Algoritmos y Estructuras de Datos II

Algoritmos voraces

6 de mayo de 2015

Clase de hoy

1. Repaso
2. Algoritmos voraces
   - Forma general
   - Problema de la moneda
   - Problema de la mochila
   - Árboles generadores de costo mínimo

Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
  1. análisis de algoritmos
  2. tipos de datos
     - tipos concretos
     - tipos abstractos
     - implementaciones
     - árboles binarios: de búsqueda (ABBs) y heaps.
  3. técnicas de resolución de problemas
     - divide y vencerás
     - algoritmos voraces
     - backtracking
     - programación dinámica
     - recorrida de grafos

Algoritmos Voraces (o Glotones, Golosos) (Greedy)

- Es la técnica más sencilla de resolución de problemas.
- Normalmente se trata de algoritmos que resuelven problemas de **optimización**, es decir, tenemos un problema que queremos resolver de manera **óptima**:
  - el camino más corto que une dos ciudades,
  - el valor máximo alcanzable entre ciertos objetos,
  - el costo mínimo para proveer un cierto servicio,
  - el menor número de billetes para pagar un cierto importe,
  - el menor tiempo necesario para realizar un trabajo, etc.
- Los algoritmos voraces intentan construir la solución óptima buscada **paso a paso**,
- **eligiendo** en cada paso
- la **componente** de la solución
- que **parece** más apropiada.

Características

- Nunca revisan una **elección** ya realizada,
- confían en haber elegido bien las componentes anteriores.
- Por ello, lamentablemente, no siempre funcionan,
- pero cuando funcionan son muy eficientes.
- Existen varios problemas interesantes que admiten soluciones voraces,
- que como acabamos de decir, resultan muy eficientes.

Problemas con solución voraz

- Problema de la moneda.
- Problema de la mochila.
- Problema del camino de costo mínimo en un grafo.
- Problema del árbol generador de costo mínimo en un grafo.

Clase de hoy

Ingredientes comunes de los algoritmos voraces

- se tiene un problema a resolver de manera **óptima**,
- un conjunto de **candidatos** a integrar la solución,
- los candidatos se van clasificando en 3: los aún no considerados, los **incorporados** a la solución parcial, y los **descartados**,
- existe una función que chequea si los candidatos incorporados ya forman una **solución** del problema (sin preocuparse por si la misma es o no óptima),
- una segunda función que comprueba si un conjunto de candidatos es **factible** de crecer hacia una solución (sin preocuparse por cuestiones de optimalidad),
- finalmente, una tercer función que **selecciona** de entre los candidatos aún no considerados, el más promisorio.

Receta general de los algoritmos voraces

- Inicialmente ningún candidato ha sido considerado, es decir, ni incorporado ni descartado.
- En cada paso se utiliza la función de **selección** para elegir cuál candidato considerar.
- Se utiliza la función **factible** para evaluar si el candidato considerado se incorpora a la solución o no.
- Se utiliza la función **solución** para comprobar si se ha llegado a una solución o si el proceso de construcción debe continuar.

Forma general

fun greedy(C) **ret** S
{C: conjunto de candidatos, S: solución a construir}
S:= {}
do S no es solución → c:= seleccionar de C
C:= C-{c}
if S∪{c} es factible → S:= S∪{c} **fi**
od
end fun

Lo más importante es el criterio de selección.

Clase de hoy

1. Repaso

2. Algoritmos voraces
   - Forma general
   - Problema de la moneda
   - Problema de la mochila
   - Árboles generadores de costo mínimo

Problema de la moneda

- Tenemos una cantidad infinita de monedas de cada una de las siguientes denominaciones:
  - 1 peso,
  - 50 centavos,
  - 25 centavos,
  - 10 centavos,
  - 5 centavos
  - y 1 centavo.
- Se desea pagar un cierto monto de manera exacta.
- Se debe determinar la manera de pagar dicho importe exacto con la menor cantidad de monedas posible.

Solución al problema de la moneda

- Seleccionar una moneda de la mayor denominación posible que no exceda el monto a pagar,
- utilizar exactamente el mismo algoritmo para el importe remanente.

Criterio de selección claramente establecido.

Algoritmo voraz

fun cambio(m: monto) **ret** S: conjunto de monedas
    var c,s: monto
    C:= {100, 50, 25, 10, 5, 1}
    S:= {}
    s:= 0
    do s $\neq$ m $\rightarrow$ c:= mayor elemento de C tal que s+c $\leq$ m
        S:= S$\cup${una moneda de denominación c}
        s:= s+c
    od
end fun

Algoritmo voraz
Versión más detallada

```
fun cambio(m: monto) ret S: array[1..6] of nat
    S[1]:= m div 100
    m:= m mod 100
    S[2]:= m div 50
    m:= m mod 50
    S[3]:= m div 25
    m:= m mod 25
    S[4]:= m div 10
    m:= m mod 10
    S[5]:= n div 5
    m:= m mod 5
    S[6]:= m
end fun
```

Algoritmo voraz

Detallado pero genérico

{Pre: d[1] $\geq$ d[2] $\geq \ldots \geq$ d[n] }

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, m: monto) ret S: array[1..n] of nat
    for i:= 1 to n do
        S[i]:= m div d[i]
        m:= m mod d[i]
    od
end fun
```

Sobre este algoritmo

- El orden del algoritmo es n, es decir, el número de denominaciones.
- Si el arreglo de denominaciones no está ordenado requiere $n \log n$ ordenarlo y luego n más el algoritmo, en total es $n \log n$.
- No siempre funciona, depende del conjunto de denominaciones.
- Para un conjunto razonable, funciona.

Conjunto de denominaciones para el que no funciona

- Sean 4, 3 y 1 las denominaciones y sea 6 el monto a pagar.
- El algoritmo voraz intenta pagar con una moneda de denominación 4, queda un saldo de 2 que solamente puede pagarse con 2 monedas de 1, en total, 3 monedas.
- Pero hay una solución mejor: dos monedas de 3.
- De todas formas, el algoritmo anda bien para todas las denominaciones de uso habitual.

Clase de hoy

Problema de la mochila

- Tenemos una mochila de capacidad W.
- Tenemos n objetos de valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$.
- Se quiere encontrar la mejor selección de objetos para llevar en la mochila.
- Por mejor selección se entiende aquélla que totaliza el mayor valor posible sin que su peso exceda la capacidad W de la mochila.
- Para que el problema no sea trivial, asumimos que la suma de los pesos de los n objetos excede la capacidad de la mochila, obligándonos entonces a seleccionar cuáles cargar en ella.

Criterio de selección

¿Cómo conviene seleccionar un objeto para cargar en la mochila?

- El más valioso de todos.
- El menos pesado de todos.
- Una combinación de los dos.

Análisis del primer criterio de selección

El más valioso primero

- Razonabilidad: el objetivo es cargar la mochila con el mayor valor posible, escogemos los objetos más valiosos.
- Falla: puede que al elegir un objeto valioso dejemos de lado otro apenas menos valioso pero mucho más liviano.
- Ejemplo: Mochila de capacidad 10, objetos de valor 12, 11 y 9, y peso 6, 5 y 5.
- De elegir primero el de mayor valor (12) ocuparíamos 6 de los 10 kg de la mochila, no quedando lugar para otro objeto.
- En cambio, de elegir el de valor 11, ocuparíamos solamente 5 kg quedando 5 kg para el de valor 9, totalizando un valor de 20.

Análisis del segundo criterio de selección

El menos pesado primero

- Razonabilidad: hay que procurar aprovechar la capacidad de la mochila, escogemos los objetos más livianos.
- Falla: puede que al elegir un objeto liviano dejemos de lado otro apenas más pesado pero mucho más valioso.
- Ejemplo: Mochila de capacidad 13, objetos de valor 12, 11 y 9, y peso 6, 6 y 5.
- De elegir primero el de menor peso (5) obtendríamos su valor (9) más, en el mejor de los casos, 12, totalizando 12+9=21.
- En cambio, de elegir los dos de peso 6, no se excede la capacidad de la mochila y se totaliza un valor de 23.

Análisis del tercer criterio de selección

Combinando ambos criterios

- Debemos asegurarnos de que cada kg utilizado de la mochila sea aprovechado de la mejor manera posible: que cada kg colocado en la mochila valga lo más posible.
- Criterio: elegir el de mayor valor relativo (cociente entre el valor y el peso): dicho cociente expresa el valor promedio de cada kg de ese objeto.
- Falla: puede que al elegir un objeto dejemos de lado otro de peor cociente, pero que aprovecha mejor la capacidad.
- Ejemplo: Mochila de capacidad 10, objetos de valor 12, 11 y 8, y peso 6, 5 y 4.
- El critero elige al que pesa 5, ya que cada kg de ese objeto vale más de 2. Pero convenía elegir los otros dos.

Problema de la mochila

Versión simplificada

- El problema de la mochila no admite solución voraz.
- Se simplifica permitiendo **fraccionar** objetos.
- Ahora sí el tercer criterio funciona.
- (En el ejemplo anterior, elegimos primero el que vale 11 y luego 5/6 del que vale 12 obteniendo como valor total 11 + 10 = 21).

Algoritmo voraz

fun mochila(v: **array**[1..n] **of** valor, w: **array**[1..n] **of** peso, W: peso)
                                        ret s: **array**[1..n] **of real**
    var weight: peso; c: **nat**
    for i:= 1 **to** n **do** s[i]:= 0 **od**
    weight:= 0
    do weight $\neq$ W $\rightarrow$ c:= tal que s[c] $\neq$ 0 $\wedge$ v[c]/w[c] máximo
                if weight + w[c] $\leq$ W $\rightarrow$ s[c]:= 1
                                        weight:= weight + w[c]
                    weight + w[c] $>$ W $\rightarrow$ s[c]:= (W-weight)/w[c]
                                        weight:= W
                fi
    od
end fun

Sobre este algoritmo

- El orden del algoritmo es n, es decir, el número de objetos.
- Si los objetos no están ordenado según su cociente valor/peso, requiere $n \log n$ ordenarlo y luego n más el algoritmo, en total es $n \log n$.
- Si los objetos en total exceden muy largamente la capacidad de la mochila, en vez de ordenar puede convenir utilizar una cola de prioridades, en cuyo caso el orden es n.
- funciona siempre que esté permitido fraccionarse objetos.

Algoritmo voraz si los objetos están ordenados

fun mochila(v: **array**[1..n] **of** valor, w: **array**[1..n] **of** peso, W: peso)
ret s: **array**[1..n] **of real**

```
var weight: peso; c: nat
for i:= 1 to n do s[i]:= 0 od
weight:= 0
c:= 1
do weight + w[c] ≤ W → s[c]:= 1
                       weight:= weight + w[c]
                       c:= c+1
od
s[c]:= (W-weight)/w[c]
```

end fun

Clase de hoy

1. Repaso

2. Algoritmos voraces
   - Forma general
   - Problema de la moneda
   - Problema de la mochila
   - Árboles generadores de costo mínimo

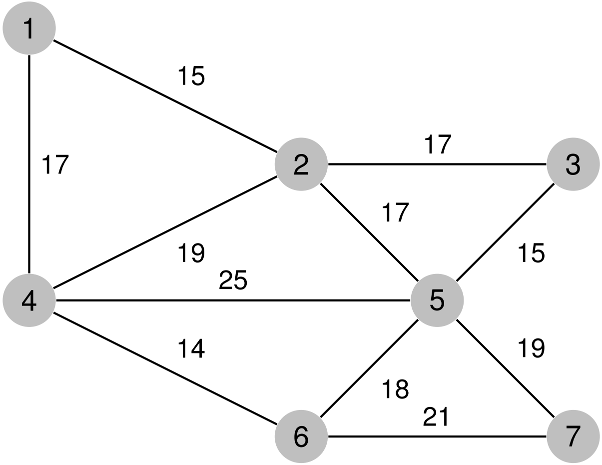
Árbol generador de costo mínimo

- Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo no dirigido con un costo no negativo asociado a cada arista.
- Se dice que $T \subseteq A$ es un árbol generador (intuitivamente, un tendido) si el grafo (V, T) es conexo y no contiene ciclos.
- Su costo es la suma de los costos de sus aristas.
- Se busca T tal que su costo sea mínimo.

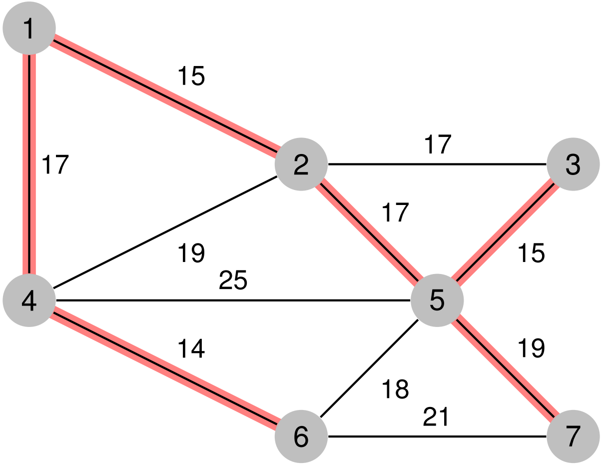
Árbol generador de costo mínimo

- El problema de encontrar un árbol generador de costo mínimo tiene numerosas aplicaciones en la vida real.
- Cada vez que se quiera realizar un tendido (eléctrico, telefónico, etc) se quieren unir distintas localidades de modo que requiera el menor costo en instalaciones (por ejemplo, cables) posible.
- Se trata de realizar el tendido siguiendo la traza de un árbol generador de costo mínimo.

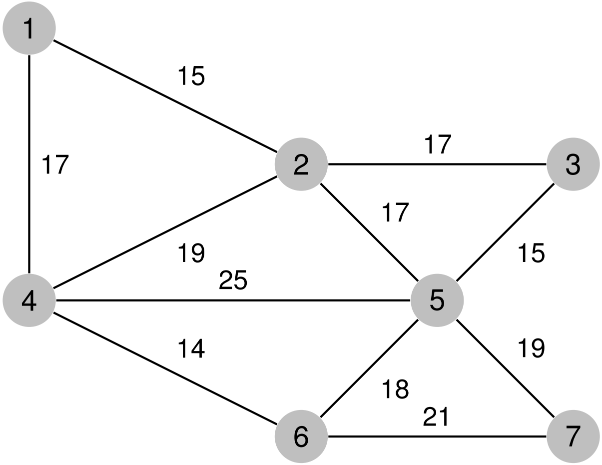
Ejemplo



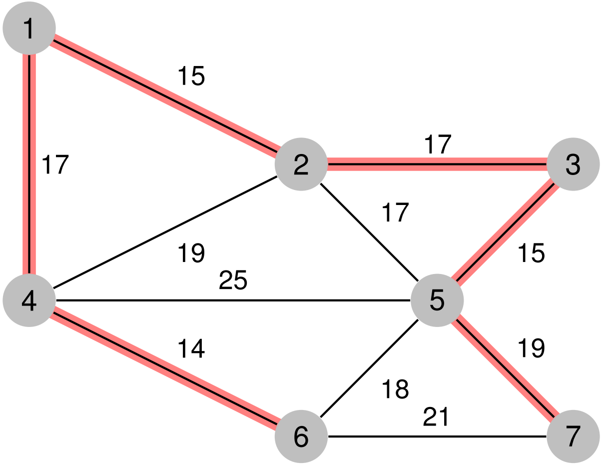
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo

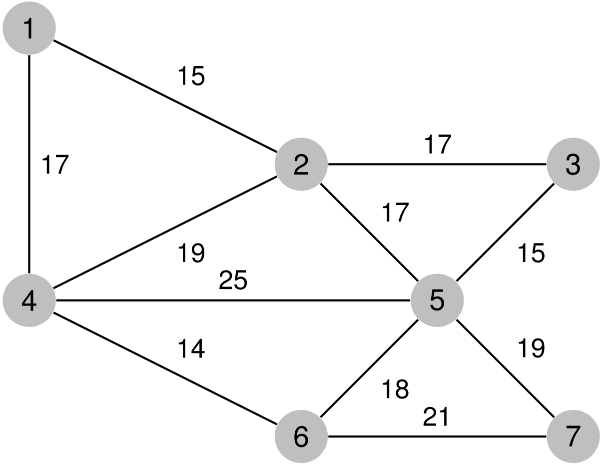


Dos estrategias

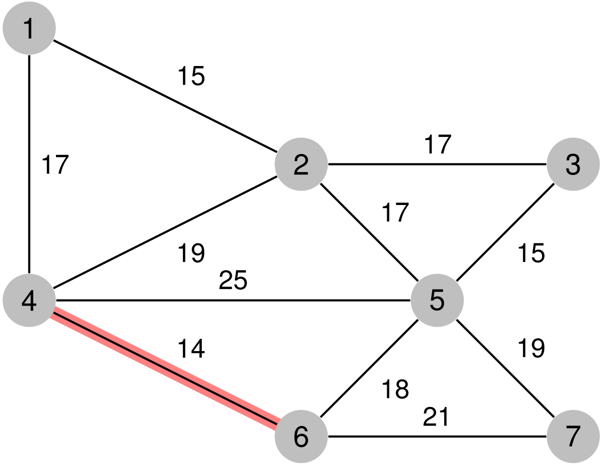
Hay dos grandes ideas de cómo resolverlo:

- La de Prim: se parte desde un vértice origen y se va extendiendo el tendido a partir de ahí:
  - en cada paso se une el tendido ya existente con alguno de los vértices aún no alcanzados, seleccionando la arista de menor costo capaz de incorporar un nuevo vértice
- La de Kruskal: se divide el grafo en distintas componentes (originariamente una por cada vértice) y se van uniendo componentes,
  - en cada paso se selecciona la arista de menor costo capaz de unir componentes.

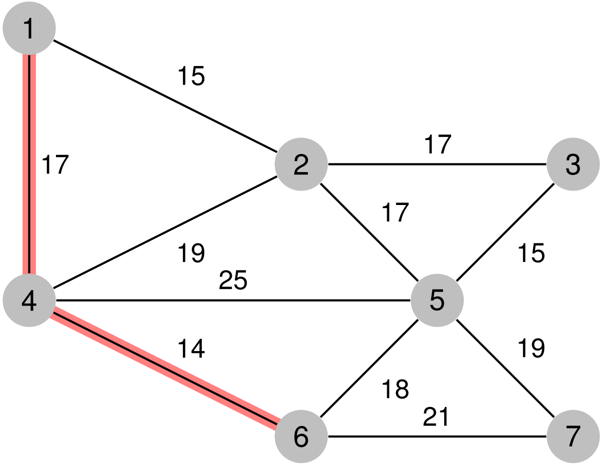
Algoritmo de Prim



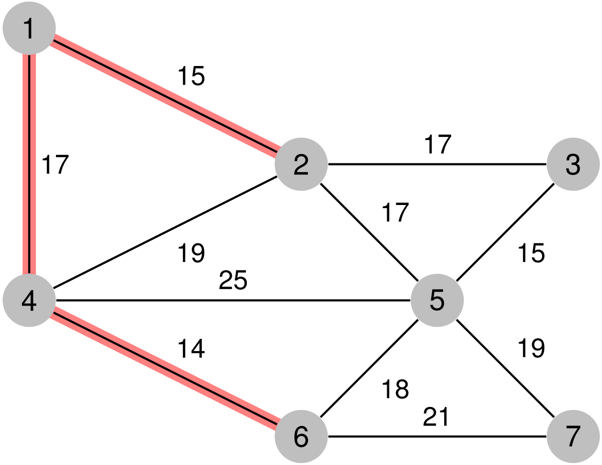
Algoritmo de Prim



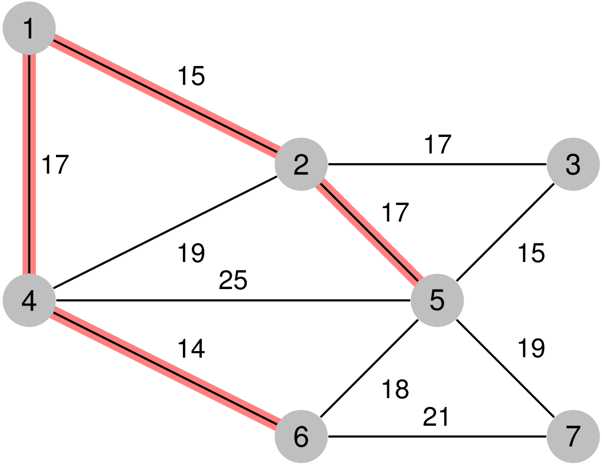
Algoritmo de Prim



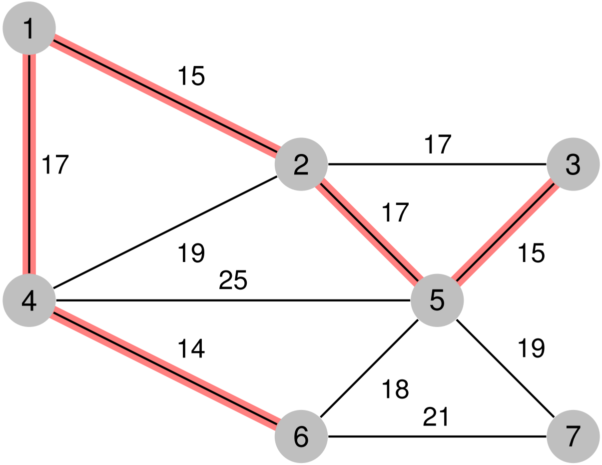
Algoritmo de Prim



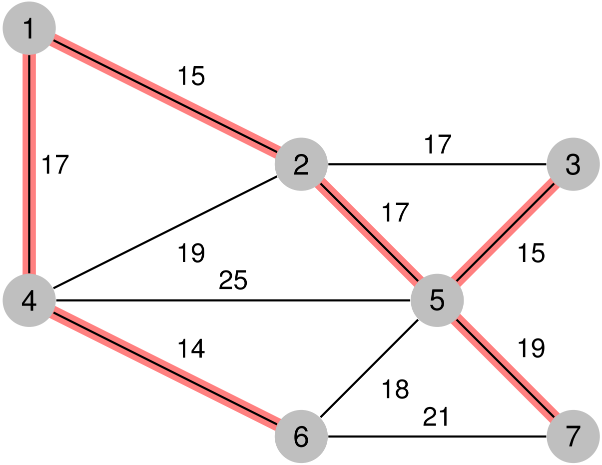
Algoritmo de Prim



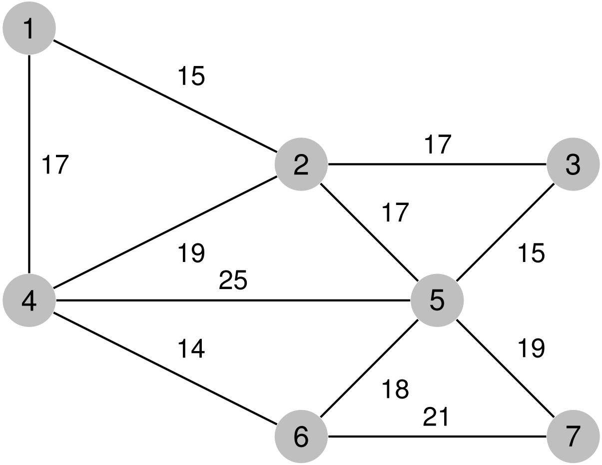
Algoritmo de Prim



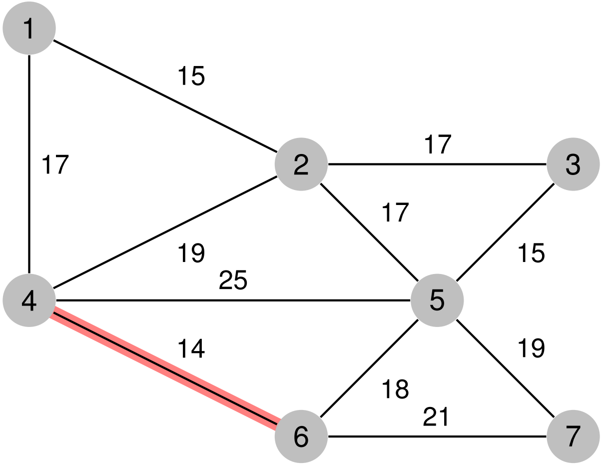
Algoritmo de Prim



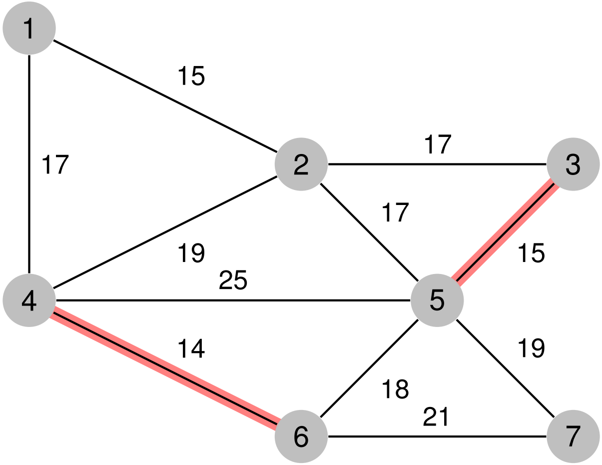
Algoritmo de Kruskal



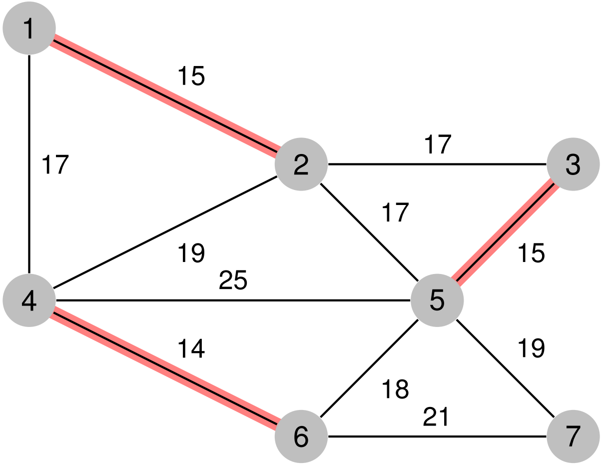
Algoritmo de Kruskal



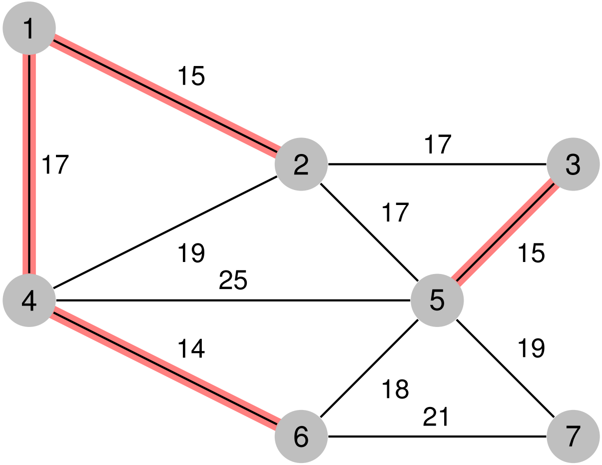
Algoritmo de Kruskal



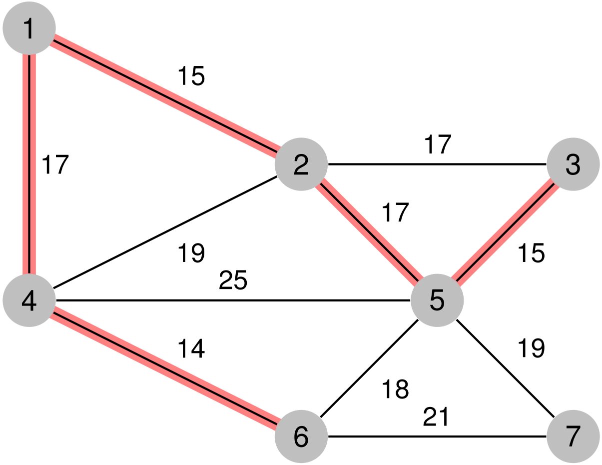
Algoritmo de Kruskal



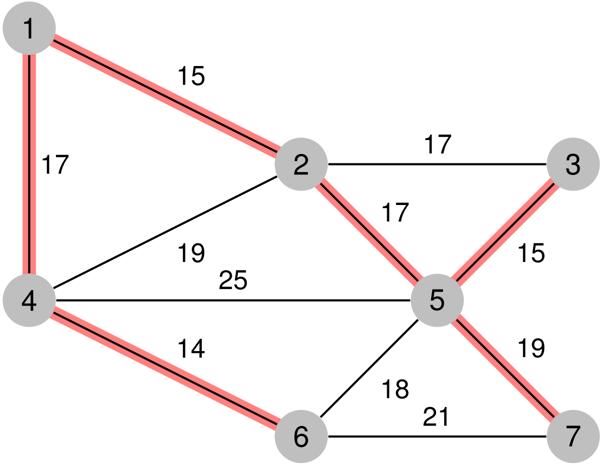
Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Implementación del Algoritmo de Prim

fun Prim(G=(V,A) con costos en las aristas, k: V)
ret T: conjunto de aristas
    var c: arista
    C:= V-{k}
    T:= {}
    do n-1 **times** $\rightarrow$
        c:= arista $\{i, j\}$ de costo mínimo tal que $i \in$ C y $j \notin$ C
        C:= C-{i}
        T:= T $\cup$ {c}
    od
end fun