Algoritmos y Estructuras de Datos II

Algoritmo de Dijkstra

16 de mayo de 2016

Clase de hoy

Camino de costo mínimo

- Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido con costos no negativos en sus aristas, y sea $v \in V$ uno de sus vértices.
- Se busca obtener los caminos de menor costo desde v hacia cada uno de los demás vértices.

Algoritmo de Dijkstra
Idea

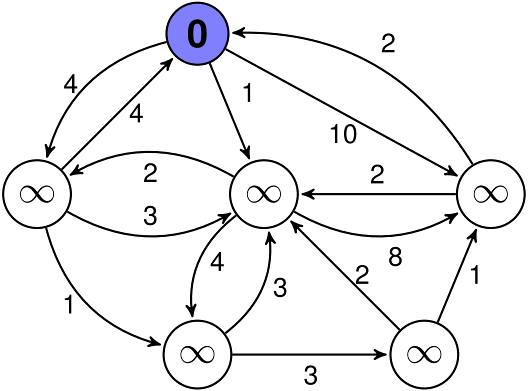
- El algoritmo de Dijkstra realiza una secuencia de n pasos, donde n es el número de vértices.
- En cada paso, “aprende” el camino de menor costo desde v a un nuevo vértice.
- A ese nuevo vértice lo pinta de azul.
- Tras esos n pasos, conoce los caminos de menor costo a cada uno de los vértices.

Algoritmo de Dijkstra
Ejemplo

- Tratemos de entenderlo a través de un ejemplo.
- En casa paso, en los vértices azules anotamos el costo del camino de menor costo de *v* a ese vértice.
- En casa paso, en los vértices blancos anotamos el costo del camino azul de menor costo de *v* a ese vértice.
- Un camino azul es uno que a lo sumo tiene al vértice destino blanco, sus otros vértices son azules.

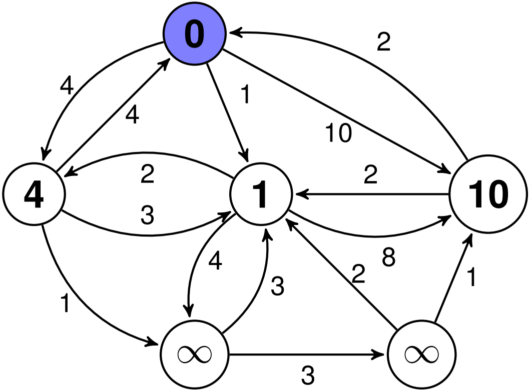
Algoritmo de Dijkstra

Paso 1 (a): sabemos lo que cuesta llegar de *v* a *v*



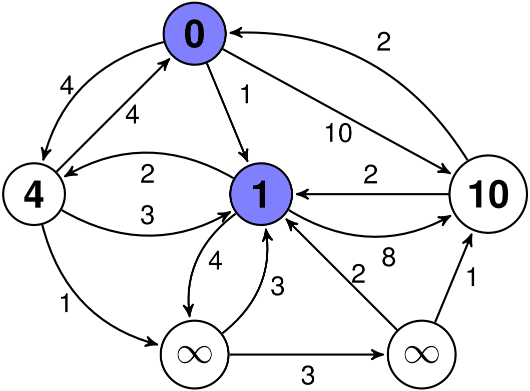
Algoritmo de Dijkstra

Paso 1 (b): Actualizamos los costos de los caminos azules óptimos



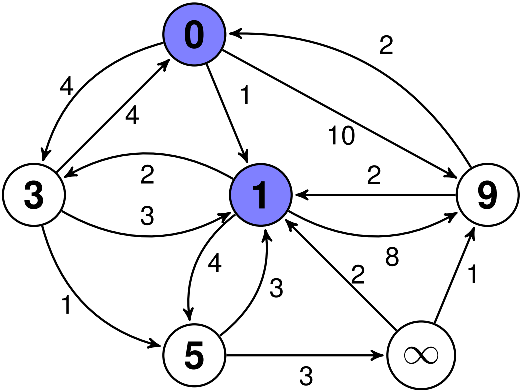
Algoritmo de Dijkstra

Paso 2 (a): sabemos lo que cuesta llegar de *v* a un nuevo vértice



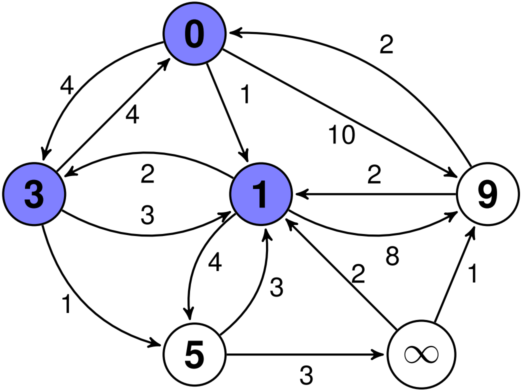
Algoritmo de Dijkstra

Paso 2 (b): Actualizamos los costos de los caminos azules óptimos



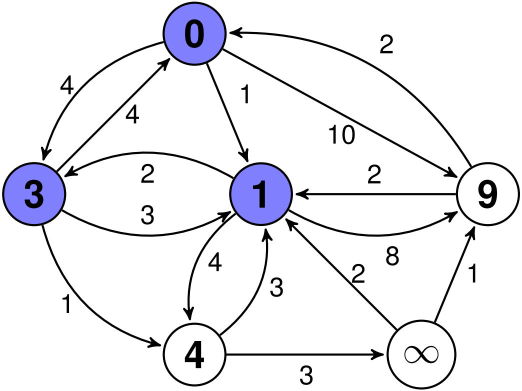
Algoritmo de Dijkstra

Paso 3 (a): sabemos lo que cuesta llegar de *v* a un nuevo vértice



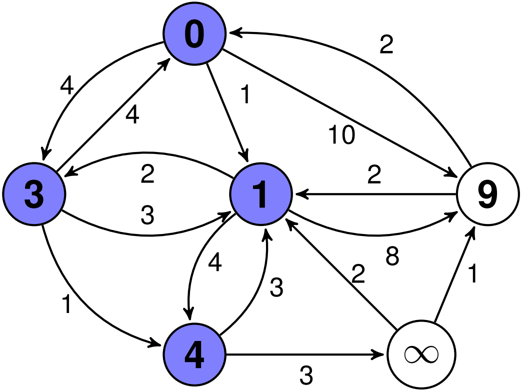
Algoritmo de Dijkstra

Paso 3 (b): Actualizamos los costos de los caminos azules óptimos



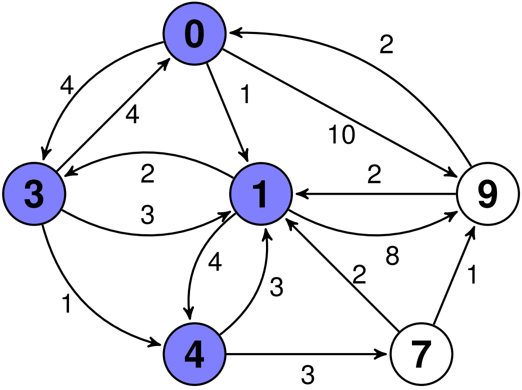
Algoritmo de Dijkstra

Paso 4 (a): sabemos lo que cuesta llegar de *v* a un nuevo vértice



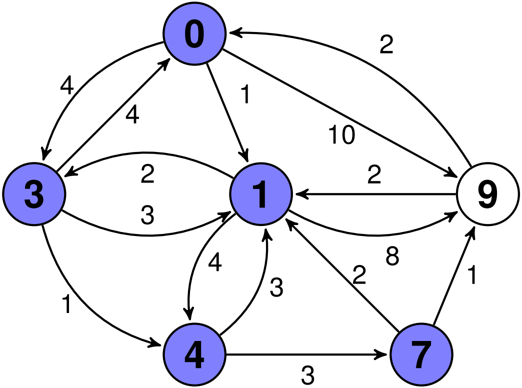
Algoritmo de Dijkstra

Paso 4 (b): Actualizamos los costos de los caminos azules óptimos



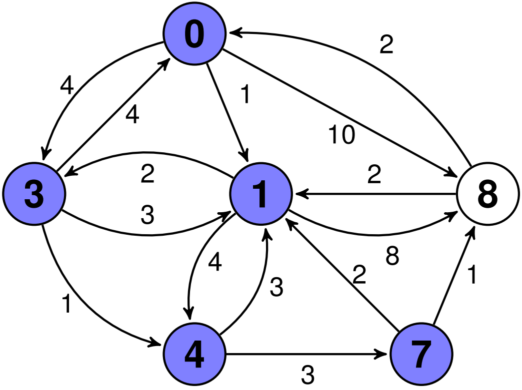
Algoritmo de Dijkstra

Paso 5 (a): sabemos lo que cuesta llegar de v a un nuevo vértice



Algoritmo de Dijkstra

Paso 5 (b): Actualizamos los costos de los caminos azules óptimos



El algoritmo

- Asumiremos que el grafo viene dado por el conjunto de vértices $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- y los costos por una matriz L : **array**[1..n,1..n] **of** costo,
- que en $L[i, j]$ mantiene el costo de la arista que va de i a j.
- En caso de no haber ninguna arista de i a j, $L[i, j] = \infty$.
- Asumimos $L[j, j] = 0$.
- El algoritmo funciona también para grafos no dirigidos, simplemente se tiene $L[i, j] = L[j, i]$ para todo par de vértices i y j.

El algoritmo
Versión simplificada

- En vez de hallar el **camino de costo mínimo** desde v hasta cada uno de los demás, halla sólo el **costo** de dicho camino.
- Es decir, halla el **costo del camino de costo mínimo** desde v hasta cada uno de los demás.
- El resultado estará dado por un arreglo D: **array**[1..n] **of** costo,
- en $D[j]$ devolverá el costo del camino de costo mínimo que va de v a j.
- El conjunto C es el conjunto de los vértices hacia los que todavía desconocemos cuál es el camino de menor costo.

Algoritmo de Dijkstra

fun Dijkstra(L: **array**[1..n,1..n] **of** costo, v: **nat**)
                                                  ret D: **array**[1..n] **of** costo
    var c: **nat**
    C:= {1,2,. . . ,n}-{v}
    for j:= 1 **to** n **do** D[j]:= L[v,j] **od**
    do n-2 **times** → c:= elemento de C que minimice D[c]
                         C:= C-{c}
                         for j **in** C **do** D[j]:= min(D[j],D[c]+L[c,j]) **od**
    od
end fun

Vértices azules

- Llamamos **vértices azules** a los que no pertenecen a C.
- O sea, a los pintados de azul en nuestra animación anterior.
- Inicialmente el único vértice azul es v.
- Un **camino azul** es un camino cuyos vértices son azules salvo quizá el último.
- Inicialmente, los caminos azules son el camino vacío (que va de v a v y tiene costo $L[v, v] = 0$)
- y las aristas que van de v a j que tienen costo $L[v, j]$.

Idea del algoritmo

- En todo momento, D mantiene en cada posición j, el costo del camino **azul** de costo mínimo que va de v a j.
- Inicialmente, por lo dicho en el párrafo anterior, $D[j]$ debe ser $L[v, j]$.
- Eso explica la inicialización de D que se realiza en el primer **for**.

Vértice azul y camino mínimo

- Cuando un vértice c es azul, ya se conoce el costo del camino de costo mínimo que va de v a c,
- y es el que está dado en ese momento por $D[c]$.
- En efecto, esto se cumple inicialmente: el vértice v es el único azul y el valor inicial de $D[v]$, es decir, 0, es el costo del camino de costo mínimo para ir desde v a v.

Invariante

Lo dicho puede expresarse en el siguiente invariante:

$\forall j \notin C. D[j] =$ costo del camino de costo mínimo de v a j
$\forall j \in C. D[j] =$ costo del camino **azul** de costo mínimo de v a j

- Para entender el algoritmo es importante prestar atención a la palabra **azul**.
- Cuando conocemos el costo del camino **azul** de costo mínimo no necesariamente hemos obtenido lo que buscamos,
- buscamos el costo del camino de costo mínimo, el mínimo de todos, azul o no.

Un nuevo vértice azul

- El algoritmo de Dijkstra elimina en cada ciclo un vértice c de C.
- Para que se mantenga el invariante es imprescindible saber que para ese c
- (que pertenecía a C y por lo tanto por el invariante $D[c]$ era el costo del camino **azul** de costo mínimo de v a c),
- $D[c]$ es en realidad el costo del camino (no necesariamente azul) de costo mínimo de v a c.

¿Cómo podemos asegurarnos de eso?

- El algoritmo elige $c \in C$ de modo de que $D[c]$ sea el mínimo.
- Es decir, elige un vértice c que aún **no es azul** y tal que $D[c]$ es mínimo.
- Sabemos, por el invariante, que $D[c]$ es el costo del camino **azul** de costo mínimo de v a c.
- ¿Puede haber un camino **no azul** de v a c que cueste menos?

¿Puede haber un camino **no azul** de v a c que cueste menos?

- Si lo hubiera, dicho camino necesariamente debería tener, por ser **no azul**, algún vértice intermedio **no azul**.
- Sea w el primer vértice **no azul** que ocurre en ese camino comenzando desde v.
- El camino **no azul** consta de una primera parte que llega a w.
- Esa primera parte es un camino **azul** de v a w, por lo que su costo, dice el invariante, debe ser $D[w]$.
- El costo del camino completo **no azul** de v a c que pasa por w costará al menos $D[w]$ ya que ése es apenas el costo de una parte del mismo.

¿Puede haber un camino **no azul** de v a c cueste menos?

- Dijimos que ese camino pasaría por w como primer vértice **no azul** y por ello costaría al menos $D[w]$.
- Sin embargo, como c fue elegido como el que minimiza (entre los vértices **no azules**) $D[c]$, necesariamente debe cumplirse $D[c] \leq D[w]$.
- Esto demuestra que no puede haber un camino **no azul** de v a c que cueste menos que $D[c]$.
- Por ello, c puede sin peligro ser considerado un vértice **azul** ya que $D[c]$ contiene el costo del camino (azul o no) de costo mínimo de v a c.

Nuevos caminos azules

- Inmediatamente después de agregar *c* entre los vértices **azules**, es decir, inmediatamente después de eliminarlo de *C*,
- surgen nuevos caminos **azules** ya que ahora se permite que los mismos pasen también por el nuevo vértice **azul** *c*.
- Eso obliga a actualizar *D*[*j*] para los *j* **no azules** de modo de que siga satisfaciendo el invariante.
- Ahora un camino **azul** a *j* puede pasar por *c*.
- Sólo hace falta considerar caminos **azules** de *v* a *j* cuyo último vértice **azul** es *c*.

¿Por qué?

- Dijimos que sólo hace falta considerar caminos **azules** de v a j cuyo último vértice **azul** es c.
- ¿Por qué?
- Los caminos **azules** de v a j que pasan por c y cuyo último vértice **azul** es k no ganan nada por pasar por c
- ya que c está antes de k en esos caminos y entonces el costo del tramo hasta k, siendo k **azul**, sigue siendo como mínimo $D[k]$,
- es decir, en el mejor de los casos lo mismo que se tenía sin pasar por c.

Recalculando D

- Consideremos entonces solamente los caminos **azules** a j que tienen a c como último vértice **azul**.
- El costo de un tal camino de costo mínimo está dado por $D[c] + L[c, j]$,
- la suma entre el costo del camino de costo mínimo para llegar hasta c ($D[c]$) más el costo de la arista que va de c a j ($L[c, j]$).
- Este costo debe compararse con el que ya se tenía, el que sólo contemplaba los caminos **azules** antes de que c fuera **azul**.
- Ese valor es $D[j]$.
- El mínimo de los dos es el nuevo valor para $D[j]$.
- Eso explica el segundo **for**.

Últimas consideraciones

- Por último, puede observarse que en cada ejecución del ciclo un nuevo vértice se vuelve **azul**.
- Inicialmente v lo es.
- Por ello, al cabo de n-2 iteraciones, tenemos solamente 1 vértice **no azul**.
- Sea k ese vértice.

Postcondición

El invariante resulta

$$\forall j \neq k . D[j] = \text{costo del camino de costo mínimo de } v \text{ a } j$$
$$D[k] = \text{costo del camino } \textbf{azul} \text{ de costo mínimo de } v \text{ a } k$$

pero siendo k el único vértice **no azul** todos los caminos de v a k (que no tengan ciclos en los que k esté involucrado) son **azules**. Por ello, se tiene

$$D[k] = \text{costo del camino de costo mínimo de } v \text{ a } k$$

y por consiguiente

$$\forall j . D[j] = \text{costo del camino de costo mínimo de } v \text{ a } j$$

Algoritmo de Dijkstra

```
fun Dijkstra(L: array[1..n,1..n] of costo, v: nat)
    ret D: array[1..n] of costo          ret E: array[1..n] of nat
    var c: nat
    C:= {1,2,. . . ,n}-{v}
    for j:= 1 to n do D[j]:= L[v,j] od
    for j:= 1 to n do E[j]:= v od
    do n-2 times → c:= elemento de C que minimice D[c]
                   C:= C-{c}
                   for j in C do
                       if D[c]+L[c,j] < D[j] then D[j]:= D[c]+L[c,j]
                                                  E[j]:= c
                       fi
                   od
    od
end fun
```

Algoritmo de Dijkstra

¿Cuál es el orden de este algoritmo?

```
fun Dijkstra(L: array[1..n,1..n] of costo, v: nat)
                                        ret D: array[1..n] of costo
    var c: nat
    C:= {1,2,. . . ,n}-{v}
    for j:= 1 to n do D[j]:= L[v,j] od
    do n-2 times → c:= elemento de C que minimice D[c]
                   C:= C-{c}
                   for j in C do D[j]:= min(D[j],D[c]+L[c,j]) od
    od
end fun
```

Respuesta: n^2. La versión que devuelve además el camino, también.

Implementación del Algoritmo de Prim

fun Prim(G=(V,A) con costos en las aristas, k: V)
ret T: conjunto de aristas
  var c: arista
  C:= V-{k}
  T:= {}
  do n-1 **times** $\rightarrow$
    c:= arista $\{i, j\}$ de costo mínimo tal que $i \in$ C y $j \notin$ C
    C:= C-{i}
    T:= T $\cup$ {c}
  od
end fun

donde $n = |V|$. La condición del ciclo podría reemplazarse por $|T| < n - 1$ o $C \neq \{\}$, entre otras.

Algoritmo de Prim en detalle ($L[x, y] = L[y, x]$)

```
fun Prim(L: array[1..n,1..n] of costo, v: nat) ret T: conjunto de aristas
    var D: array[1..n] of costo          var E: array[1..n] of nat
    var c: nat
    C:= {1,2,...,n}-{v}          T:= {}
    for j:= 1 to n do D[j]:= L[v,j] od
    for j:= 1 to n do E[j]:= v od
    do n-1 times → c:= elemento de C que minimice D[c]
                   C:= C - {c}          T:= T ∪ {(E[c],c)}
                   for j in C do
                       if L[c,j] < D[j] then D[j]:= L[c,j]
                                             E[j]:= c
                       fi
                   od
    od
end fun
```

Implementación del Algoritmo de Kruskal

fun Kruskal(G=(V,A) con costos en las aristas)
                                        ret T: conjunto de aristas
    var i,j: vértice; u,v: componente conexa; c: arista
    C:= A
    T:= {}
    do |T| < n - 1 $\rightarrow$ c:= arista $\{i, j\}$ de C de costo mínimo
        C:= C-{c}
        u:= find(i)
        v:= find(j)
        if u $\neq$ v $\rightarrow$ T:= T $\cup$ {c}
            union(u,v)
        fi
    od
end fun

Conclusión

Sea n el número de vértices de un grafo.

- El algoritmo de Dijkstra es del orden de n^2.
- El algoritmo de Dijkstra que devuelve también el camino, es del orden de n^2.
- El algoritmo de Prim es del orden de n^2.
- El algoritmo de Kruskal es del orden de $n^2 * \log n$.
- En principio son buenos órdenes, un grafo puede tener del orden de n^2 aristas.
- Cuando el grafo tiene mucho menos de n^2 aristas, en general todos estos algoritmos pueden reescribirse de modo de que su orden mejore.