos}(t).\forall q \in \text{pos}$

$$\begin{cases} (p \lhd 0) +\!\!+ q \in \text{pos}(t) \Rightarrow t.((p \lhd 0) +\!\!+ q) < t.p \\ (p \lhd 1) +\!\!+ q \in \text{pos}(t) \Rightarrow t.p < t.((p \lhd 1) +\!\!+ q) \end{cases}$$

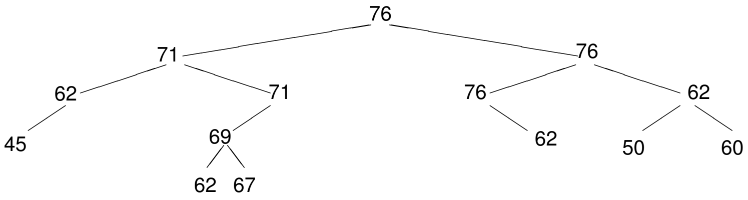
TAD diccionario

- Usando árboles binarios de búsqueda, hemos implementado el TAD diccionario con operaciones:
  - search (implementación de la operación está) de orden log n,
  - insert (implementación de la operación agregar) de orden log n,
  - delete (implementación de la operación borrar) de orden log n,
  - las otras dos operaciones (empty, is_empty) son constantes.

Heaps

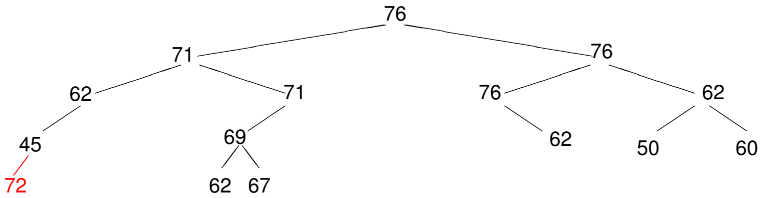
- Los heaps se asemejan a los ABBs en
  - son árboles binarios
  - con una manera particular de organizar la información de sus nodos
- y se diferencia de los ABBs en
  - que admite repeticiones
  - la forma de organizar la información
    - en cada nodo del heap, la información es mayor o igual a la de sus descendientes
  - el heap se implementa muy convenientemente en arreglos

Ejemplo

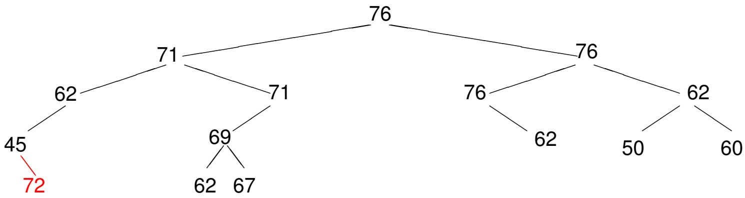


¿Es un heap?
Supongamos que queremos agregar el 72. ¿Dónde lo agregamos?

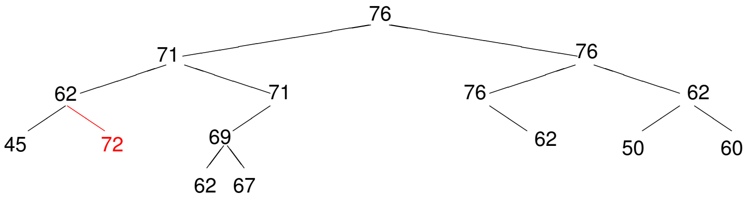
Ejemplo



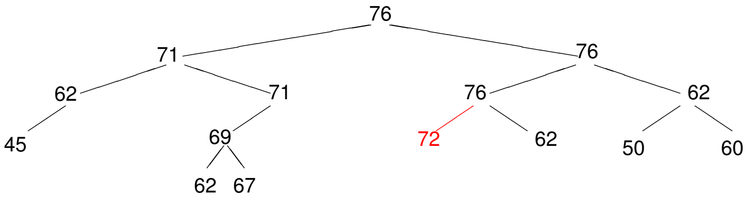
Ejemplo



Ejemplo

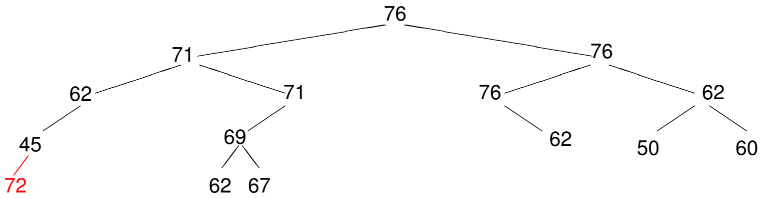


Ejemplo



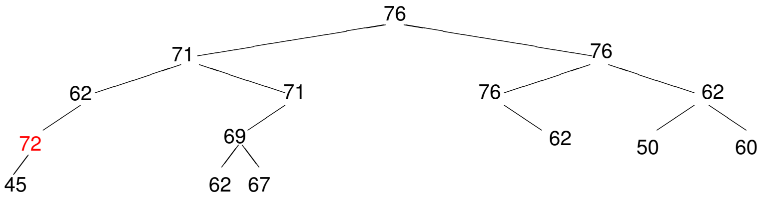
Éste es el único caso en que sigue siendo un heap.
Pero en general, puede que no exista esta posibilidad, por ejemplo, si el número a insertar es el 80.

Ejemplo



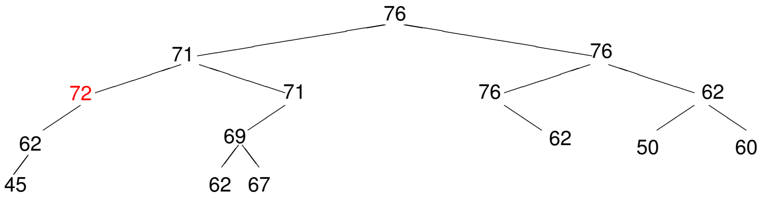
Probemos entonces insertar el 72 en “cualquier lado”.
No es un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 45.
Los intercambiamos.

Ejemplo



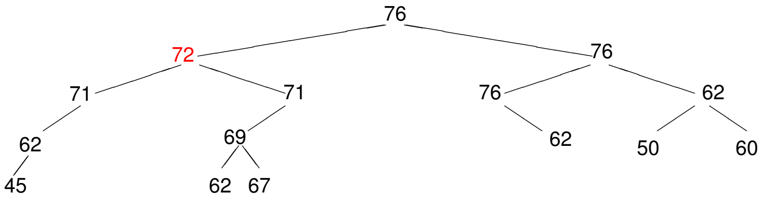
Sigue sin ser un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 62.
Lo intercambiamos.

Ejemplo



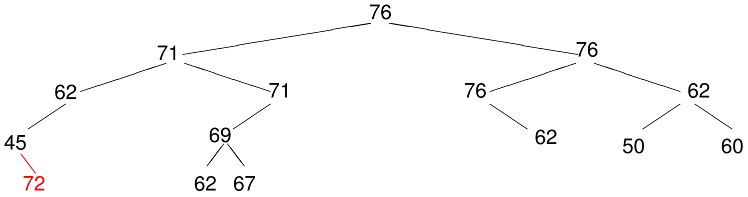
Sigue sin ser un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 71.
Lo intercambiamos.

Ejemplo



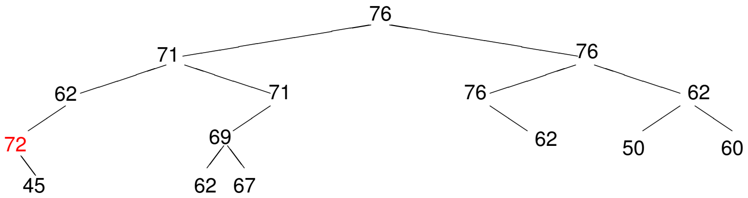
Ahora sí es un heap.

Ejemplo



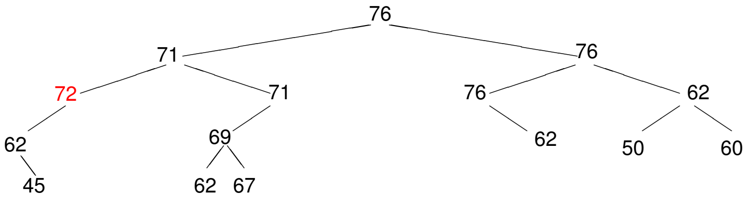
¿Qué pasaba si lo insertábamos acá?
No es un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 45.
Los intercambiamos.

Ejemplo



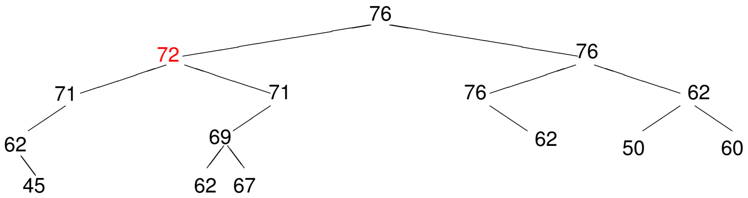
Sigue sin ser un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 62.
Lo intercambiamos.

Ejemplo



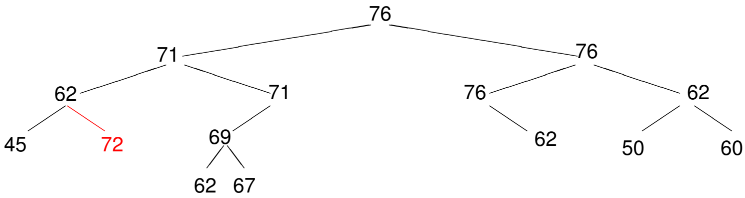
Sigue sin ser un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 71.
Lo intercambiamos.

Ejemplo



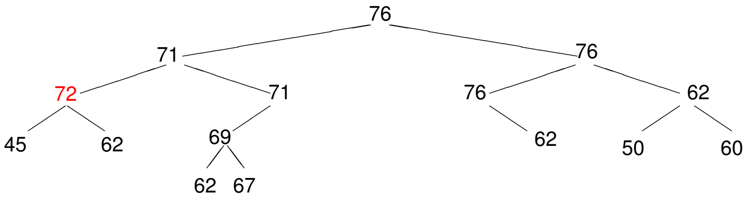
Ahora sí es un heap.

Ejemplo



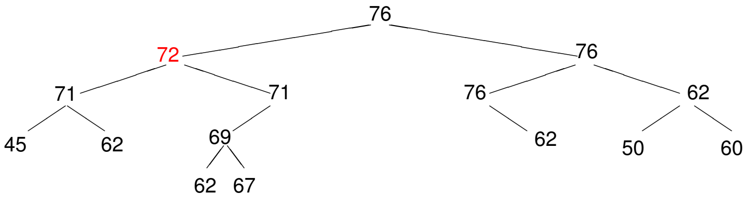
¿Qué pasaba si lo insertábamos acá?
No es un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 62.
Los intercambiamos.

Ejemplo



Sigue sin ser un heap porque el 72 es mayor que su padre, el 71.
Lo intercambiamos.

Ejemplo



Ahora sí es un heap.

Conclusión

- En todos los casos se logra restablecer la condición de heap en $\log n$ intercambios.
- Se puede elegir libremente donde comenzar.
- Eso determina la forma del heap resultante.
- Luego hay que hacer **flotar** el nuevo elemento realizando los intercambios que sean necesarios, la forma del heap ya no cambia.
- Idea: elegir de modo de que se mantenga balanceado, llenando nivel por nivel.

Ejemplo

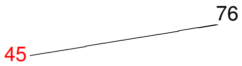
- A continuación mostraremos con un ejemplo cómo se puede ir llenando nivel por nivel.
- Sea la siguiente secuencia de números que se insertan en un heap inicialmente vacío.
- 76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo

76

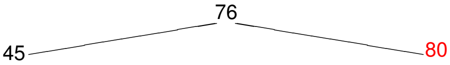
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



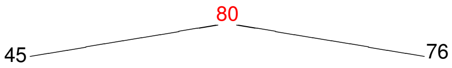
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



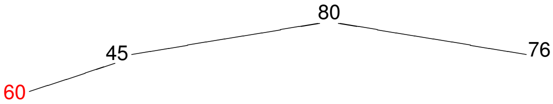
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



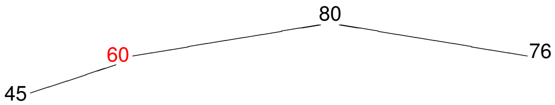
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



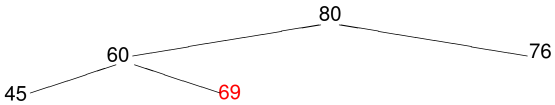
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



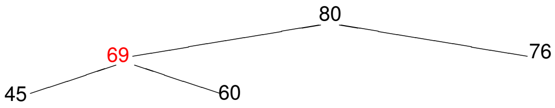
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



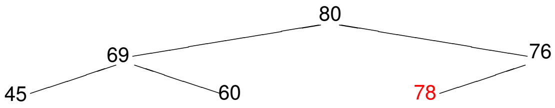
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



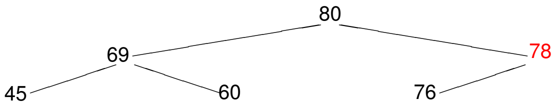
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



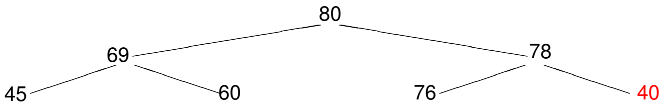
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



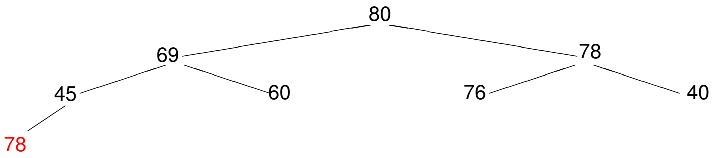
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



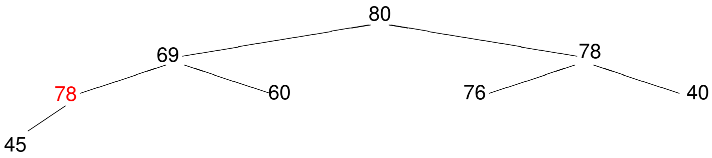
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



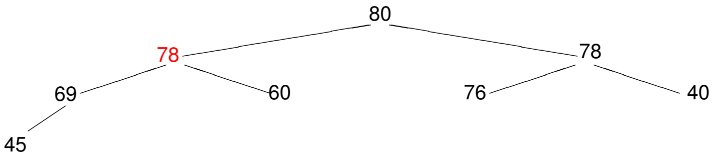
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



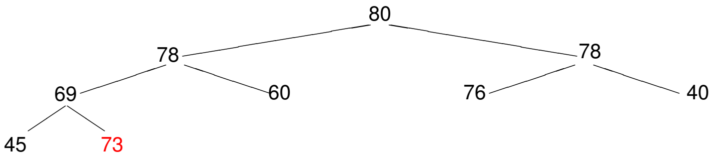
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



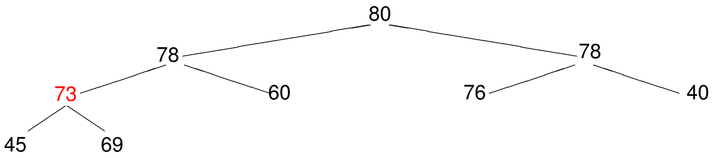
76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

Ejemplo



76, 45, 80, 60, 69, 78, 40, 78, 73

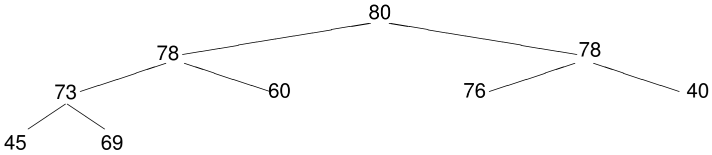
Conclusión

- Tenemos una forma de ir insertando elementos de modo que el árbol quede perfectamente balanceado.
- El algoritmo de inserción de cada elemento es $\log n$.

Implementando cola de prioridades

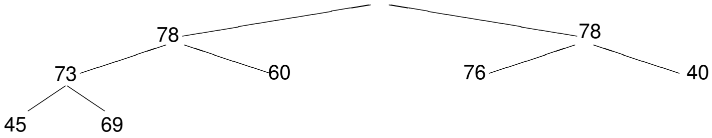
- Esto mejora las implementaciones anteriores de colas de prioridades.
    - inserción era constante
    - ver el primero y eliminar el primero eran lineales
    - o viceversa
- ahora inserción es $\log n$
- ver el primero es constante
- ¿y borrar el primero?
    - veremos que se puede hacer $\log n$

Ejemplo



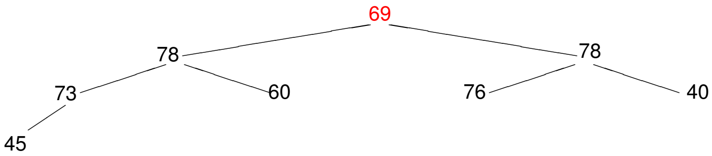
borremos el primero, o sea el 80

Ejemplo



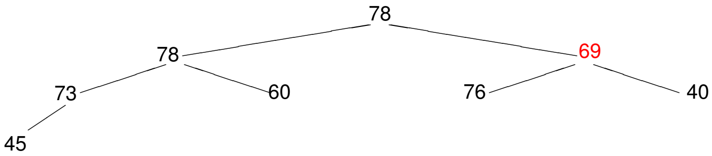
¿cómo hacemos para que nos quede un heap?
llevamos una hoja arriba

Ejemplo



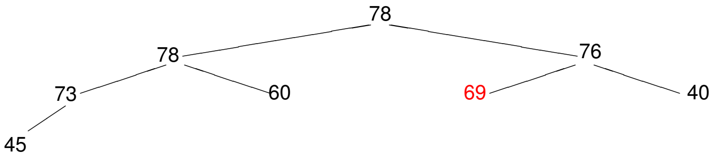
¿cómo hacemos para que nos quede un heap?
la **hundimos** intercambiandola con el mayor de sus hijos

Ejemplo



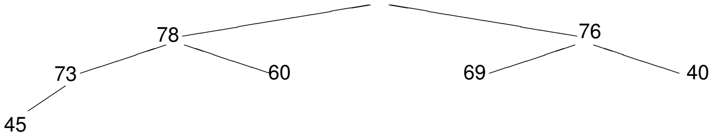
la **hundimos** intercambiandola con el mayor de sus hijos

Ejemplo



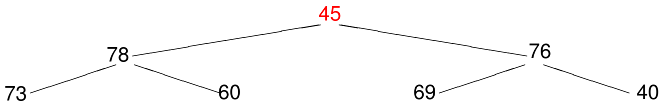
¡listo!
hundir es log n
el primero ahora es 78, borrémoslo

Ejemplo



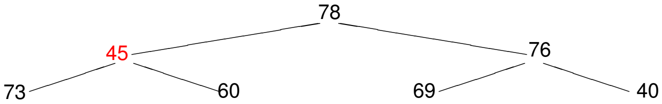
¿cómo hacemos para que nos quede un heap?
llevamos una hoja arriba

Ejemplo



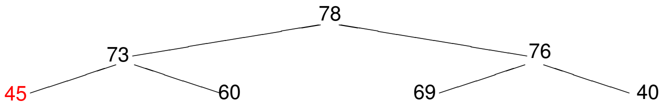
¿cómo hacemos para que nos quede un heap?
la **hundimos** intercambiandola con el mayor de sus hijos

Ejemplo



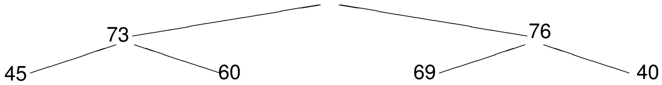
la **hundimos** intercambiandola con el mayor de sus hijos

Ejemplo

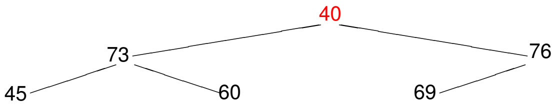


¡listo!

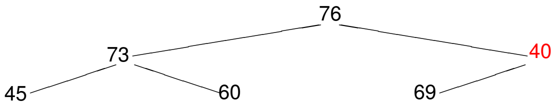
Ejemplo



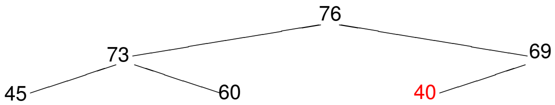
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



etcétera

Definición de heap

$$\mathrm{heap}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \forall p \in \mathrm{pos}(t). \forall q \in \mathrm{pos}.\ p{+\!\!\!+}q \in \mathrm{pos}(t) \Rightarrow t.(p{+\!\!\!+}q) \leq t.p$$

o equivalentemente, por transitividad de $\leq$,

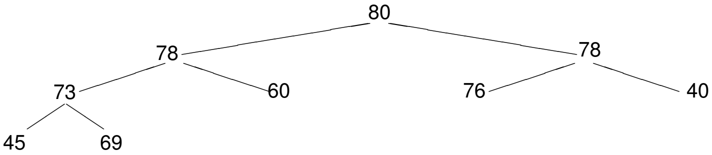
$$\mathrm{heap}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \forall p \in \mathrm{pos}(t). \begin{cases} p \lhd 0 \in \mathrm{pos}(t) \Rightarrow t.(p \lhd 0) \leq t.p \\ p \lhd 1 \in \mathrm{pos}(t) \Rightarrow t.(p \lhd 1) \leq t.p \end{cases}$$

Implementación en un arreglo

- Tener tanto control sobre la forma del heap,
- podemos asegurarnos de que se va llenando nivel por nivel,
- y se van borrando exactamente en orden inverso.
- Por ello, en todo momento se tienen los primeros $i - 1$ niveles llenos,
- y el nivel i llenándose de izquierda a derecha.

Esto permite implementar el heap en un arreglo.

Ejemplo

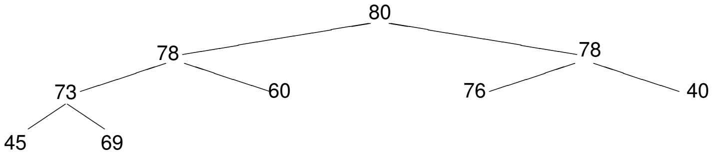


Se implementa en un arreglo de la siguiente manera:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
80	78	78	73	60	76	40	45	69					

y hace falta un natural que informe el tamaño del heap.

Ejemplo



80	78	78	73	60	76	40	45	69					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- Observar que los hijos del elemento que se encuentra en la posición i del arreglo, se encuentran en las posiciones $2i$ y $2i + 1$.
- El padre del elemento que se encuentra en la posición i, se encuentra en la posición $i \div 2$.

Implementación de heap

type heap = **tuple**
    elems: **array**[1..n] **of** elem
    size: **nat**
  end

Funciones para encontrar los hijos

fun left(i:**nat**) **ret** j:**nat**
    j:= 2*i
end

fun right(i:**nat**) **ret** j:**nat**
    j:= 2*i+1
end

Función para encontrar el padre

fun parent(i:**nat**) **ret** j:**nat**
    j:= i $\div$ 2
end

Funciones booleanas

{Pre: 1 $\leq$i$\leq$ h.size}
fun has_children(h:heap, i:**nat**) **ret** b:**bool**
    b:= (left(i) $\leq$ h.size)
end
{Post: b = i tiene hijos en h}

fun has_parent(i:**nat**) **ret** b:**bool**
    b:= (i $\neq$ 1)
end

Máximo de los hijos

{Pre: $1 \leq i \leq h.size \wedge has\_children(h,i)$}
fun max_child(h:heap, i:**nat**) **ret** j:**nat**
    if right(i) $\leq$ h.size $\wedge$ h.elems[left(i)] $\leq$ h.elems[right(i)] **then** j:= right(i)
    else j:= left(i)
    fi
end
{Post: j = posición donde se encuentra el mayor de los hijos de i en h}

Ascenso de un elemento

{Pre: $1 \leq$ i $\leq$ h.size $\wedge$ has_parent(i)}
proc lift(**in**/**out** h:heap,**in** i:**nat**)
    swap(h.elems,i,parent(i))
end

{Pre: $1 \leq$ i $\leq$ h.size $\wedge$ has_parent(i)}
fun must_lift(h:heap, i:**nat**) **ret** b:**bool**
    b:= (h.elems[i] > h.elems[parent(i)])
end
{Post: b = i es mayor que su padre}

Flotar un elemento

{Pre: h (= H) es heap excepto tal vez porque el elem en h.elems[h.size] es grande}
proc float(**in**/**out** h:heap)
    var c: **nat**
    c:= h.size
    while has_parent(c) $\wedge$ must_lift(h,c) **do**
        lift(h,c)
        c:= parent(c)
    od
end
{Post: h es un heap con los mismos elementos que H}

Hundir un elemento

```
{Pre: h (= H) es heap excepto tal vez porque el elem en 1 es chico}
proc sink(in/out h:heap)
     var p: nat
     p:= 1
     while has_children(h,p) ∧ must_lift(h,max_child(h,p)) do
          p:= max_child(h,p)
          lift(h,p)
     od
end
{Post: h es un heap con los mismos elementos que H}
```

Implementación de cola de prioridades

type pqueue = heap

proc empty(**out** q:pqueue)
    q.size:= 0
end
{Post: q $\sim$ vacía}

{Pre: q $\sim$ Q}
fun is_empty(q:pqueue) **ret** b:**bool**
    b:= (q.size = 0)
end
{Post: b $\sim$ es_vacía(Q)}

Encolar

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge$ q.size < n}
proc enqueue(**in**/**out** q:pqueue,**in** e:elem)
    q.size:= q.size+1
    q.elems[q.size]:= e
    float(q)
end
{Post: q $\sim$ encolar(Q,e)}

Primero

{Pre: $q \sim Q \wedge \neg$is_empty(q)}
fun first(q:pqueue) **ret** e:elem
    e:= q.elems[1]
end
{Post: $e \sim$ primero(Q)}

Decolar

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge\neg$is_empty(q)}
proc dequeue(**in**/**out** q:pqueue)
    q.elems[1]:= q.elems[q.size]
    q.size:= q.size-1
    sink(q)
end
{Post: q $\sim$ dequeue(Q)}

Heapsort

```
proc heap_sort(in/out a:array[1..n] of elem)
    for i:= 1 to n do
        float(a,i)
    od
    for i:= n downto 1 do
        swap(a,1,i)                              {a[i]:= first}
        sink(a,i-1)
    od
end
```

Acá hemos separado el heap en sus dos componentes: arreglo a y tamaño i (ó i-1).

Heapsort

```
proc heap_sort(in/out a:array[1..n] of elem)
    var p,c,r: nat
    for i:= 1 to n do
        c:= i                                   {comienza enqueue(a[i])}
        p:= i ÷ 2
        while c ≠ 1 ∧ a[c] > a[p] do
            swap(a,c,p)
            c:= p
            p:= p÷2
        od                                      {termina enqueue(a[i])}
    od
    for i:= n downto 1 do
        swap(a,1,i)                             {a[i]:= first, comienza dequeue}
        p:= 1
        c:= 2
        r:= min(3,i-1)
        while c < i ∧ (a[p] < max(a[c],a[r])) do
            if a[c] ≥ a[r] then swap(a,c,p)
                                p:= c
            else swap(a,r,p)
                 p:= r
            fi
            c:= 2∗p
            r:= min(2∗p+1,i-1)
        od
    od
end
```