Algoritmos y Estructuras de Datos II

Backtracking

29 de mayo de 2017

Clase de hoy

Forma general de algoritmos voraces

fun greedy(C) **ret** S
        {C: conjunto de candidatos, S: solución a construir}
    S:= {}
    do S no es solución $\rightarrow$ c:= seleccionar de C
                C:= C-{c}
                if S$\cup${c} es factible $\rightarrow$ S:= S$\cup${c} **fi**
    od
end fun

- Ser solución y ser factible no tienen en cuenta optimalidad.
- Optimalidad depende totalmente del criterio de selección.

¿Y cuando no hay un buen criterio de selección?

- A veces no hay un criterio de selección que garantice optimalidad.
- Por ejemplo:
  - Problema de la moneda para conjuntos de denominaciones arbitrarios.
  - Problema de la mochila para objetos no fraccionables.
- En este caso, si se elige un fragmento de solución puede ser necesario “volver hacia atrás” (**backtrack**) sobre esa elección e intentar otro fragmento.
- En la práctica, estamos hablando de considerar todas las selecciones posibles e intentar cada una de ellas para saber cuál de ellas conduce a la solución óptima.

Problema de la moneda

- Sean $d_1, d_2, \ldots, d_n$ las denominaciones de las monedas (todas mayores que 0),
- no se asume que estén ordenadas,
- se dispone de una cantidad infinita de monedas de cada denominación,
- se desea pagar un monto k de manera exacta,
- utilizando el **menor número de monedas posibles**.
- Vimos que el algoritmo voraz puede no funcionar para ciertos conjuntos de denominaciones.
- Daremos un algoritmo consistente en considerar todas las combinaciones de monedas posibles.

Simplificación y generalización

- Simplificamos el problema:
  - sólo nos interesa por ahora hallar el menor número de monedas necesario,
  - no nos interesa saber cuáles son esas monedas.
- Generalizamos el problema:
  - Sea *ds* una lista cualquiera de denominaciones y $0 \leq j \leq k$,
  - definimos $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de *ds*."
  - La solución del problema original se obtiene calculando $cambio([d_1, d_2, \ldots, d_n], k)$.

Definiendo $cambio(ds, j)$

Caso $j = 0$

- Recordemos que $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$

Definiendo $cambio(ds, j)$

Caso $j > 0$ y $ds = [\,]$

- Recordemos que $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$,
- $j > 0 \Rightarrow cambio([\,], j) = \infty$,
  ya que no hay manera posible de pagar el monto

Definiendo $cambio(ds \lhd d, j)$

Caso $d > j > 0$

- Recordemos que $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$,
- $j > 0 \Rightarrow cambio([\,], j) = \infty$,
- $d > j > 0 \Rightarrow cambio(ds \lhd d, j) = cambio(ds, j)$,
  ya que no se pueden usar monedas de denominación d, es como si no estuvieran disponibles

Definiendo $cambio(ds \lhd d, j)$

Caso $j \geq d$

- Recordemos que $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$,
- $j > 0 \Rightarrow cambio([\,], j) = \infty$,
- $d > j > 0 \Rightarrow cambio(ds \lhd d, j) = cambio(ds, j)$,
- si $j \geq d$ hay dos posibilidades
  - la solución óptima no usa monedas de denominación d
    - $cambio(ds \lhd d, j) = cambio(ds, j)$
  - la solución óptima usa una o más monedas de denominación d
    - $cambio(ds \lhd d, j) = 1 + cambio(ds \lhd d, j - d)$

Definición recursiva (a la Haskell) de *cambio*(ds, j)

Conclusión de estas últimas filminas:

```
cambio ds 0 = 0
cambio [] j = ∞
cambio (ds ◁ d) j | d > j = cambio ds j
                  | otherwise = min (cambio ds j)
                                    (1 + cambio (ds ◁ d) (j - d))
```

Decisión que determina esta definición: ¿usamos monedas de denominación *d* o no?

Definición recursiva de $cambio(i, j)$

Otra notación: definir $cambio(i, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con denominaciones $d_1, d_2, \ldots, d_i$."

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ cambio(i-1,j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(cambio(i-1,j), 1 + cambio(i, j-d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

Decisión que determina esta definición: ¿usamos monedas de denominación d_i o no?

Otras posibles definiciones que usan backtracking

Considerando el número exacto de monedas de denominación d_i

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ \min_{q \in \{0,1,\ldots,j \div d_i\}} (q + cambio(i-1, j - q * d_i)) & j > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

Acá estamos considerando la posibilidad de usar 0 monedas ($q = 0$) de denominación d_i, 1 moneda ($q = 1$) de denominación d_i, etc. De todas esas posibilidades se elige la que minimice el número total de monedas.
Decisión que determina esta definición: ¿cuántas monedas de denominación d_i usamos?

Otras posibles definiciones que usan backtracking

Considerando cuál moneda de las disponibles se usa

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 1 + \min_{i' \in \{1,2,\ldots,i \mid d_{i'} \leq j\}}(cambio(i', j - d_{i'})) & j > 0 \end{cases}$$

Acá estamos considerando la posibilidad de usar 1 moneda de denominación d_i ($i' = i$), 1 moneda de denominación d_{i-1} ($i' = i - 1$), etc. De todas esas posibilidades se elige la que minimice el número total de monedas. Para evitar cálculos repetidos, se restringe la búsqueda a monedas de índice menor o igual a los ya utilizados.

Decisión que determina esta definición: de las monedas de que disponemos, ¿cuál usamos?

Primera definición recursiva en pseudocódigo

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ cambio(i-1,j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(cambio(i-1,j), 1 + cambio(i, j-d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

fun cambio(d:**array**[1..n] **of nat**, i,j: **nat**) **ret** r: **nat**
    if j=0 **then** r:= 0
    else if i = 0 **then** r:= ∞
    else if d[i] > j **then** r:= cambio(d,i-1,j)
    else r:= min(cambio(d,i-1,j),1+cambio(d,i,j-d[i]))
    fi
end fun

Segunda definición recursiva en pseudocódigo

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ \min_{q \in \{0,1,\ldots,j \div d_i\}}(q + cambio(i-1, j - q * d_i)) & j > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, i,j: nat) ret r: nat
    if j=0 then r:= 0
    else if i = 0 then r:= ∞
    else r:= cambio(d,i-1,j)
         for q:= 1 to j ÷ d[i] do
             r:= min(r,q+cambio(d,i-1,j-q*d[i]))
         od
    fi
end fun
```

Tercera definición recursiva en pseudocódigo

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 1 + \min_{i' \in \{1,2,\ldots,i \mid d_{i'} \leq j\}}(cambio(i', j - d_{i'})) & j > 0 \end{cases}$$

fun cambio(d:**array**[1..n] **of nat**, i,j: **nat**) **ret** r: **nat**
    if j=0 **then** r:= 0
    else r:= ∞
        for i':= 1 **to** i **do**
            if d[i'] $\leq$ j **then** r:= min(r,cambio(d,i',j-d[i'])) **fi**
        od
        r:= r + 1
    fi
end fun

Otras posibilidades

- No son éstas las únicas formas de resolver el problema usando backtracking.
- Podríamos definir, por ejemplo, a la Haskell

  cambio ds 0 = 0
  cambio [] j = ∞
  cambio (d $\triangleright$ ds) j | d > j = cambio ds j
  | otherwise = min (cambio ds j)
  (1 + cambio (d $\triangleright$ ds) (j - d))

Otras posibilidades

- Se correspondería con
  - $cambio(i, j)$ = "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con denominaciones $d_{i+1}, d_{i+2}, \ldots, d_n$."
- Obtendríamos, entre otras posibles definiciones recursivas,

$$cambio(i, j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = n \\ cambio(i+1, j) & d_i > j > 0 \wedge i < n \\ \min(cambio(i+1, j), 1 + cambio(i, j - d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i < n \end{cases}$$

- Para resolver el problema original se calcula $cambio(0, k)$.

Primera solución, pero ¡Queremos las monedas!

fun cambio(d:**array**[1..n] **of nat**, i,j: **nat**) **ret** r: **list of nat**
    var r_1, r_2 : **list of nat**
    if j=0 **then** r:= [ ]
    else if i = 0 **then** r:= una lista infinita o muy larga
    else if d[i] > j **then** r:= cambio(d,i-1,j)
    else r_1 := cambio(d,i-1,j)
        r_2 := cambio(d,i,j-d[i]) $\lhd$ d[i]
        if $|r_1| \leq |r_2|$ **then** r:= r_1 **else** r:= r_2 **fi**
    fi
end fun

donde |x| es la longitud de x,
y la llamada principal es cambio(d,n,k).

Problema de la mochila

- Tenemos una mochila de capacidad W.
- Tenemos n objetos **no fraccionables** de valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$.
- Se quiere encontrar la mejor selección de objetos para llevar en la mochila.
- Por mejor selección se entiende aquélla que totaliza **el mayor valor posible** sin que su peso exceda la capacidad W de la mochila.

Simplificación y generalización

- Simplificamos el problema:
  - sólo nos interesa por ahora hallar el mayor valor posible sin exceder la capacidad de la mochila,
  - no nos interesa saber cuáles son los objetos que alcanzan ese máximo.
- Generalizamos el problema:
  - Sea *os* una lista cualquiera de pares (valor,peso) y $0 \leq j \leq W$,
  - definimos $mochila(os, j) =$ "mayor valor alcanzable sin exceder la capacidad *j* con objetos de *os*."
  - La solución del problema original se obtiene calculando $mochila([(v_1, w_1), (v_2, w2), \dots, (v_n, w_n)], W)$.

Definición recursiva (a la Haskell) de $mochila(os, j)$

```
mochila os 0 = 0
mochila [] j = 0
mochila (os ◁ (v,w)) j | w > j = mochila os j
                       | otherwise = max (mochila os j)
                                         (v + mochila os (j - w))
```

Decisión que determina esta definición: ¿colocamos o no el objeto de (valor,peso) = (v, w) en la mochila?

Definición recursiva de $mochila(i, j)$

Otra notación: definir $mochila(i, j)$ = "mayor valor alcanzable sin exceder la capacidad j con objetos $1, 2, \ldots, i$."

$$mochila(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \wedge i = 0 \\ mochila(i-1,j) & w_i > j > 0 \wedge i \\ \max(mochila(i-1,j), v_i + mochila(i-1,j-w_i)) & j \geq w_i > 0 \wedge i \end{cases}$$

Decisión que determina esta definición: ¿colocamos o no el objeto i en la mochila?

Otras posibilidades

- Ofrece las mismas variantes que en el problema de la moneda,
- el pasaje a pseudocódigo es similar,
- la incorporación de información con los objetos que van en la mochila es también parecido.

Problema del camino de costo mínimo

Entre todo par de vértices

- Tenemos un grafo dirigido $G = (V, A)$,
- con costos no negativos en las aristas,
- se quiere encontrar, para cada par de vértices, el camino de menor costo que los une.
- Se asume $V = \{1, \ldots, n\}$

Simplificación y generalización

- Simplificamos el problema:
  - sólo nos interesa por ahora hallar el costo de cada uno de los caminos de costo mínimo.
  - no nos interesa saber cuáles son los caminos que alcanzan ese mínimo.
- Generalizamos el problema:
  - Sean $1 \leq i, j \leq n$ y $0 \leq k \leq n$,
  - definimos $camino_k(i, j) =$ "menor costo posible para caminos de i a j cuyos vértices intermedios se encuentran en el conjunto $\{1,\ldots,k\}$."
  - La solución del problema original se obtiene calculando $camino_n(i, j)$ para el par i (origen) y j (destino) que se desea.

Definición recursiva de $camino_k(i,j)$

$$camino_k(i,j) = \begin{cases} L[i,j] & k = 0 \\ \min(camino_{k-1}(i,j), camino_{k-1}(i,k) + camino_{k-1}(k,j)) & k \geq 1 \end{cases}$$

donde $L[i,j]$ es el costo de la arista que va de i a j, o infinito si no hay tal arista.
Decisión que determina esta definición: ¿pasamos por el vértice k o no?

Conclusiones

- Hemos visto soluciones a tres problemas.
- En general, muy ineficiente.
- Por ejemplo, para el problema de la moneda, si queremos pagar el monto 90 con nuestros billetes con denominaciones 1, 5 y 10,
  - cambio(3,90) llama a cambio(2,90) y cambio(3,80),
  - cambio(2,90) llama a cambio(1,90) y cambio(2,85),
  - cambio(2,85) llama a cambio(1,85) y **cambio(2,80)**,
  - cambio(3,80) llama a **cambio(2,80)** y cambio(3,70).
- Se ve que cambio(2,80) se calcula 2 veces.
- y muchos otros llamados se repiten, incluso varias veces.
- Esto vuelve los algoritmos exponenciales en el peor caso.

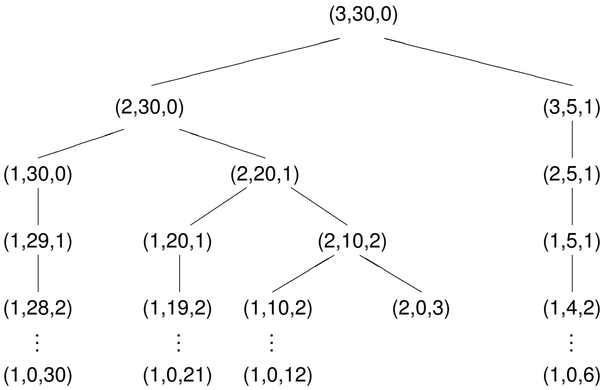
Problema de la moneda
Primera solución que usa backtracking

Recordemos la primera solución al problema de la moneda usando backtracking:

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ cambio(i-1,j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(cambio(i-1,j), 1 + cambio(i, j-d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

Grafo implícito

Ejemplo $d_1 = 1$, $d_2 = 10$, $d_3 = 25$ y $k = 30$



Grafo implícito
Definición general

- Desde el vértice (i, j, x), si $i, j > 0$ y $d_i < j$ existe una única arista a al vértice $(i - 1, j, x)$.
- En cambio si $j \leq d_i$ existen dos aristas:
  - una a $(i - 1, j, x)$
  - y otra a $(i, j - d_i, x + 1)$.
- la raíz es el vértice $(n, k, 0)$.

Problema de la moneda

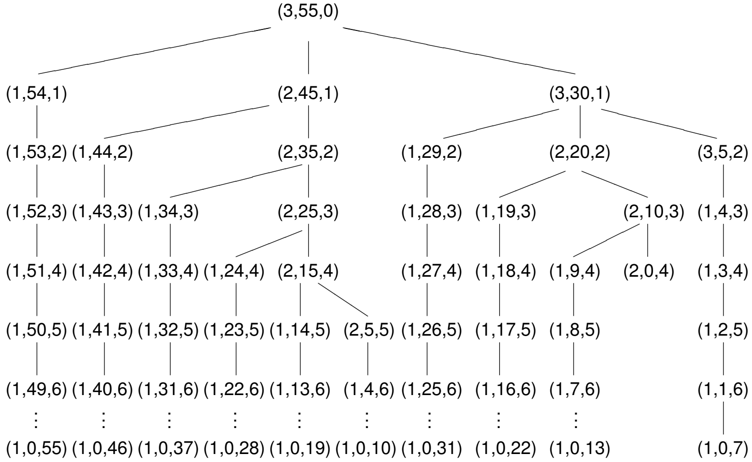
Tercera solución que usa backtracking

Recordemos otra solución al problema de la moneda usando backtracking:

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 1 + \min_{i' \in \{1,2,\dots,i \mid d_{i'} \leq j\}}(cambio(i', j - d_{i'})) & j > 0 \end{cases}$$

Grafo implícito

Ejemplo $d_1 = 1$, $d_2 = 10$, $d_3 = 25$ y $k = 55$



Grafo implícito

Definición general

- La raíz resulta la misma que en el caso anterior,
- pero el vértice (i, j, x) puede tener 0, 1, o varios hijos:
  - todos los vértices de la forma $(i', j - d_{i'}, 1 + x)$ tal que $1 \leq i' \leq i$ y $d_{i'} \leq j$,
  - son hijos de (i, j, x).