Algoritmos y Estructuras de Datos II

Programación dinámica: algoritmo de Floyd

29 de mayo de 2014

Clase de hoy

Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
  1. análisis de algoritmos
  2. tipos de datos
  3. técnicas de resolución de problemas
     - divide y vencerás
     - algoritmos voraces
     - backtracking
     - programación dinámica: problema de la moneda, problema de la mochila, algoritmo de Floyd
     - recorrida de grafos

Divide y vencerás

- Ordenación por intercalación, $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Ordenación rápida, $\mathcal{O}(n \log n)$ en la práctica.
- Búsqueda binaria, $\mathcal{O}(\log n)$.
- Exponenciación, $\mathcal{O}(\log n)$ número de multiplicaciones (n es el exponente).
- Multiplicación de grandes números, $\mathcal{O}(n^{\log_2 3})$ donde n es el número de dígitos.

Algoritmos voraces

- Problema de la moneda
  - $\mathcal{O}(n)$ donde n es el número de denominaciones si están ordenadas.
  - no anda para cualquier conjunto de denominaciones
- Problema de la mochila
  - $\mathcal{O}(n)$ donde n es el número de objetos si están ordenados según sus cocientes v_i/w_i.
  - sólo anda para objetos fraccionables
- Problema del árbol generador de costo mínimo
  - Prim es $\mathcal{O}(|V|^2)$ donde V es el conjunto de vértices. Se puede mejorar con implementaciones ingeniosas.
  - Kruskal es $\mathcal{O}(|A| \log |V|)$ donde A es el conjunto de aristas.
  - Boruvka es $\mathcal{O}(|A| \log |V|)$.
- Problema del camino de costo mínimo
  - Dijkstra es $\mathcal{O}(|V|^2)$.

Backtracking
Problema de la moneda

- Sean $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq k$,
- definimos $m(i, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con denominaciones $d_1, d_2, \ldots, d_i$."
-

$$m(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ m(i-1,j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(m(i-1,j), 1 + m(i, j-d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

- En el peor caso es exponencial.

Backtracking
Problema de la mochila

- Sean $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq W$,
- definimos $m(i, j) =$ "mayor valor alcanzable sin exceder la capacidad j con objetos $1, 2, \ldots, i$."
-

$$m(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \wedge i = 0 \\ m(i-1,j) & w_i > j > 0 \wedge i \\ \max(m(i-1,j), v_i + m(i-1, j-w_i)) & j \geq w_i > 0 \wedge i \end{cases}$$

- En el peor caso es exponencial.

Backtracking

Problema de los caminos de costo mínimo entre todo par de vértices

- Sean $1 \leq i, j \leq n$ y $0 \leq k \leq n$,
- definimos $m_k(i, j) =$ “menor costo posible para caminos de i a j cuyos vértices intermedios se encuentran en el conjunto $\{1,\ldots,k\}$.”
- $$m_k(i,j) = \begin{cases} L[i,j] & k = 0 \\ \min(m_{k-1}(i,j), m_{k-1}(i,k) + m_{k-1}(k,j)) & k \geq 1 \end{cases}$$
- En el peor caso es exponencial.

Programación dinámica

- Método para transformar una definición recursiva en iterativa
- a través de la confección de una **tabla de valores**.
- Objetivo: evitar la reiteración de cómputos.
- Ejemplo: definición recursiva de la secuencia de Fibonacci.

Secuencia de Fibonacci

- $$f_n = \begin{cases} n & n \leq 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$
- Ya vimos que esta función recursiva es exponencial.
- La razón, el cálculo de f_n lleva a calcular
  - 2 veces f_{n-2},
  - 3 veces f_{n-3},
  - 5 veces f_{n-4},
  - etc.

Fibonacci a través de una tabla

```
fun fib(n: nat) ret r: nat
    var f: array[0..max(n,1)] of nat
    f[0]:= 0
    f[1]:= 1
    for i:= 2 to n do f[i]:= f[i-1] + f[i-2] od
    r:= f[n]
end fun
```

¡Este algoritmo es lineal!

Problema de la moneda

Backtracking

Vimos la definición

$$m(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ m(i-1,j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(m(i-1,j), 1 + m(i, j-d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

que puede ser exponencial debido a que tiene dos llamadas recursivas en el último caso.

Problema de la moneda

Programación dinámica

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, k: nat) ret r: nat
    var m: array[0..n,0..k] of nat
    for i:= 0 to n do m[i,0]:= 0 od
    for j:= 1 to k do m[0,j]:= ∞ od
    for i:= 1 to n do
        for j:= 1 to k do
            if d[i] > j then m[i,j]:= m[i-1,j]
            else m[i,j]:= min(m[i-1,j],1+m[i,j-d[i]])
            fi
        od
    od
    r:= m[n,k]
end fun
```

Problema de la mochila
Backtracking

Vimos la definición

$$m(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \wedge i = 0 \\ m(i-1,j) & w_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \max(m(i-1,j), v_i + m(i-1,j-w_i)) & j \geq w_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

que puede ser exponencial debido a que tiene dos llamadas recursivas en el último caso.

Problema de la mochila

Programación dinámica

```
fun mochila(v:array[1..n] of valor, w:array[1..n] of nat, W: nat)
                                                    ret r: valor
    var m: array[0..n,0..W] of valor
    for i:= 0 to n do m[i,0]:= 0 od
    for j:= 1 to W do m[0,j]:= 0 od
    for i:= 1 to n do
        for j:= 1 to W do
            if w[i] > j then m[i,j]:= m[i-1,j]
            else m[i,j]:= max(m[i-1,j],v[i]+m[i-1,j-w[i]])
            fi
        od
    od
    r:= m[n,W]
end fun
```

Problema del camino de costo mínimo entre todo par de vértices

Backtracking

Vimos la definición

$$m_k(i,j) = \begin{cases} L[i,j] & k = 0 \\ \min(m_{k-1}(i,j), m_{k-1}(i,k) + m_{k-1}(k,j)) & k \geq 1 \end{cases}$$

que puede ser exponencial debido a que tiene tres llamadas recursivas en el último caso.

Problema del camino de costo mínimo

Confección de una tabla

- Habiendo tres parámetros, la tabla será un arreglo tridimensional.
- El caso base corresponde al llenado de la matriz $m[0, i, j]$.
- Como todas las llamadas recursivas se realizan decrementando el "parámetro k", la única condición necesaria para el llenado de la tabla es proceder desde k igual a 0 hasta k igual a n.
  - Primero se copia $m[0, i, j] := L[i, j]$ para todo i, j.
  - Luego, para todo $k > 0$, y para todo i, j se asigna $m[k, i, j] := min(m[k-1, i, j], m[k-1, i, k] + m[k-1, k, j])$

Problema del camino de costo mínimo

Observaciones interesantes

- Dijimos "Luego, para todo $k > 0$, y para todo i, j se asigna $m[k, i, j] := min(m[k-1, i, j], m[k-1, i, k] + m[k-1, k, j])$"
- Observar qué pasa al calcular la fila k de la matriz k
  - $m[k, k, j] := min(m[k-1, k, j], m[k-1, k, k] + m[k-1, k, j])$,
  - o sea, $m[k, k, j] := m[k-1, k, j]$, ¡no cambia!
- Observar qué pasa al calcular la columna k de la matriz k
  - $m[k, i, k] := min(m[k-1, i, k], m[k-1, i, k] + m[k-1, k, k])$,
  - o sea, $m[k, i, k] := m[k-1, i, k]$, ¡tampoco cambia!
- Para calcular la celda i, j de la matriz k, sólo se necesitan:
  - la misma celda de la matriz anterior
  - la celda i, k (que está en la columna k) de la matriz anterior
  - la celda k, j (que está en la fila k) de la matriz anterior
- ¡Entonces podemos hacer todo en una única matriz!

Problema del camino de costo mínimo

Programación dinámica

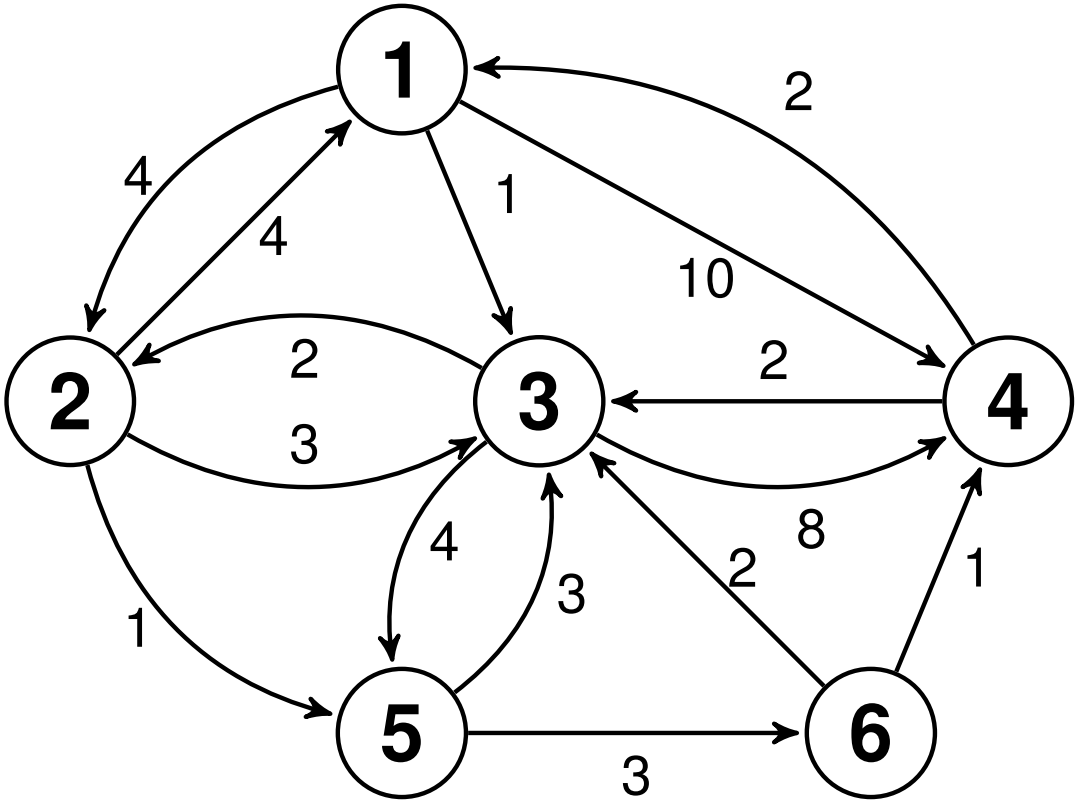
```
fun Floyd(L:array[1..n,1..n] of costo) ret m: array[1..n,1..n] of costo
    copiar L a m
    for k:= 1 to n do
        for i:= 1 to n do
            for j:= 1 to n do
                m[i,j]:= min(m[i,j],m[i,k]+m[k,j])
            od
        od
    od
end fun
```

Problema del camino de costo mínimo

Programación dinámica

```
fun Floyd(L:array[1..n,1..n] of costo) ret m: array[1..n,1..n] of costo
    for i:= 1 to n do
        for j:= 1 to n do
            m[i,j]:= L[i,j]
        od
    od
    for k:= 1 to n do
        for i:= 1 to n do
            for j:= 1 to n do
                m[i,j]:= min(m[i,j],m[i,k]+m[k,j])
            od
        od
    od
end fun
```

Grafo



Matriz de adyacencia L

$$m_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 4 & 1 & 10 & \infty & \infty \\ \hline 4 & 0 & 3 & \infty & 1 & \infty \\ \hline \infty & 2 & 0 & 8 & 4 & \infty \\ \hline 2 & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty \\ \hline \infty & \infty & 3 & \infty & 0 & 3 \\ \hline \infty & \infty & 2 & 1 & \infty & 0 \\ \hline \end{array}$$

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	∞	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	∞	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	∞	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	∞	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

$= m_1$

Calculando m_2

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_2

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_2

0	4	1	10	5	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_2

0	4	1	10	5	∞
4	0	3	14	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_2

0	4	1	10	5	∞
4	0	3	14	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	7	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_2

0	4	1	10	5	∞
4	0	3	14	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	7	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

$= m_2$

Calculando m_3

0	4	1	10	5	∞
4	0	3	14	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	7	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_3

0	4	1	10	5	∞
4	0	3	14	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	7	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_3

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	14	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	7	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_3

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	7	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_3

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_3

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

Calculando m_3

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

$= m_3$

Calculando m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

Calculando m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

Calculando m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

Calculando m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

Calculando m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

Calculando m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

Calculando m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

$= m_4$

Calculando m_5

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_5

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_5

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_5

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_5

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_5

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_5

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

$= m_5$

Calculando m_6

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_6

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_6

0	3	1	8	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_6

0	3	1	8	4	7
4	0	3	5	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_6

0	3	1	8	4	7
4	0	3	5	1	4
6	2	0	7	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_6

0	3	1	8	4	7
4	0	3	5	1	4
6	2	0	7	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

Calculando m_6

0	3	1	8	4	7
4	0	3	5	1	4
6	2	0	7	3	6
2	4	2	0	5	8
6	5	3	4	0	3
3	4	2	1	5	0

$= m_6$

Reconstrucción del camino

```
fun Floyd(L:array[1..n,1..n] of costo) ret m: array[1..n,1..n] of costo
                                       ret E: array[1..n,1..n] of nat
    copiar L a m
    inicializar las celdas de E en 0
    for k:= 1 to n do
        for i:= 1 to n do
            for j:= 1 to n do
                if m[i,k]+m[k,j] < m[i,j] then m[i,j]:= m[i,k]+m[k,j]
                                               E[i,j]:= k
                fi
            od
        od
    od
end fun
```

Matriz de adyacencia L

m_0

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	∞	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	∞	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

E_0

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Calculando m_1

m_1

0	4	1	10	∞	∞
4	0	3	14	1	∞
∞	2	0	8	4	∞
2	6	2	0	∞	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

E_1

0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Calculando m_2

m_2

0	4	1	10	5	∞
4	0	3	14	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	6	2	0	7	∞
∞	∞	3	∞	0	3
∞	∞	2	1	∞	0

E_2

0	0	0	0	2	0
0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	2	0
0	1	0	0	2	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Calculando m_3

m_3

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
8	4	2	1	5	0

E_3

0	3	0	3	3	0
0	0	0	3	0	0
2	0	0	0	2	0
0	3	0	0	3	0
3	3	0	3	0	0
3	3	0	0	3	0

Calculando m_4

m_4

0	3	1	9	4	∞
4	0	3	11	1	∞
6	2	0	8	3	∞
2	4	2	0	5	∞
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

E_4

0	3	0	3	3	0
0	0	0	3	0	0
2	0	0	0	2	0
0	3	0	0	3	0
3	3	0	3	0	0
4	3	0	0	3	0

Calculando m_5

m_5

0	3	1	9	4	7
4	0	3	11	1	4
6	2	0	8	3	6
2	4	2	0	5	8
9	5	3	11	0	3
3	4	2	1	5	0

E_5

0	3	0	3	3	5
0	0	0	3	0	5
2	0	0	0	2	5
0	3	0	0	3	5
3	3	0	3	0	0
4	3	0	0	3	0

Calculando m_6

m_6

0	3	1	8	4	7
4	0	3	5	1	4
6	2	0	7	3	6
2	4	2	0	5	8
6	5	3	4	0	3
3	4	2	1	5	0

E_6

0	3	0	6	3	5
0	0	0	6	0	5
2	0	0	6	2	5
0	3	0	0	3	5
6	3	0	6	0	0
4	3	0	0	3	0

Problema de la moneda

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, k: nat) ret nr: array[0..n] of nat
    var m: array[0..n,0..k] of nat
        r,s: nat
    for i:= 0 to n do m[i,0]:= 0 od
    for j:= 1 to k do m[0,j]:= ∞ od
    for i:= 1 to n do
        for j:= 1 to k do
            if d[i] > j then m[i,j]:= m[i-1,j] else m[i,j]:= min(m[i-1,j],1+m[i,j-d[i]]) fi
        od
    od
    for i:= 0 to n do nr[i]:= 0 od
    nr[0]:= m[n,k]
    if m[n,k] ≠ ∞ then
      r:= n
      s:= k
      while m[r,s] > 0 do
            if m[r,s] = m[r-1,s] then r:= r-1
            else nr[r]:= nr[r]+1
                 s:= s-d[r]
            fi
      od
    fi
end fun
```

Problema de la mochila

```
fun mochila(v:array[1..n] of valor, w:array[1..n] of nat, W: nat) ret nr: array[1..n] of bool
    var m: array[0..n,0..W] of valor
        r,s: nat
    for i:= 0 to n do m[i,0]:= 0 od
    for j:= 1 to W do m[0,j]:= 0 od
    for i:= 1 to n do
        for j:= 1 to W do
            if w[i] > j then m[i,j]:= m[i-1,j] else m[i,j]:= max(m[i-1,j],v[i]+m[i-1,j-w[i]]) fi
        od
    od
    r:= n
    s:= W
    while m[r,s] > 0 do
        if m[r,s] = m[r-1,s] then nr[r]:= false
        else nr[r]:= true
             s:= s-w[r]
        fi
        r:= r-1
    od
end fun
```

Conclusión

- Algoritmos voraces
  - Cuando tenemos un criterio de selección que garantiza optimalidad
- Backtracking
  - Cuando no tenemos un criterio así
  - solución top-down
  - en general es exponencial
- Programación dinámica
  - construye una tabla bottom-up
  - evita repetir cálculos
  - pero realiza algunos cálculos inútiles.