

Introducción

Motivación

Ordenación por selección

Número de operaciones de un comando (función ops)

Ordenación por inserción

Resumen

# Algoritmos y Estructuras de Datos II

Ordenación elemental

12 y 14 de marzo de 2018

# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Motivación
- 3 Ordenación por selección
  - Algoritmo
  - Ejemplo
  - Comando for
  - Análisis
- 4 Número de operaciones de un comando (función ops)
- 5 Ordenación por inserción
  - Ejemplo
  - Algoritmo
  - Análisis
- 6 Resumen

Introducción

Motivación

Ordenación por selección

Número de operaciones de un comando (función ops)

Ordenación por inserción

Resumen

## Generalidades

Toda la información sobre la materia se encuentra en la wiki,  
accesible desde [cs.famaf.unc.edu.ar/wiki](http://cs.famaf.unc.edu.ar/wiki)

# Algoritmos y Estructuras de Datos

- Introducción a los Algoritmos  
Algoritmos y Estructuras de Datos I
  - pre- y post- condiciones
  - “qué” hace un algoritmo
- Algoritmos y Estructuras de Datos II
  - “cómo” hace el algoritmo

## Ejemplo de “qué” y “cómo” de un algoritmo

Ejemplo:

un algoritmo para contar los ceros de un arreglo de enteros.

- “Qué”: devuelve (o cuenta o computa) el número de ocurrencias del número 0 en el arreglo dado.
- “Cómo”: recorre el arreglo de izquierda a derecha incrementando un contador cada vez que observa un 0.

# Análisis de algoritmos

Analizar el “cómo” permite

- predecir el tiempo de ejecución (eficiencia en tiempo)
- predecir el uso de memoria (eficiencia en espacio)
- predecir el uso de otros recursos
- comparar distintos algoritmos para un mismo problema

# Organización de la materia

La materia está organizada en tres partes:

- Análisis de algoritmos.
  - Cómo se ejecutan los algoritmos y estimar cuánto trabajo realiza.
- Estructuras de datos.
  - Tipos de datos concretos y abstractos.
- Algoritmos avanzados.
  - Algunas técnicas para resolver problemas algorítmicos.

## Problema del pintor

*Un pintor tarda una hora y media en pintar una pared de 3 metros de largo. ¿Cuánto tardará en pintar una de 5 metros de largo?*

3 metros	↔	90 minutos
1 metro	↔	30 minutos
5 metros	↔	150 minutos

Solución: dos horas y media.

El trabajo de pintar la pared es **proporcional** a su longitud.

## Problema del bibliotecario

*Un bibliotecario tarda un día en ordenar alfabéticamente una biblioteca con 1000 expedientes. ¿Cuánto tardará en ordenar una con 2000 expedientes?*

Razonamiento similar

1000 expedientes	↔	1 día
2000 expedientes	↔	2 días

Solución: dos días.

¿Está bien? ¿Es el trabajo de ordenar expedientes **proporcional** a la cantidad de expedientes a ordenar?

## Otros problemas

### del pintor

*Un pintor tarda una hora y media en pintar una pared **cuadrada** de 3 metros de lado. ¿Cuánto tardará en pintar una de 5 metros de lado?*

9 metros cuadrados	↔	90 minutos
1 metro cuadrado	↔	10 minutos
25 metros cuadrados	↔	250 minutos

Solución: cuatro horas y 10 minutos.

El trabajo de pintar la pared cuadrada es **proporcional** a su superficie, que es proporcional al cuadrado del lado.

## Otros problemas

### el del globo esférico

*Si lleva cinco horas inflar un globo aerostático esférico de 2 metros de diámetro, ¿cuánto llevará inflar uno de 4 metros de diámetro?*

El trabajo de inflar el globo es **proporcional** a su volumen, que es proporcional al cubo del diámetro ( $V = \frac{\pi d^3}{6}$ ).

diámetro = 2	↔	k metros cúbicos	↔	5 horas
diámetro = 4	↔	8k metros cúbicos	↔	40 horas

Solución: cuarenta horas.

# Algoritmos de ordenación

Para resolver el problema del bibliotecario, es necesario

- establecer a qué es proporcional la tarea de ordenar expedientes,
- estudiar métodos de ordenación,
- asumiremos la existencia de elementos o items a ordenar,
- relacionados por un orden total,
- que deben ordenarse de menor a mayor y
- que no necesariamente son diferentes entre sí.

## ¿Cómo?

Reflexionemos sobre lo siguiente:

- ¿Qué significa que una secuencia de libros, números, palabras, etc. esté ordenada?
- ¿Cómo hacen para controlar si una secuencia de números está ordenada?
  - (a esta pregunta la vamos a continuar en el práctico y en el laboratorio)
- ¿Cómo harían para ordenar de menor a mayor ciertos datos o ciertas cosas físicas que están desordenados/as?
  - números
  - cartas de un juego,
  - palabras,
  - libros.

# Ordenación por selección

## Idea

- Es el algoritmo de ordenación más sencillo (pero no el más rápido),
- **selecciona** el menor de todos, lo coloca en el primer lugar apartándolo del resto,
- **selecciona** el menor de todos **los restantes**, lo coloca en el segundo lugar apartándolo del resto,
- **selecciona** el menor de todos **los restantes**, lo coloca en el tercer lugar apartándolo del resto,
- ... (*en cada uno de estos pasos ordena un elemento*) ...
- hasta terminar.

# Ordenación por selección

## Ejemplo

9	3	1	3	5	2	7
9	3	1	3	5	2	7
1	3	9	3	5	2	7
1	3	9	3	5	2	7
1	2	9	3	5	3	7
1	2	9	3	5	3	7
1	2	3	9	5	3	7

1	2	3	9	5	3	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	7	9

Introducción

Motivación

**Ordenación por selección**

Número de operaciones de un comando (función ops)

Ordenación por inserción

Resumen

Algoritmo

**Ejemplo**

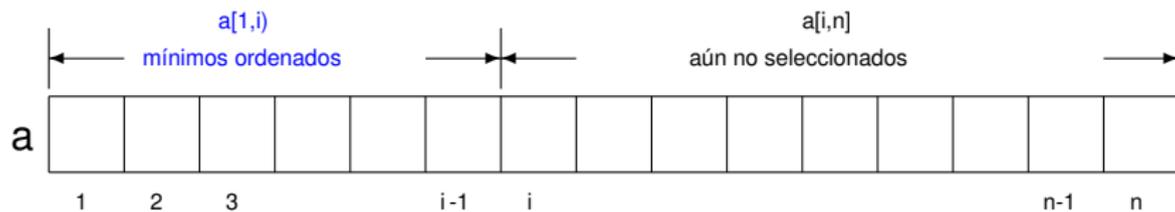
Comando for

Análisis

Demo ([www.sorting-algorithms.com](http://www.sorting-algorithms.com))

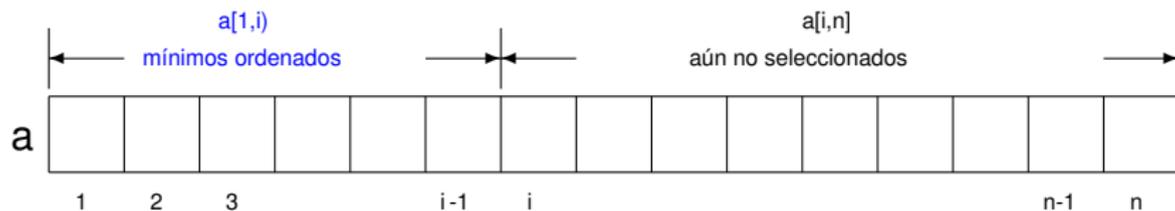
# Ordenación por selección

En un arreglo



# Ordenación por selección

## Invariante



- Invariante:

- el arreglo  $a$  es una permutación del original,
- un segmento inicial  $a[1,i]$  del arreglo está ordenado, y
- dicho segmento contiene los elementos mínimos del arreglo.



# Ordenación por selección

## Swap o intercambio

{Pre:  $a = A \wedge 1 \leq i, j \leq n$ }

**proc** swap (**in/out** a: **array**[1..n] **of** T, **in** i,j: **nat**)

**var** tmp: T

  tmp := a[i]

  a[i] := a[j]

  a[j] := tmp

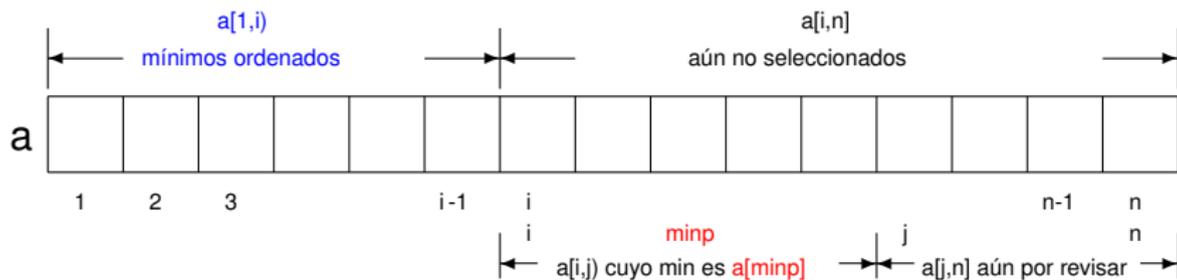
**end proc**

{Post:  $a[i] = A[j] \wedge a[j] = A[i] \wedge \forall k. k \notin \{i, j\} \Rightarrow a[k] = A[k]$ }

¡Garantiza permutación!

# Ordenación por selección

## Invariante de la función de selección



- Invariante:

- invariante anterior, y
- el mínimo del segmento  $a[i, j]$  está en la posición  $minp$ .



## Comando for

Fragmentos de la siguiente forma aparecen con frecuencia:

```
k:= n
do k ≤ m → C
    k:= k+1
od
```

Por simplicidad, lo reemplazaremos por

```
for k:= n to m do C od
```

siempre que  $k$  no se modifique en  $C$ .

Además, asumiremos que el **for** declara la variable  $k$ , cuya vida dura sólo durante la ejecución del ciclo.

# Comando for

Reemplazo en min\_pos\_from

```

fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
  var j: nat
  minp:= i
  j:= i+1
  do j ≤ n → if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
    j:= j+1
  od
end fun

fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
  minp:= i
  for j:= i+1 to n do if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
  od
end fun

```

# Comando for

Reemplazo en selection\_sort

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
  var i, minp: nat
  i := 1
  do i < n → minp := min_pos_from(a,i)
    swap(a,i,minp)
    i := i+1
  od
end proc
```

# Comando for

En selection\_sort

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
```

```
  var minp: nat
```

```
  for i:= 1 to n-1 do
```

```
    minp:= min_pos_from(a,i)
```

```
    swap(a,i,minp)
```

```
  od
```

```
end proc
```

```
fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
```

```
  minp:= i
```

```
  for j:= i+1 to n do if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
```

```
  od
```

```
end fun
```

## Comando for ... downto

Fragmentos de la siguiente forma también aparecen con cierta frecuencia:

```

k:= m
do k ≥ n → C
    k:= k-1
od
  
```

Por simplicidad, lo reemplazaremos por

```

for k:= m downto n do C od
  
```

siempre que k no se modifique en C.

## Problema del bibliotecario

Cuando el algoritmo es la ordenación por selección

- ¿Cómo se respondería el problema del bibliotecario si el algoritmo utilizado por él fuera el de ordenación por selección?
- ¿Cuánto más trabajo resulta ordenar 2000 expedientes que 1000 con este algoritmo?
- ¿Cuánto trabajo es ordenar 2000 expedientes (con este algoritmo)?
- ¿Cuánto trabajo es ordenar 1000 expedientes (con este algoritmo)?
- ¿Cuánto trabajo es ordenar  $n$  expedientes (con este algoritmo)?

# Problema del bibliotecario

## Análisis

- Para contestar estas preguntas habría que **analizar** el algoritmo de ordenación por selección, es decir, contar cuántas operaciones elementales realiza.
- Cuántas sumas, asignaciones, llamadas a funciones, comparaciones, intercambios, etc.
- En vez de eso, se elige una operación **representativa**.
- ¿Qué es una operación **representativa**?
- Una tal que se repite más que o tanto como cualquier otra.
- Hay que buscar la que **más se repite**.

## Analizando el procedimiento selection\_sort

- selection\_sort **contiene un ciclo**,
- **allí** debe estar la operación que más se repite,
- encontramos **una llamada** a la función min\_pos\_from y **una llamada** al procedimiento swap,
- el procedimiento swap **es constante** (siempre realiza 3 asignaciones elementales),
- la función min\_pos\_from, en cambio, **tiene un ciclo**,
- nuevamente **allí** debe estar la operación que más se repite,
- encontramos **una comparación** entre elementos de a, y **una asignación** (condicionada al resultado de la comparación).

# Analizando ordenación por selección

## Conclusión

- La **operación que más se repite es la comparación** entre elementos de  $a$ ,
- **toda otra operación se repite a lo sumo de manera proporcional** a esa,
- por lo tanto, **la comparación** entre elementos de  $a$  **es representativa** del trabajo de la ordenación por selección.
- Esto es habitual: para medir la eficiencia de los algoritmos de ordenación es habitual considerar el número de comparaciones entre elementos del arreglo.
- Veremos luego que acceder (o modificar) una celda de un arreglo es **constante**: su costo no depende de cuál es la celda, ni de la longitud del arreglo.

## ¿Cuántas comparaciones realiza la ordenación por selección?

- Al llamarse a `min_pos_from(a,i)` se realizan  $n-i$  comparaciones.
- `selection_sort` llama a `min_pos_from(a,i)` para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .
- por lo tanto, en total son  $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-(n-1))$  comparaciones.
- es decir,  $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$  comparaciones.

# Resolviendo el problema del bibliotecario

Con la fórmula obtenida

Para un arreglo de tamaño  $n$ , son  $\frac{n*(n-1)}{2}$  comparaciones.

1000 expedientes	↔	499500 comparaciones	↔	1 día
2000 expedientes	↔	1999000 comparaciones	↔	4 días

Solución: 4 días.

# Resolviendo el problema del bibliotecario

Con una fórmula simplificada

Como  $\frac{n*(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ , el número de comparaciones es proporcional  $n^2$ .

1000 expedientes	↔	1000000 comparaciones	↔	1 día
2000 expedientes	↔	4000000 comparaciones	↔	4 días

Solución: 4 días.

Conviene utilizar la expresión  $n^2$  para contestar la pregunta; es más sencillo y da el mismo resultado.

## Número de operaciones de un comando

- Una vez que uno sabe qué **operación** quiere contar, debe imaginar una ejecución arbitraria, genérica del comando intentando contar el número de veces que esa ejecución arbitraria realizará **dicha operación**.
- Ése es el verdadero método para contar.
- Es imprescindible comprender **cómo** se ejecuta el comando.
- A modo de ayuda, en las filminas que siguen se da un método imperfecto para ir aprendiendo.
- El método supone que ya sabemos cuál **operación** queremos contar.

# Número de operaciones de un comando

## Secuencia de comandos

- Una secuencia de comandos se ejecuta de manera secuencial, del primero al último.
- La secuencia se puede escribir horizontalmente:  
 $C_1; C_2; \dots; C_n$
- o verticalmente

 $C_1$  $C_2$  $\vdots$  $C_n$

# Número de operaciones de un comando

## Secuencia de comandos

- Para contar cuántas veces se ejecuta **la operación**, entonces, se cuenta cuántas veces se ejecuta en el primero, cuántas en el segundo, etc. y luego se suman los números obtenidos:

- $\text{ops}(C_1; C_2; \dots; C_n) = \text{ops}(C_1) + \text{ops}(C_2) + \dots + \text{ops}(C_n)$

- $\text{ops} \left( \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{array} \right) = \text{ops}(C_1) + \text{ops}(C_2) + \dots + \text{ops}(C_n)$

# Número de operaciones de un comando

## Comando **skip**

- El comando **skip** equivale a una secuencia vacía:
- $\text{ops}(\mathbf{skip}) = 0$

# Número de operaciones de un comando

## Comando **for**

- El comando **for**  $k:= n$  **to**  $m$  **do**  $C(k)$  **od** “equivale” también a una secuencia:
- **for**  $k:= n$  **to**  $m$  **do**  $C(k)$  **od** “equivale” a

 $C(n)$  $C(n+1)$  $\vdots$  $C(m)$

# Número de operaciones de un comando

## Comando **for**

- De esta “equivalencia” resulta

$$\begin{aligned} \text{ops}(\mathbf{for\ } k:= n \mathbf{ to\ } m \mathbf{ do\ } C(k) \mathbf{ od}) &= \\ &= \text{ops}(C(n)) + \text{ops}(C(n+1)) + \dots + \text{ops}(C(m)) \end{aligned}$$

- que también se puede escribir

$$\text{ops}(\mathbf{for\ } k:= n \mathbf{ to\ } m \mathbf{ do\ } C(k) \mathbf{ od}) = \sum_{k=n}^m \text{ops}(C(k))$$

# Número de operaciones de un comando

Comando **for** (una salvedad importante)

La ecuación

$$\text{ops}(\text{for } k:= n \text{ to } m \text{ do } C(k) \text{ od}) = \sum_{k=n}^m \text{ops}(C(k))$$

solamente vale cuando **no hay interés en contar las operaciones que involucran el índice k** implícitas en el **for**: inicialización, comparación con la cota m, incremento; ni el cómputo de los límites n y m. Por eso escribimos “equivale” entre comillas. En los apuntes hay otras ecuaciones posibles para el caso en que sí deseen contarse.

# Número de operaciones de un comando

## Comando condicional if

- El comando **if b then C else D fi** se ejecuta evaluando la condición  $b$  y luego, en función del valor de verdad que se obtenga, ejecutando  $C$  (caso verdadero) o  $D$  (caso falso).
- Para contar cuántas veces se ejecuta **la operación**, entonces, se cuenta cuántas veces se la ejecuta durante la evaluación de  $b$  y luego cuántas en la ejecución de  $C$  o  $D$
- $\text{ops}(\text{if } b \text{ then } C \text{ else } D \text{ fi}) = \begin{cases} \text{ops}(b) + \text{ops}(C) & \text{caso } b \text{ V} \\ \text{ops}(b) + \text{ops}(D) & \text{caso } b \text{ F} \end{cases}$

# Número de operaciones de un comando

## Asignación

- El comando  $x:=e$  se ejecuta evaluando la expresión  $e$  y modificando la posición de memoria donde se aloja la variable  $x$  con el valor de  $e$ .



$$\text{ops}(x:=e) = \begin{cases} \text{ops}(e)+1 & \text{si se desea contar la asignación} \\ & \text{o las modificaciones de memoria} \\ \text{ops}(e) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Tener en cuenta que la evaluación de  $e$  puede implicar la llamada a funciones auxiliares cuyas operaciones deben ser también contadas.

## Número de operaciones de una expresión

- Similares ecuaciones se pueden obtener para la evaluación de expresiones.
- Por ejemplo, para evaluar la expresión  $e < f$ , primero se evalúa la expresión  $e$ , luego se evalúa la expresión  $f$  y luego se comparan dichos valores.



$$\text{ops}(e < f) = \begin{cases} \text{ops}(e) + \text{ops}(f) + 1 & \text{si se cuentan comparaciones} \\ \text{ops}(e) + \text{ops}(f) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

## Ejemplo: número de comparaciones de la ordenación por selección

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
  var minp: nat
  for i:= 1 to n-1 do
    minp:= min_pos_from(a,i)
    swap(a,i,minp)
  od
end proc

fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
  minp:= i
  for j:= i+1 to n do if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
  od
end fun
```

# Ejemplo: número de comparaciones de la ordenación por selección

$$\begin{aligned}
 & \text{ops}(\text{selection\_sort}(a)) \\
 = & \text{ops}(\mathbf{for\ } i := 1 \mathbf{ to\ } n-1 \mathbf{ do\ } \text{minp} := \text{min\_pos\_fr} \dots ; \text{swap} \dots \mathbf{ od}) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{minp} := \text{min\_pos\_from}(a,i); \text{swap}(a,i,\text{minp})) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} (\text{ops}(\text{minp} := \text{min\_pos\_from}(a,i)) + \text{ops}(\text{swap}(a,i,\text{minp}))) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{minp} := \text{min\_pos\_from}(a,i)) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{min\_pos\_from}(a,i)) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{minp} := i; \mathbf{for\ } j := i+1 \mathbf{ to\ } n \mathbf{ do\ if} \dots \mathbf{ fi\ od})
 \end{aligned}$$

# Ejemplo: número de comparaciones de la ordenación por selección

$$\begin{aligned}
 & \text{ops}(\text{selection\_sort}(a)) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{minp}:= i; \text{for } j:= i+1 \text{ to } n \text{ do if } \dots \text{fi od}) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} (\text{ops}(\text{minp}:= i) + \text{ops}(\text{for } j:= i+1 \text{ to } n \text{ do if } \dots \text{fi od})) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{for } j:= i+1 \text{ to } n \text{ do if } \dots \text{fi od}) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{ops}(\text{if } a[j] < a[\text{minp}] \text{ then } \text{minp}:= j \text{ if}) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\text{ops}(a[j] < a[\text{minp}]) + \text{ops}(\text{minp}:= j)) \text{ o } \text{ops}(\text{skip}) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{ops}(a[j] < a[\text{minp}])
 \end{aligned}$$

# Ejemplo: número de comparaciones de la ordenación por selección

$$\begin{aligned}
 \text{ops}(\text{selection\_sort}(a)) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{ops}(a[j] < a[\text{minp}]) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} i \\
 &= \frac{n*(n-1)}{2} \\
 &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

# Ejemplo: número de intercambios de la ordenación por selección

$$\begin{aligned}
 & \text{ops}(\text{selection\_sort}(a)) \\
 = & \text{ops}(\mathbf{for\ } i := 1 \mathbf{ to\ } n-1 \mathbf{ do\ } \text{minp} := \text{min\_pos\_fr} \dots ; \text{swap} \dots \mathbf{ od}) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{minp} := \text{min\_pos\_from}(a,i); \text{swap}(a,i,\text{minp})) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} (\text{ops}(\text{minp} := \text{min\_pos\_from}(a,i)) + \text{ops}(\text{swap}(a,i,\text{minp}))) \\
 = & \dots = \sum_{i=1}^{n-1} (0 + \text{ops}(\text{swap}(a,i,\text{minp}))) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} \text{ops}(\text{swap}(a,i,\text{minp})) \\
 = & \sum_{i=1}^{n-1} 1 \\
 = & n-1
 \end{aligned}$$

## Conclusión del ejemplo

- Número de comparaciones de la ordenación por selección:  
 $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$
- Número de intercambios de la ordenación por selección:  
 $n-1$
- Esto significa que la operación de **intercambio no es representativa** del comportamiento de la ordenación por selección, ya que el número de comparaciones crece más que proporcionalmente respecto a los intercambios.
- Por otro lado, pudimos contar las operaciones de manera **exacta**.

# Ordenación por inserción

- **No siempre** es posible contar el **número exacto** de operaciones.
- Un ejemplo de ello lo brinda otro algoritmo de ordenación: la ordenación por inserción.
- Es un algoritmo que se utiliza por ejemplo en juegos de cartas, cuando es necesario mantener un gran número de cartas en las manos, en forma ordenada.
- Cada carta que se levanta de la mesa, se inserta en el lugar correspondiente entre las que ya están en las manos, manteniéndolas ordenadas.

# Ordenación por inserción

## Ejemplo

9	3	1	3	5	2	7
---	---	---	---	---	---	---

9	3	1	3	5	2	7
---	---	---	---	---	---	---

3	9	1	3	5	2	7
---	---	---	---	---	---	---

3	1	9	3	5	2	7
---	---	---	---	---	---	---

1	3	9	3	5	2	7
---	---	---	---	---	---	---

1	3	3	9	5	2	7
---	---	---	---	---	---	---

1	3	3	5	9	2	7
---	---	---	---	---	---	---

1	3	3	5	2	9	7
---	---	---	---	---	---	---

1	3	3	2	5	9	7
---	---	---	---	---	---	---

1	3	2	3	5	9	7
---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	3	5	9	7
---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	3	5	7	9
---	---	---	---	---	---	---

Introducción

Motivación

Ordenación por selección

Número de operaciones de un comando (función ops)

**Ordenación por inserción**

Resumen

Ejemplo

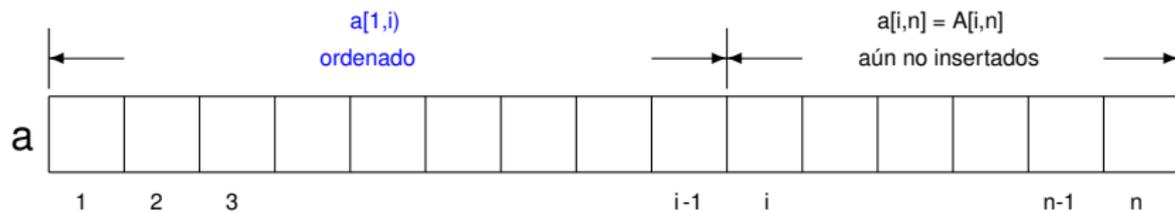
Algoritmo

Análisis

Demo ([www.sorting-algorithms.com](http://www.sorting-algorithms.com))

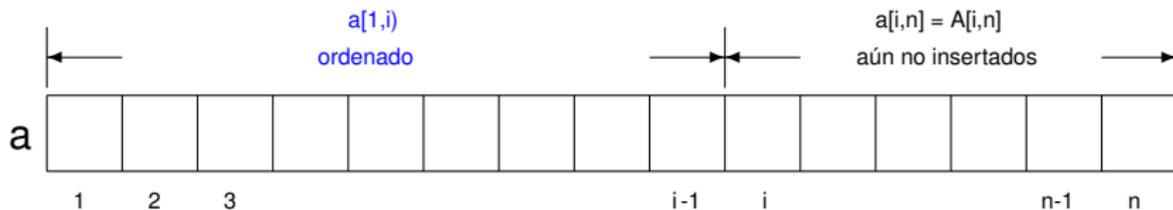
# Ordenación por inserción

En un arreglo



# Ordenación por inserción

## Invariante



- Invariante:

- el arreglo  $a$  es una permutación del original y
- un segmento inicial  $a[1, i]$  del arreglo está ordenado.
- (pero en general  $a[1, i]$  **no** contiene los mínimos del arreglo)

# Ordenación por inserción

## Pseudocódigo

{Pre:  $n \geq 0 \wedge a = A$ }

**proc** insertion\_sort (**in/out** a: **array**[1..n] **of** T)

**for** i:= 2 **to** n **do**

        {Inv: Invariante de recién}

        insert(a,i)

**od**

**end proc**

{Post: a está ordenado y es permutación de A}

# Ordenación por inserción

## Invariante del procedimiento de inserción



- Invariante:

- el arreglo  $a$  es una permutación del original
- $a[1,j]$  sin celda  $j$  está ordenado, y
- $a[j,i]$  también está ordenado.



# Ordenación por inserción

Todo junto

```
proc insertion_sort (in/out a: array[1..n] of T)
```

```
  for i:= 2 to n do
```

```
    insert(a,i)
```

```
  od
```

```
end proc
```

```
proc insert (in/out a: array[1..n] of T, in i: nat)
```

```
  var j: nat
```

```
  j:= i
```

```
  do  $j > 1 \wedge a[j] < a[j - 1]$   $\rightarrow$  swap(a,j-1,j)
```

```
    j:= j-1
```

```
  od
```

```
end proc
```

# Número de Comparaciones e intercambios

Procedimiento insert(a,i)

si el valor de i es ...	comparaciones		intercambios	
	mín	máx	mín	máx
2	1	1	0	1
3	1	2	0	2
4	1	3	0	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	n-1	0	n-1
total insertion_sort	n - 1	$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$	0	$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

## Ordenación por inserción, casos

- mejor caso: arreglo ordenado,  $n$  comparaciones y 0 intercambios.
- peor caso: arreglo ordenado al revés,  $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$  comparaciones e intercambios, es decir, del orden de  $n^2$ .
- caso promedio: del orden de  $n^2$ .

# Número de operaciones de un comando

## El ciclo **do**

- El ciclo **do**  $b \rightarrow C$  **od** (o equivalente **while**  $b$  **do**  $C$  **od**) se ejecuta evaluando la condición  $b$ , y dependiendo de si su valor es V o F se continúa de la siguiente manera:
  - si su valor fue F, la ejecución termina inmediatamente
  - si su valor fue V, la ejecución continúa con la ejecución del cuerpo  $C$  del ciclo, y luego de eso vuelve a ejecutarse todo el ciclo nuevamente.
- Es decir que su ejecución es una secuencia de evaluaciones de la condición  $b$  y ejecuciones del cuerpo  $C$  que finaliza con la primera evaluación de  $b$  que dé F.

# Número de operaciones de un comando

## El ciclo **do**

Es decir, la ejecución del ciclo **do**  $b \rightarrow C$  **od** “equivale” a la ejecución de

```

if  $b$  then  $C$ 
    if  $b$  then  $C$ 
        if  $b$  then  $C$ 
            if  $b$  then  $C$ 
                ...  $jj$  indefinidamente !!
            else skip
        else skip
    else skip
else skip
  
```

# Número de operaciones de un comando

## El ciclo **do**

$$\text{ops}(\mathbf{do} \ b \rightarrow \mathbf{C} \ \mathbf{od}) = \text{ops}(b) + \sum_{k=1}^n d_k$$

donde

- $n$  es el número de veces que se ejecuta el cuerpo del **do**
- $d_k$  es el número de operaciones que realiza la  $k$ -ésima ejecución del cuerpo  $C$  del ciclo y la subsiguiente evaluación de la condición o guarda  $b$

# Resumen

- Hemos analizado dos algoritmos de ordenación
  - ordenación por selección
  - ordenación por inserción
- la ordenación por selección hace siempre el mismo número de comparaciones, del orden de  $n^2$ .
- la ordenación por inserción también es del orden de  $n^2$  en el peor caso (arreglo ordenado al revés) y en el caso medio,
- la ordenación por inserción es del orden de  $n$  en el mejor caso (arreglo ordenado),
- la ordenación por inserción realiza del orden de  $n^2$  swaps (contra  $n$  de la ordenación por selección) en el peor caso.

## Problema del bibliotecario

- Con cualquiera de los dos algoritmos la respuesta es 4 días,
- salvo que se trate de una biblioteca ya ordenada o casi ordenada, en cuyo caso:
  - ordenación por inserción es del orden de  $n$ ,
  - y por ello la respuesta sería: 2 días.

## Repaso de la ordenación por selección

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
```

```
  var minp: nat
```

```
  for i:= 1 to n-1 do
```

```
    minp:= min_pos_from(a,i)
```

```
    swap(a,i,minp)
```

```
  od
```

```
end proc
```

```
fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
```

```
  minp:= i
```

```
  for j:= i+1 to n do if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
```

```
  od
```

```
end fun
```

Se lo puede abreviar omitiendo la función auxiliar.

## Forma abreviada de la ordenación por selección

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
  var minp: nat
  for i:= 1 to n-1 do
    minp:= i
    for j:= i+1 to n do
      if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
    od
    swap(a,i,minp)
  od
end proc
```

## Repaso de la ordenación por inserción

```
proc insertion_sort (in/out a: array[1..n] of T)
  for i:= 2 to n do
    insert(a,i)
  od
end proc
```

```
proc insert (in/out a: array[1..n] of T, in i: nat)
  j:= i
  do  $j > 1 \wedge a[j] < a[j - 1]$   $\rightarrow$  swap(a,j-1,j)
    j:= j-1
  od
end proc
```

También puede abreviarse omitiendo el procedimiento auxiliar.

## Forma abreviada de la ordenación por inserción

```
proc insertion_sort (in/out a: array[1..n] of T)
  for i:= 2 to n do
    j:= i
    do  $j > 1 \wedge a[j] < a[j - 1]$   $\rightarrow$  swap(a,j-1,j)
      j:= j-1
    od
  od
end proc
```

## Demo ([www.sorting-algorithms.com](http://www.sorting-algorithms.com))

- Ejecución de ordenación por selección
  - entrada aleatoria
  - casi ordenada
  - invertida
  - con repeticiones
- Ejecución de ordenación por inserción
  - entrada aleatoria
  - casi ordenada
  - invertida
  - con repeticiones
- Comparación y conclusiones.

Introducción

Motivación

Ordenación por selección

Número de operaciones de un comando (función ops)

Ordenación por inserción

**Resumen**

## Reflexión sobre paralelismo

¿Qué provecho podríamos sacar a los algoritmos que hemos visto si contáramos con varios o muchos procesadores capaces de cooperar entre ellos?