Algoritmos y Estructuras de Datos II

Algoritmos voraces

9 de mayo de 2016

Clase de hoy

1. Organización de la materia

2. Algoritmos voraces
   - Forma general
   - Problema de la moneda
   - Problema de la mochila
   - Árboles generadores de costo mínimo

Organización de la materia

- cómo vs. qué
- 3 partes
  1. análisis de algoritmos
  2. tipos de datos
  3. técnicas de resolución de problemas
     - divide y vencerás
     - algoritmos voraces
     - backtracking
     - programación dinámica
     - recorrida de grafos

Algoritmos Voraces (o Glotones, Golosos) (Greedy)

- Es la técnica más sencilla de resolución de problemas.
- Normalmente se trata de algoritmos que resuelven problemas de **optimización**, es decir, tenemos un problema que queremos resolver de manera **óptima**:
  - el camino más corto que une dos ciudades,
  - el valor máximo alcanzable entre ciertos objetos,
  - el costo mínimo para proveer un cierto servicio,
  - el menor número de billetes para pagar un cierto importe,
  - el menor tiempo necesario para realizar un trabajo, etc.
- Los algoritmos voraces intentan construir la solución óptima buscada **paso a paso**,
- **eligiendo** en cada paso
- la **componente** de la solución
- que **parece** más apropiada.

Características

- Nunca revisan una **elección** ya realizada,
- confían en haber elegido bien las componentes anteriores.
- Por ello, lamentablemente, no siempre funcionan,
- pero cuando funcionan son muy eficientes.
- Existen varios problemas interesantes que admiten soluciones voraces,
- que como acabamos de decir, resultan muy eficientes.

Problemas con solución voraz

- Problema de la moneda.
- Problema de la mochila.
- Problema del camino de costo mínimo en un grafo.
- Problema del árbol generador de costo mínimo en un grafo.

Ingredientes comunes de los algoritmos voraces

- se tiene un problema a resolver de manera **óptima**,
- un conjunto de **candidatos** a integrar la solución,
- los candidatos se van clasificando en 3: los aún no considerados, los **incorporados** a la solución parcial, y los **descartados**,
- existe una función que chequea si los candidatos incorporados ya forman una **solución** del problema (sin preocuparse por si la misma es o no óptima),
- una segunda función que comprueba si un conjunto de candidatos es **factible** de crecer hacia una solución (sin preocuparse por cuestiones de optimalidad),
- finalmente, una tercer función que **selecciona** de entre los candidatos aún no considerados, el más promisorio.

Receta general de los algoritmos voraces

- Inicialmente ningún candidato ha sido considerado, es decir, ni incorporado ni descartado.
- En cada paso se utiliza la función de **selección** para elegir cuál candidato considerar.
- Se utiliza la función **factible** para evaluar si el candidato considerado se incorpora a la solución o no.
- Se utiliza la función **solución** para comprobar si se ha llegado a una solución o si el proceso de construcción debe continuar.

Forma general

fun greedy(C) **ret** S
{C: conjunto de candidatos, S: solución a construir}
S:= {}
do S no es solución $\rightarrow$ c:= seleccionar de C
C:= C-{c}
if S$\cup${c} es factible $\rightarrow$ S:= S$\cup${c} **fi**
od
end fun

Lo más importante es el criterio de selección.

Problema de la moneda

- Tenemos una cantidad infinita de monedas de cada una de las siguientes denominaciones:
  - 1 peso,
  - 50 centavos,
  - 25 centavos,
  - 10 centavos,
  - 5 centavos
  - y 1 centavo.
- Se desea pagar un cierto monto de manera exacta.
- Se debe determinar la manera de pagar dicho importe exacto con la menor cantidad de monedas posible.

Solución al problema de la moneda

- Seleccionar una moneda de la mayor denominación posible que no exceda el monto a pagar,
- utilizar exactamente el mismo algoritmo para el importe remanente.

Criterio de selección claramente establecido.

Algoritmo voraz

fun cambio(m: monto) **ret** S: conjunto de monedas
    var c,s: monto
    C:= {100, 50, 25, 10, 5, 1}
    S:= {}
    s:= 0
    do s $\neq$ m $\rightarrow$ c:= mayor elemento de C tal que s+c $\leq$ m
                S:= S$\cup${una moneda de denominación c}
                s:= s+c
    od
end fun

Algoritmo voraz
Versión más detallada

```
fun cambio(m: monto) ret S: array[1..6] of nat
    S[1]:= m div 100
    m:= m mod 100
    S[2]:= m div 50
    m:= m mod 50
    S[3]:= m div 25
    m:= m mod 25
    S[4]:= m div 10
    m:= m mod 10
    S[5]:= m div 5
    m:= m mod 5
    S[6]:= m
end fun
```

Algoritmo voraz
Detallado pero genérico

{Pre: d[1] $\geq$ d[2] $\geq \ldots \geq$ d[n] }
fun cambio(d:**array**[1..n] **of nat**, m: monto) **ret** S: **array**[1..n] **of nat**
    for i:= 1 **to** n **do**
        S[i]:= m div d[i]
        m:= m mod d[i]
    od
end fun

Sobre este algoritmo

- El orden del algoritmo es n, es decir, el número de denominaciones.
- Si el arreglo de denominaciones no está ordenado requiere $n \log n$ ordenarlo y luego n más el algoritmo, en total es $n \log n$.
- No siempre funciona, depende del conjunto de denominaciones.
- Para un conjunto razonable, funciona.

Conjunto de denominaciones para el que no funciona

- Sean 4, 3 y 1 las denominaciones y sea 6 el monto a pagar.
- El algoritmo voraz intenta pagar con una moneda de denominación 4, queda un saldo de 2 que solamente puede pagarse con 2 monedas de 1, en total, 3 monedas.
- Pero hay una solución mejor: dos monedas de 3.
- De todas formas, el algoritmo anda bien para todas las denominaciones de uso habitual.

Problema de la mochila

- Tenemos una mochila de capacidad W.
- Tenemos n objetos de valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$.
- Se quiere encontrar la mejor selección de objetos para llevar en la mochila.
- Por mejor selección se entiende aquélla que totaliza el mayor valor posible sin que su peso exceda la capacidad W de la mochila.
- Para que el problema no sea trivial, asumimos que la suma de los pesos de los n objetos excede la capacidad de la mochila, obligándonos entonces a seleccionar cuáles cargar en ella.

Criterio de selección

¿Cómo conviene seleccionar un objeto para cargar en la mochila?

- El más valioso de todos.
- El menos pesado de todos.
- Una combinación de los dos.

Análisis del primer criterio de selección

El más valioso primero

- Razonabilidad: el objetivo es cargar la mochila con el mayor valor posible, escogemos los objetos más valiosos.
- Falla: puede que al elegir un objeto valioso dejemos de lado otro apenas menos valioso pero mucho más liviano.
- Ejemplo: Mochila de capacidad 10, objetos de valor 12, 11 y 9, y peso 7, 5 y 5.
- De elegir primero el de mayor valor (12) ocuparíamos 7 de los 10 kg de la mochila, no quedando lugar para otro objeto.
- En cambio, de elegir el de valor 11, ocuparíamos solamente 5 kg quedando 5 kg para el de valor 9, totalizando un valor de 20.

Análisis del segundo criterio de selección

El menos pesado primero

- Razonabilidad: hay que procurar aprovechar la capacidad de la mochila, escogemos los objetos más livianos.
- Falla: puede que al elegir un objeto liviano dejemos de lado otro apenas más pesado pero mucho más valioso.
- Ejemplo: Mochila de capacidad 13, objetos de valor 12, 11 y 7, y peso 6, 6 y 5.
- De elegir primero el de menor peso (5) obtendríamos su valor (7) más, en el mejor de los casos, 12, totalizando 12+7=19.
- En cambio, de elegir los dos de peso 6, no se excede la capacidad de la mochila y se totaliza un valor de 23.

Análisis del tercer criterio de selección

Combinando ambos criterios

- Debemos asegurarnos de que cada kg utilizado de la mochila sea aprovechado de la mejor manera posible: que cada kg colocado en la mochila valga lo más posible.
- Criterio: elegir el de mayor valor relativo (cociente entre el valor y el peso): dicho cociente expresa el valor promedio de cada kg de ese objeto.
- Falla: puede que al elegir un objeto dejemos de lado otro de peor cociente, pero que aprovecha mejor la capacidad.
- Ejemplo: Mochila de capacidad 10, objetos de valor 12, 11 y 8, y peso 6, 5 y 4.
- El critero elige al que pesa 5, ya que cada kg de ese objeto vale más de 2. Pero convenía elegir los otros dos.

Problema de la mochila
Versión simplificada

- El problema de la mochila no admite solución voraz.
- Se simplifica permitiendo **fraccionar** objetos.
- Ahora sí el tercer criterio funciona.
- (En el ejemplo anterior, elegimos primero el que vale 11 y luego 5/6 del que vale 12 obteniendo como valor total 11 + 10 = 21).

Algoritmo voraz

{Pre: $\sum_{i=1}^{n} w[i] \geq W$}
fun mochila(v: **array**[1..n] **of** valor, w: **array**[1..n] **of** peso, W: peso)
ret s: **array**[1..n] **of real**

var weight: peso; c: **nat**
for i:= 1 **to** n **do** s[i]:= 0 **od**
weight:= 0
do weight $\neq$ W $\rightarrow$ c:= tal que s[c] $=$ 0 $\wedge$ v[c]/w[c] máximo
if weight + w[c] $\leq$ W $\rightarrow$ s[c]:= 1
weight:= weight + w[c]
weight + w[c] $>$ W $\rightarrow$ s[c]:= (W-weight)/w[c]
weight:= W
fi
od
end fun

Sobre este algoritmo

- Si los objetos ya están ordenados según su cociente valor/peso, el orden del algoritmo es n, es decir, el número de objetos.
- Si los objetos no están ordenado según su cociente valor/peso, requiere $n \log n$ ordenarlo y luego n más el algoritmo, en total es $n \log n$.
- Si los objetos en total exceden muy largamente la capacidad de la mochila, en vez de ordenar puede convenir utilizar una cola de prioridades, en cuyo caso el orden es n.
- funciona siempre que esté permitido fraccionarse objetos.

Algoritmo voraz si los objetos están ordenados

{Pre: $\sum_{i=1}^{n} w[i] \geq W \wedge \forall i.v[i]/w[i] \geq v[i+1]/w[i+1]$}
fun mochila(v: **array**[1..n] **of** valor, w: **array**[1..n] **of** peso, W: peso)
ret s: **array**[1..n] **of real**

```
    var weight: peso; c: nat
    for i:= 1 to n do s[i]:= 0 od
    weight:= 0
    c:= 1
    do weight + w[c] ≤ W → s[c]:= 1
                           weight:= weight + w[c]
                           c:= c+1
    od
    s[c]:= (W-weight)/w[c]
end fun
```

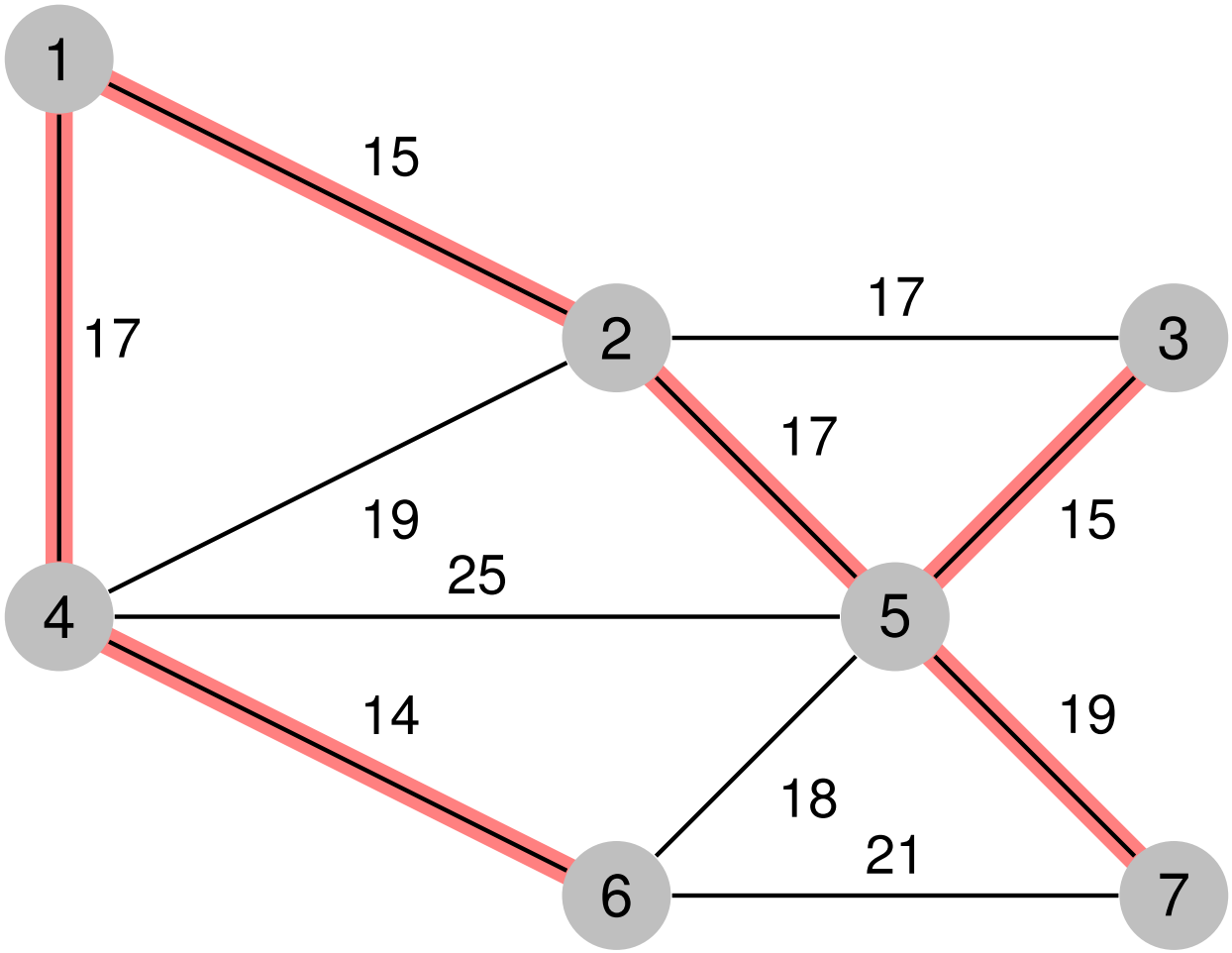
Árbol generador de costo mínimo

- Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo no dirigido con un costo no negativo asociado a cada arista.
- Se dice que $T \subseteq A$ es un árbol generador (intuitivamente, un tendido) si el grafo (V, T) es conexo y no contiene ciclos.
- Su costo es la suma de los costos de sus aristas.
- Se busca T tal que su costo sea mínimo.

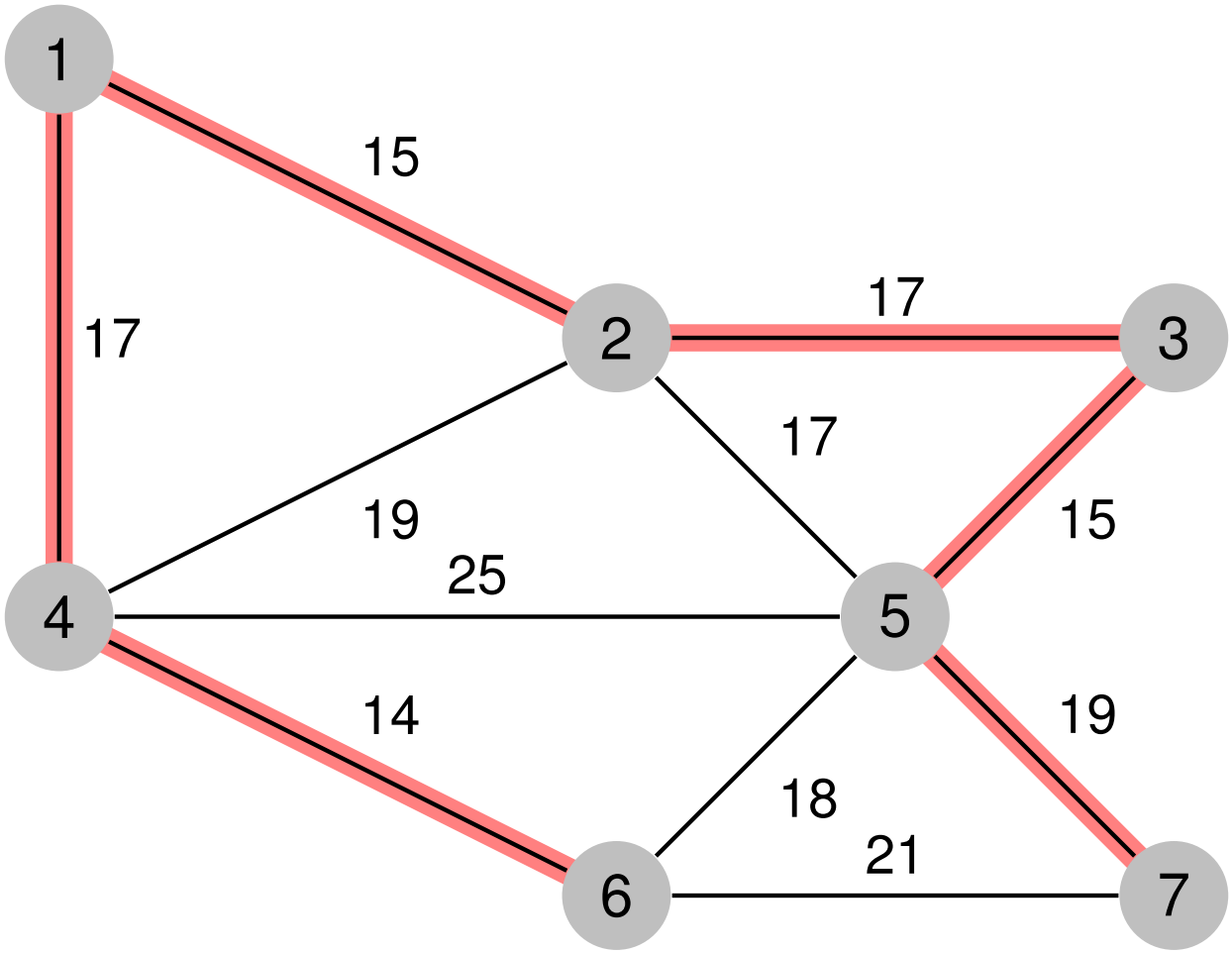
Árbol generador de costo mínimo

- El problema de encontrar un árbol generador de costo mínimo tiene numerosas aplicaciones en la vida real.
- Cada vez que se quiera realizar un tendido (eléctrico, telefónico, etc) se quieren unir distintas localidades de modo que requiera el menor costo en instalaciones (por ejemplo, cables) posible.
- Se trata de realizar el tendido siguiendo la traza de un árbol generador de costo mínimo.

Ejemplo



Ejemplo

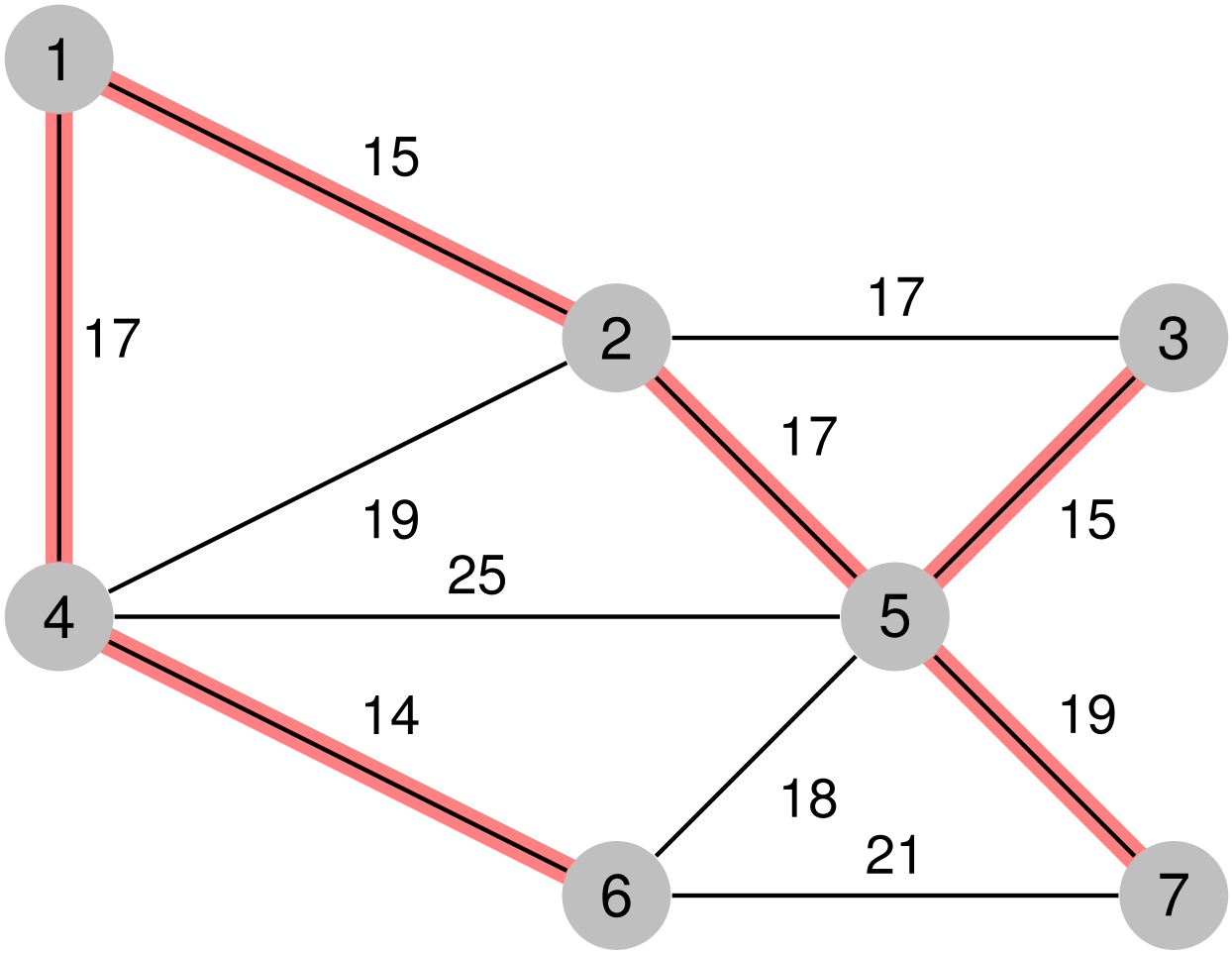


Dos estrategias

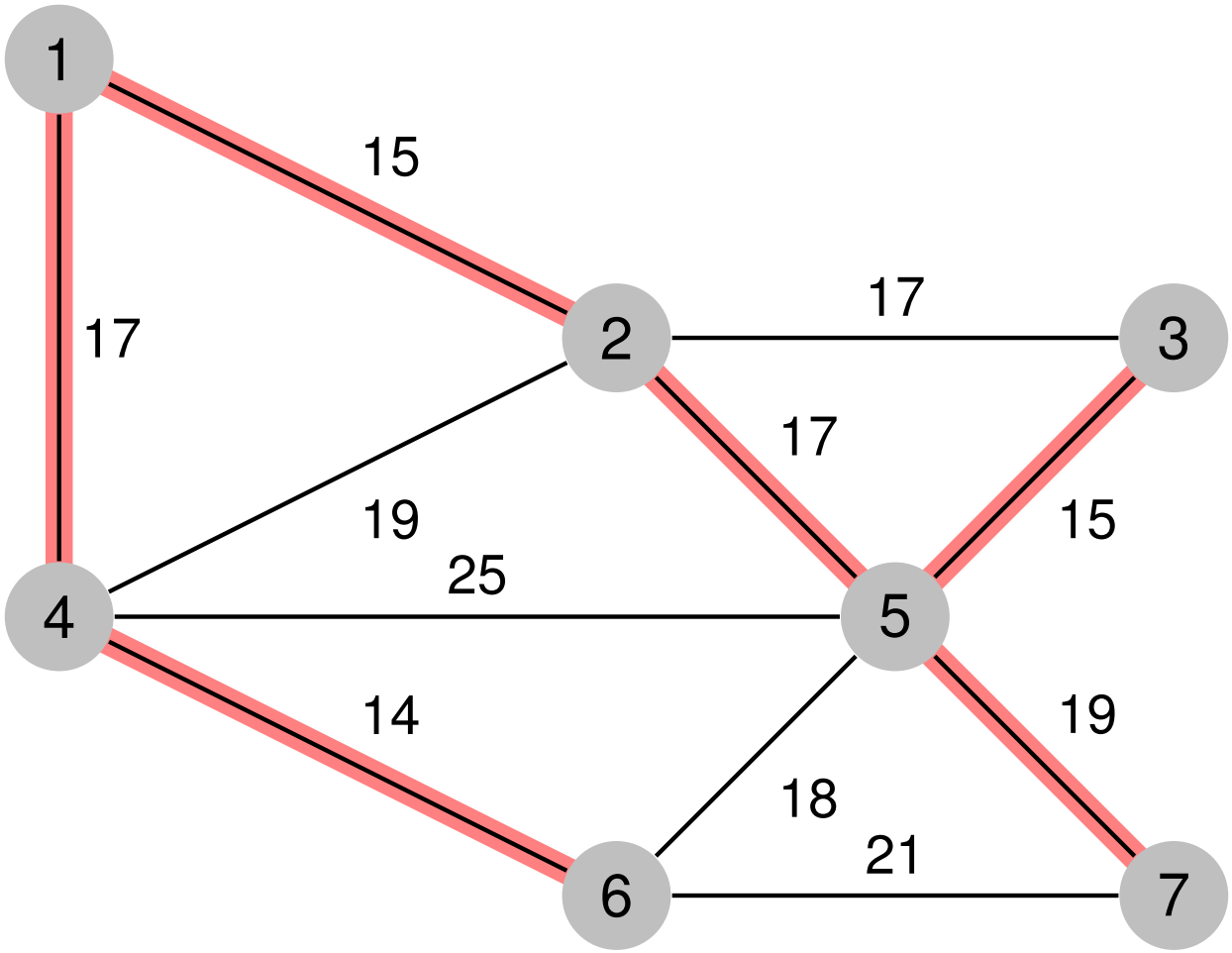
Hay dos grandes ideas de cómo resolverlo:

- La de Prim: se parte desde un vértice origen y se va extendiendo el tendido a partir de ahí:
  - en cada paso se une el tendido ya existente con alguno de los vértices aún no alcanzados, seleccionando la arista de menor costo capaz de incorporar un nuevo vértice
- La de Kruskal: se divide el grafo en distintas componentes (originariamente una por cada vértice) y se van uniendo componentes,
  - en cada paso se selecciona la arista de menor costo capaz de unir componentes.

Algoritmo de Prim



Algoritmo de Kruskal



Implementación del Algoritmo de Prim

fun Prim(G=(V,A) con costos en las aristas, k: V)
ret T: conjunto de aristas

var c: arista
C:= V-{k}
T:= {}
do n-1 **times** $\rightarrow$
c:= arista $\{i, j\}$ de costo mínimo tal que $i \in$ C y $j \notin$ C
C:= C-{i}
T:= T $\cup$ {c}
od
end fun