

Algoritmos y Estructuras de Datos II - 1º cuatrimestre 2013

Práctico 3

1. Dada la siguiente especificación de árbol binario (vista en la clase teórica):

TAD árbol-binario[elem]
constructores
 <>: árbol-binario
 <_, _, _>: árbol-binario × elem × árbol-binario → árbol-binario
operaciones
 raíz: árbol-binario → elem {se aplica sólo a un árbol no vacío}
 izquierdo: árbol-binario → árbol-binario {se aplica sólo a un árbol no vacío}
 derecho: árbol-binario → árbol-binario {se aplica sólo a un árbol no vacío}
 es-vacío: árbol-binario → booleano
ecuaciones
 raíz(<i,e,d>) = e
 izquierdo(<i,e,d>) = i
 derecho(<i,e,d>) = d
 es-vacío(<>) = verdadero
 es-vacío(<i,e,d>) = falso

Extenderla con las operaciones:

nodos que devuelve la cantidad de nodos de un árbol

es-hoja que determina si un árbol es hoja, es decir, sus subárboles izquierdo y derecho son vacíos

altura que devuelve la longitud del camino que va desde un árbol hasta su hoja más lejana

es-descendiente que dados dos árboles determina si el primero es descendiente del segundo

es-ancestro que dados dos árboles determina si el primero es ancestro del segundo

profundidad que dados un árbol y un subárbol del mismo determina la longitud del camino que va desde el árbol hasta el subárbol

nivel que dado un árbol y una profundidad (como un número natural) devuelve una lista de los subárboles de esa profundidad en el árbol

descendiente (\downarrow) que dados un árbol y una posición (como una secuencia de ceros y unos, posiblemente vacía) devuelve el subárbol en esa posición

elemento (.) que dados un árbol y la posición de un nodo no vacío del mismo devuelve el elemento en esa posición

2. Se tiene la siguiente implementación de árbol binario:

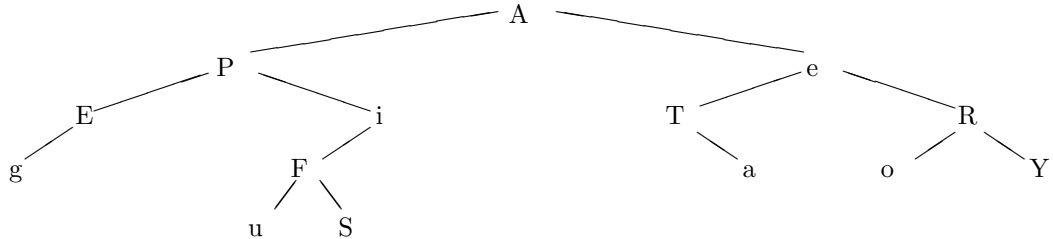
```
type node = tuple
  left : pointer to node
  value : elem
  right : pointer to node
```

```
type bintree = pointer to node
```

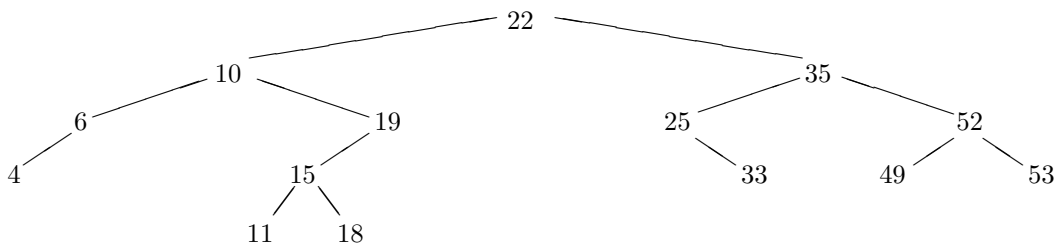
- Implementar las operaciones especificadas en el ejercicio 1, considerando que se encuentran implementadas las demás operaciones (por ejemplo, de la forma vista en el teórico), y las funciones auxiliares necesarias para verificar las precondiciones requeridas.
- Analizar la complejidad de cada una de las operaciones implementadas (incluyendo la verificación de sus respectivas precondiciones).

3. Las dos formas más usadas para procesar todos los elementos de un árbol, partiendo de su nodo raíz, son *in-order*, que procesa primero los elementos del subárbol izquierdo, luego el elemento del nodo y por último los del subárbol izquierdo; y *post-order*, que procesa los elementos de los subárboles (generalmente primero el izquierdo y luego el derecho) y a continuación el elemento del nodo. Una tercera posibilidad es *pre-order*, que procesa primero el elemento del nodo y luego los elementos de los subárboles.

- a) Escribir los procedimientos *in-order*, *post-order* y *pre-order* para ejecutar el procedimiento **proc p(in/out e: elem)** en todos los elementos del árbol *t: bintree*.
- b) Si el procedimiento *p* simplemente muestra el valor de cada elemento procesado, ¿cuál será el resultado de aplicar cada uno de los procedimientos del ítem anterior al siguiente árbol?



4. Extender la especificación e implementación de los ejercicios 1 y 2 con la operación **es-ABB** que determina si un árbol es un ABB (árbol binario de búsqueda).
5. En un ABB cuyos nodos poseen valores entre 1 y 1000, interesa encontrar el número 363. ¿Cuáles de las siguientes secuencias no puede ser una secuencia de nodos examinados según el algoritmo de búsqueda? ¿Por qué?
- a) 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363.
- b) 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363.
- c) 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363.
- d) 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363.
- e) 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363.
6. Dada la secuencia de números 23, 35, 49, 51, 41, 25, 50, 43, 55, 15, 47 y 37, determinar el ABB que resulta al insertarlos exactamente en ese orden a partir del ABB vacío.
7. Determinar al menos dos secuencias de inserciones que den lugar al siguiente ABB:



8. Escribir una implementación de la función *search* de un ABB que no utilice recursión.
9. Implementar el TAD *conjunto* del ejercicio 6 del práctico 2 utilizando como estructura de datos un *árbol binario de búsqueda* implementado con punteros.
10. Cuando se implementa un *heap binario* con un arreglo *a*, el procedimiento *sink(a, i)* “hunde” el elemento $a[i]$ a través de sus hijos $a[2i]$ y $a[2i + 1]$ de manera de que la estructura resultante mantenga la propiedad de ordenación del *heap*. Representar gráficamente la evolución, paso a paso, del *heap* al ejecutar *sink(a, 3)*, cuando $a = [27, 17, 3, 16, 13, 10, 1, 5, 7, 12, 4, 8, 9, 0]$.

11. ¿Qué sucede si se ejecuta $\text{sink}(a, i)$ cuando $a[i]$ es más grande que sus hijos? ¿Y cuando $i > N/2$, donde N es el tamaño de a ?
12. Un *heap binario*, además de la propiedad de ordenación, debe cumplir la propiedad de *forma*: el árbol debe ser (casi) completo, esto es, los nodos de todos los niveles, excepto posiblemente el último, tienen tanto hijo izquierdo como derecho. En el último nivel, si un nodo no tiene hijos (o tiene sólo hijo izquierdo), entonces todos sus *hermanos* a la derecha no pueden tener hijos.
- Teniendo en cuenta estas dos propiedades características de un *heap*:
- ¿Cuál es el número máximo y mínimo de nodos que puede tener un *heap* de altura h ?
 - ¿Dónde está ubicado el elemento mínimo de un *heap*? ¿Y el máximo?
 - ¿Un arreglo ordenado de forma descendente implementa un *heap*? ¿Un *heap* implementado con un arreglo, da siempre lugar a un arreglo ordenado de manera descendente?
 - El arreglo $[23, 17, 14, 6, 13, 10, 1, 5, 7, 12]$ ¿es un *heap*?
13. Extender la especificación e implementación de los ejercicios 1 y 2 con la operación **es-heap** que determina si un árbol es un *heap*.
14. Considerar una *cola de prioridades* Q representada con el *heap binario*

$[15, 13, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2, 1]$

Graficar el *heap* paso a paso cuando:

- se ejecuta $\text{dequeue}(Q)$,
 - se ejecuta $\text{enqueue}(Q, 10)$.
15. Un *heap n-ario* es un árbol cuyos nodos tienen n hijos que mantiene las propiedades de ordenación y forma del *heap binario*.
- ¿Cómo se representa un *heap n-ario* con un arreglo?
 - ¿Cuál es la altura de un *heap n-ario* con m nodos?
 - Implementar los procedimientos *sink* y *float* (y posiblemente sus procedimientos auxiliares) para esta clase de *heaps*.
16. ★) Un *árbol AVL* es un ABB auto balanceado. En un AVL las alturas de los subárboles de cierto nodo difieren a lo sumo en uno. Manteniendo este invariante (extra) se obtiene buena eficiencia en las operaciones asociadas, a costa de que la inserción y el borrado de nodos puede requerir rebalancear el árbol, aplicando una o más operaciones de *rotación*.
- Investigar como funcionan los AVL.
 - Implementar las operaciones de *search*, *insert* y *delete* sobre un AVL implementado con punteros.
- Ayuda:** Puede resultar útil pensar primero cómo resolver el problema sobre árboles abstractos. Además una buena modularización de estas operaciones abstractas y otras auxiliares como las de rotación puede resultar de mucha ayuda.