Algoritmos y Estructuras de Datos II

TADS: Implementaciones de pilas y colas

18 de abril de 2018

Clase de hoy

1. Implementación del TAD pila
   - Usando listas
   - Usando arreglos
   - Usando listas enlazadas
2. Implementación del TAD cola
   - Usando listas
   - Usando arreglos ingenuamente
   - Implementación eficiente de colas usando arreglos
   - Usando listas enlazadas ingenuamente
   - Usando listas enlazadas y dos punteros
   - Usando listas enlazadas circulares

Especificacion del TAD Pila

```
module TADPila where

data Pila e = Vacía
            | Apilar e (Pila e)

es_vacía :: Pila e → Bool
primero :: Pila e → e
desapilar :: Pila e -> Pila e
- - las dos últimas se aplican sólo a pila no Vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Apilar e p) = False
primero (Apilar e p) = e
desapilar (Apilar e p) = p
```

Interface

type stack = . . . {- no sabemos aún cómo se implementará -}

proc empty(**out** p:stack) {Post: p $\sim$ Vacía}

{Pre: p $\sim$ P $\wedge$ e $\sim$ E}
proc push(**in** e:elem,**in**/**out** p:stack)
{Post: p $\sim$ Apilar E P}

{Pre: p $\sim$ P $\wedge\neg$is_empty(p)}
fun top(p:stack) **ret** e:elem
{Post: e $\sim$ primero P}

Interface

{Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc pop(**in**/**out** p:stack)
{Post: p $\sim$ desapilar P}

fun is_empty(p:stack) **ret** b:**bool**
{Post: b $=$ (p $\sim$ Vacía)}

Implementación

Veremos tres implementaciones:

- Usando listas (si las listas son tipos concretos)
- Usando arreglos.
- Usando listas enlazadas.

Implementación de pilas usando tipo concreto lista

- **type** stack = [elem]
- **proc** empty(**out** p:stack)
  p:= [ ]
  end proc
  {Post: p $\sim$ Vacía}
- {Pre: p $\sim$ P }
  proc push(**in** e:elem,**in/out** p:stack)
  p:= (e $\triangleright$ p)
  end proc
  {Post: p $\sim$ Apilar e P}

Implementación de pilas usando tipo concreto lista

- {Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
  fun top(p:stack) **ret** e:elem
  e:= head(p)
  end fun
  {Post: e $\sim$ primero P}
- {Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
  proc pop(**in**/**out** p:stack)
  p:= tail(p)
  end proc
  {Post: p $\sim$ desapilar P}

Implementación de pilas usando tipo concreto lista

- **fun** is_empty(p:stack) **ret** b:**Bool**
  b:= (p = [ ])
  end fun
  {Post: b $=$ (p $\sim$ Vacía)}
- Todas las operaciones son $\mathcal{O}(1)$.

Implementación de pilas usando arreglos

Mostrar en
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/StackArray.html

Implementación de pilas usando arreglos

- **type** stack = **tuple**
  elems: **array**[1..N] **of** elem
  size: **nat**
  end
- **proc** empty(**out** p:stack)
  p.size:= 0
  end proc
  {Post: p $\sim$ Vacía}
- {Pre: p $\sim$ P $\wedge\neg$is_full(p)}
  proc push(**in** e:elem,**in**/**out** p:stack)
  p.size:= p.size + 1
  p.elems[p.size]:= e
  end proc
  {Post: p $\sim$ Apilar e P}

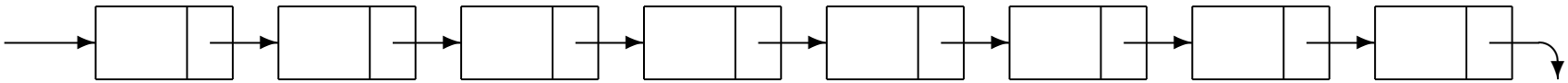
Implementación de pilas usando arreglos

- {Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
  fun top(p:stack) **ret** e:elem
  e:= p.elems[p.size]
  end fun
  {Post: e $\sim$ primero P}
- {Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
  proc pop(**in**/**out** p:stack)
  p.size:= p.size - 1
  end proc
  {Post: p $\sim$ desapilar P}

Implementación de pilas usando arreglos

- **fun** is_empty(p:stack) **ret** b:**Bool**
  b:= (p.size = 0)
  end fun
  {Post: b $=$ (p $\sim$ Vacía)}
- **fun** is_full(p:stack) **ret** b:**Bool**
  b:= (p.size = N)
  end fun
- Todas las operaciones son $\mathcal{O}(1)$.

Listas enlazadas

- Por **listas enlazadas** se entiende una manera de implementar listas utilizando tuplas y punteros.
- Hay diferentes clases de listas, la más simple se representa gráficamente así
- 
- cada **nodo** se dibuja como una tupla
- y la flecha que enlaza un nodo con el siguiente nace desde un campo de esa tupla.
- Los nodos son tuplas y las flechas punteros.

Declaración

- Los nodos son tuplas y las flechas punteros.
- **type** node = **tuple**
  value: elem
  next: **pointer to** node
  end

  type list = **pointer to** node

Observaciones

- Una lista es un puntero a un primer nodo,
- que a su vez contiene un puntero al segundo,
- éste al tercero, y así siguiendo hasta el último,
- cuyo puntero es **null**
- significando que la lista termina allí.
- Para acceder al i-ésimo elemento de la lista, debo recorrerla desde el comienzo siguiendo el recorrido señalado por los punteros.
- Esto implica que el acceso a ese elemento no es constante, sino lineal.
- A pesar de ello ofrecen una manera de implementar convenientemente algunos TADs.

Implementación de pilas usando listas enlazadas

Mostrar en
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/StackLL.html

Implementación del TAD pila con listas enlazadas

```
type node = tuple
                value: elem
                next: pointer to node
            end
type stack = pointer to node
```

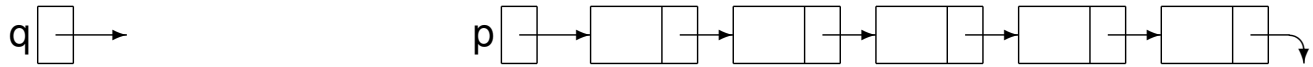
Pila vacía

- El procedimiento empty inicializa p como la pila vacía.
- La pila vacía se implementa con la lista enlazada vacía
- que consiste de la lista que no tiene ningún nodo,
- el puntero al primer nodo de la lista no tiene a quién apuntar.
- Su valor se establece en **null**.

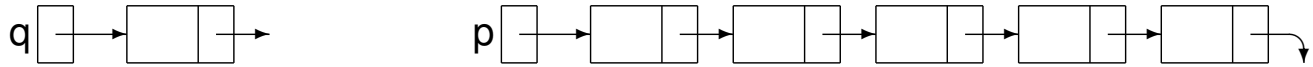
proc empty(**out** p:stack)
    p:= **null**
end proc
{Post: p $\sim$ Vacía}

Apilar

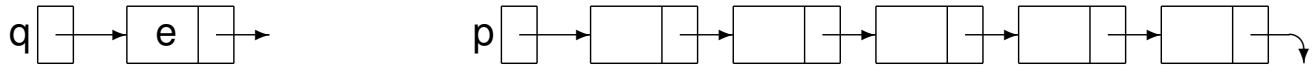
{Pre: p ∼ P ∧ e ∼ E}
proc push(**in** e:elem,**in**/**out** p:stack)
var q: **pointer to** node



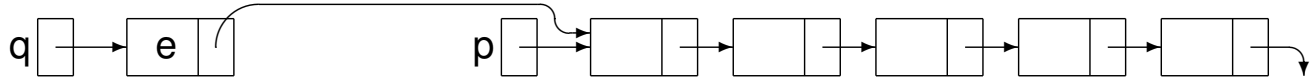
alloc(q)



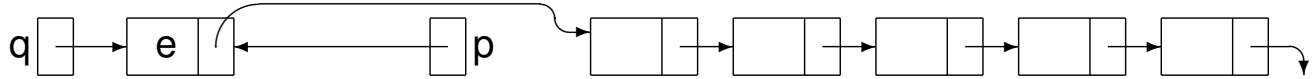
q→value:= e



q→next:= p



p:= q



end proc
{Post: p ∼ Apilar E P}

Apilar
Explicación

- El procedimiento push debe alojar un nuevo elemento en la pila.
- Para ello crea un nuevo nodo (alloc(q)),
- aloja en ese nodo el elemento a agregar a la pila (q$\rightarrow$value:= e),
- enlaza ese nuevo nodo al resto de la pila (q$\rightarrow$next:= p)
- y finalmente indica que la pila ahora empieza a partir de ese nuevo nodo que se agregó (p:= q).

Apilar
En limpio

{Pre: p $\sim$ P $\wedge$ e $\sim$ E}
proc push(**in** e:elem,**in**/**out** p:stack)
    var q: **pointer to** node
    alloc(q)
    q$\rightarrow$value:= e
    q$\rightarrow$next:= p
    p:= q
end proc
{Post: p $\sim$ Apilar E P}

Importancia de la representación gráfica

- Las representaciones gráficas que acompañan al pseudocódigo son de ayuda.
- Su valor es relativo.
- Sólo sirven para entender lo que está ocurriendo de manera intuitiva.
- Hacer un tratamiento formal está fuera de los objetivos de este curso.
- Deben extremarse los cuidados para no incurrir en errores de programación que son muy habituales en el contexto de la programación con punteros.
- Por ejemplo, ¿es correcto el procedimiento push cuando p es la pila vacía?

Apilar a una pila vacía

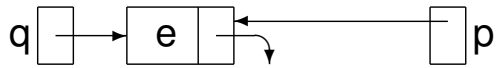
{Pre: p $\sim$ P $\wedge$ e $\sim$ E}
proc push(**in** e:elem,**in**/**out** p:stack)
    var q: **pointer to** node

alloc(q)

q$\rightarrow$value:= e

q$\rightarrow$next:= p

p:= q



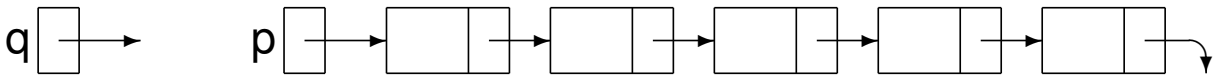
end proc
{Post: p $\sim$ Apilar E P}

Primero de una pila

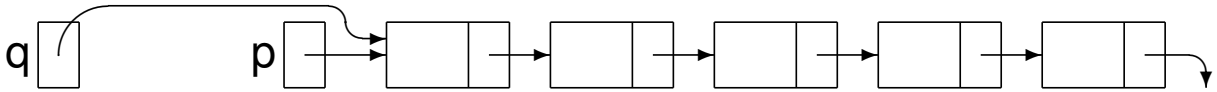
- La función top no tiene más que devolver el elemento que se encuentra en el nodo apuntado por p.
- {Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
  fun top(p:stack) **ret** e:elem
  e:= p$\rightarrow$value
  end fun
  {Post: e $\sim$ primero P}

Desapilar

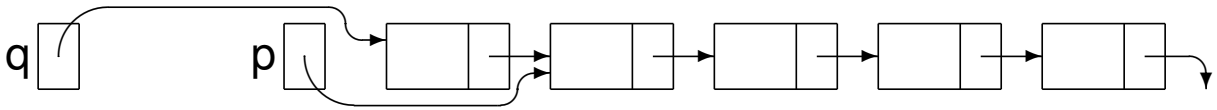
{Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc pop(**in**/**out** p:stack)
var q: **pointer to** node



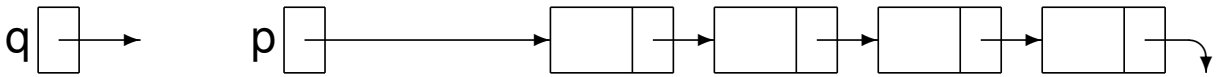
q:= p



p:= p$\rightarrow$next



free(q)



end proc
{Post: p $\sim$ desapilar P}

Desapilar
Explicación

- El procedimiento pop debe liberar el primer nodo de la lista
- y modificar p de modo que apunte al nodo siguiente.
- Observar que el valor que debe adoptar p se encuentra en el primer nodo (campo next).
- Por ello, antes de liberarlo es necesario guardar ese valor.
- Si lo asignamos a p, p pierde su viejo valor ¿cómo vamos a liberar luego el primer nodo?
- Solución: recordamos en q el viejo valor de p (q:= p),
- hacer que p apunte al segundo nodo (p:= p$\rightarrow$next)
- y liberar el primer nodo (free(q)).
- Al finalizar, p apunta al primer nodo de la nueva pila.

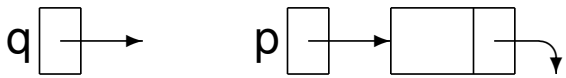
Desapilar
En limpio

{Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc pop(**in**/**out** p:stack)
    var q: **pointer to** node
    q:= p
    p:= p$\rightarrow$next
    free(q)
end proc
{Post: p $\sim$ desapilar P}

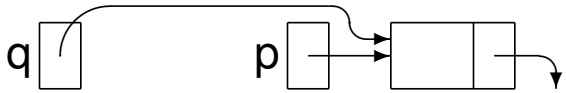
P no puede ser vacía.
Pero ¿qué pasa si tiene un solo elemento?

Desapilar de una pila unitaria

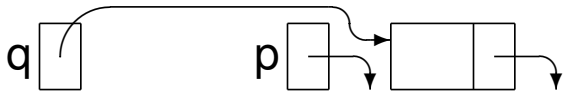
{Pre: p $\sim$ P $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc pop(**in**/**out** p:stack)
var q: **pointer to** node



q:= p



p:= p$\rightarrow$next



free(q)

end proc
{Post: p $\sim$ desapilar P}

Examinar si es vacía

- La función is_empty debe comprobar que la pila recibida esté vacía, que se representa por el puntero **null**.
- {Pre: p $\sim$ P}
  fun is_empty(p:stack) **ret** b:**Bool**
  b:= (p = **null**)
  end fun
  {Post: b $\sim$ es_vacía P}

Destrucción de la pila

- Como el manejo de la memoria es explícito, es conveniente agregar una operación para destruir una pila.
- Esta operación recorre la lista enlazada liberando todos los nodos que conforman la pila.
- Puede definirse utilizando las operaciones proporcionadas por la implementación del TAD pila.
- **proc** destroy(**in**/**out** p:stack)
  while ¬ is_empty(p) **do** pop(p) **od**
  end proc

Conclusiones

- Todas las operaciones (salvo destroy) son constantes.
- Destroy es lineal.
- stack y **pointer to** node son sinónimos,
- pero las hemos usado diferente:
  - stack, cuando la variable representa una pila,
  - **pointer to** node cuando se trata de un puntero que circunstancialmente aloja la dirección de un nodo.

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q
decolar (Encolar q e) | es_vacía q = Vacía
                      | otherwise = Encolar (decolar q) e
```

Interface

type queue = . . . {- no sabemos aún cómo se implementará -}

proc empty(**out** q:queue) {Post: q $\sim$ Vacía}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E}
proc enqueue(**in**/**out** q:queue,**in** e:elem)
{Post: q $\sim$ Encolar Q E}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge\neg$is_empty(q)}
fun first(q:queue) **ret** e:elem
{Post: e $\sim$ primero Q}

Interface

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
proc dequeue(**in**/**out** q:queue)
{Post: q $\sim$ decolar Q}

fun is_empty(q:queue) **ret** b:**bool**
{Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}

Implementación

Veremos implementaciones:

- Usando listas (si las listas son tipos concretos)
- Usando arreglos.
- Usando listas enlazadas.

Implementación de colas usando tipo concreto lista

- **type** queue = [elem]
- **proc** empty(**out** q:queue)
  q:= [ ]
  end proc
  {Post: q $\sim$ Vacía}
- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E}
  proc enqueue(**in**/**out** q:queue; **in** e:elem)
  q:= (q $\triangleleft$ e)
  end proc
  {Post: q $\sim$ Encolar Q E}

Implementación de colas usando tipo concreto lista

- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  fun first(q:queue) **ret** e:elem
  e:= head(q)
  end fun
  {Post: e $\sim$ primero Q}
- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  proc dequeue(**in**/**out** q:queue)
  q:= tail(q)
  end proc
  {Post: q $\sim$ decolar Q}

Implementación de colas usando tipo concreto lista

- **fun** is_empty(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q = [ ])
  end fun
  {Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}
- Todas las operaciones son $\mathcal{O}(1)$, salvo enqueue que es $\mathcal{O}(n)$ (lineal) en la longitud de la cola. Pero hay implementaciones del tipo concreto lista que la tornan constante.

Implementación de colas usando arreglos

- **type** queue = **tuple**
  elems: **array**[1..N] **of** elem
  size: **nat**
  end
- **proc** empty(**out** q:queue)
  q.size:= 0
  end proc
  {Post: q $\sim$ Vacía}
- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E $\wedge\neg$is_full(q)}
  proc enqueue(**in**/**out** q:queue, **in** e:elem)
  q.size:= q.size + 1
  q.elems[q.size]:= e
  end proc
  {Post: q $\sim$ Encolar Q E}

Implementación de colas usando arreglos

- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  fun first(q:queue) **ret** e:elem
  e:= q.elems[1]
  end fun
  {Post: e $\sim$ primero Q}
- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  proc dequeue(**in**/**out** q:queue)
  q.size:= q.size - 1
  for i:= 1 **to** q.size **do**
  q.elems[i]:= q.elems[i+1]
  od
  end proc
  {Post: q $\sim$ decolar Q}

Implementación de colas usando arreglos

- **fun** is_empty(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = 0)
  end fun
  {Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}
- **fun** is_full(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = N)
  end fun
- Todas las operaciones son $\mathcal{O}(1)$, salvo dequeue que es lineal.

Implementación de colas usando arreglos

Mostrar en
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/QueueArray.html

Aunque la que hacemos acá no es exactamente la misma.

Implementación eficiente de colas usando arreglos

- **type** queue = **tuple**
  elems: **array**[0..N-1] **of** elem
  fst: **nat**
  size: **nat**
  end
- **proc** empty(**out** q:queue)
  q.fst:= 0
  q.size:= 0
  end proc
- **proc** enqueue(**in**/**out** q:queue, **in** e:elem)
  q.elems[(q.fst + q.size) mod N]:= e
  q.size:= q.size + 1
  end proc

Implementación eficiente de colas usando arreglos

- **fun** first(q:queue) **ret** e:elem
  e:= q.elems[q.fst]
  end fun
- **proc** dequeue(**in**/**out** q:queue)
  q.size:= q.size - 1
  q.fst:= (q.fst + 1) mod N
  end proc
- **fun** is_empty(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = 0)
  end fun
- **fun** is_full(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = N)
  end fun

Implementación del TAD cola con listas enlazadas

Implementación ingenua

- Reusar lo más posible la del TAD pila,
- **type** queue = **pointer to** node
- donde node se define como para el TAD pila,
- empty, is_empty y destroy como para el TAD pila,
- first como top,
- y dequeue como pop.

Implementación del TAD cola con listas enlazadas

Implementación ingenua

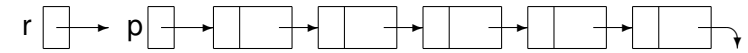
Sólo cambia la implementación de enqueue:

```
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q,r: pointer to node
    alloc(q)                                   {se reserva espacio para el nuevo nodo}
    q→value:= e                                {se aloja allí el elemento e}
    q→next:= null    {el nuevo nodo (⋆q) está listo, va a ser el último de la cola}
    r:= p                    {r realiza la recorrida, la búsqueda de su último nodo}
    while r→next ≠ null do                     {mientras ⋆r no sea el último nodo}
        r:= r→next                             {que r pase a señalar el nodo siguiente}
    od                                         {ahora ⋆r es el último nodo}
    r→next:= q               {que el siguiente del que era último sea ahora ⋆q}
end proc
{Post: p ∼ Encolar Q E}
```

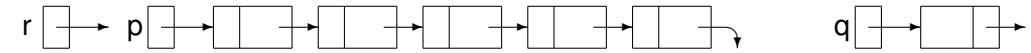
Implementación del TAD cola con listas enlazadas

Implementación ingenua

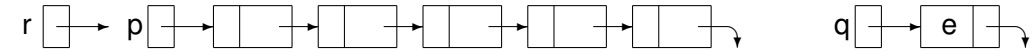
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q,r: **pointer to** node



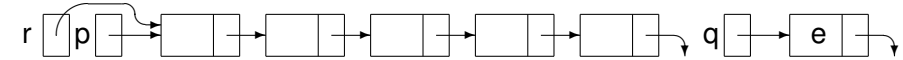
alloc(q)



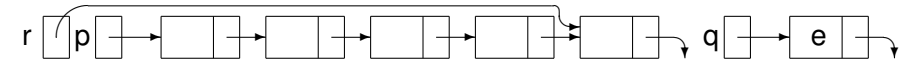
q→value:= e
q→next:= **null**



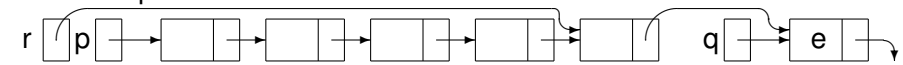
r:= p



while r→next ≠ **null do** {mientras ⋆r no sea el último nodo}
r:= r→next {que r pase a señalar el nodo siguiente}
od



r→next:= q



end proc
{Post: p ∼ Encolar Q E}

Encolar (implementación ingenua)
En limpio

```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q,r: pointer to node
    alloc(q)
    q→value:= e
    q→next:= null
    r:= p
    while r→next ≠ null do
        r:= r→next
    od
    r→next:= q
end proc
```

¿Anda bien si p es la cola vacía?

Implementación del TAD cola con listas enlazadas

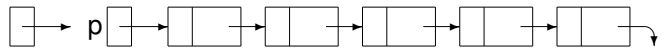
Implementación ingenua (corregida)

```
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q,r: pointer to node
    alloc(q)                                   {se reserva espacio para el nuevo nodo}
    q→value:= e                                {se aloja allí el elemento e}
    q→next:= null                              {el nuevo nodo (⋆q) va a ser el último de la cola}
                                               {el nodo ⋆q está listo, debe ir al final de la cola}
    if p = null → p:= q                        {si la cola es vacía con esto alcanza}
      p ≠ null →                               {si no es vacía, se inicia la búsqueda de su último nodo}
                r:= p                          {r realiza la búsqueda a partir del primer nodo}
                while r→next ≠ null do         {mientras ⋆r no sea el último nodo}
                    r:= r→next                 {que r pase a señalar el nodo siguiente}
                od                             {ahora ⋆r es el último nodo}
                r→next:= q                     {que el siguiente del que era último sea ahora ⋆q}
    fi
end proc
{Post: p ∼ Encolar Q E}
```

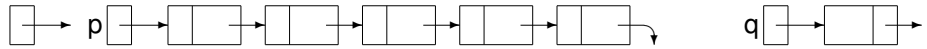
Implementación del TAD cola con listas enlazadas

Implementación ingenua (corregida)

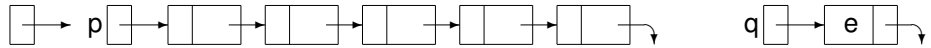
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q,r: **pointer to** node



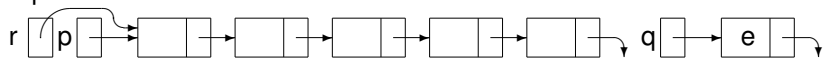
alloc(q)



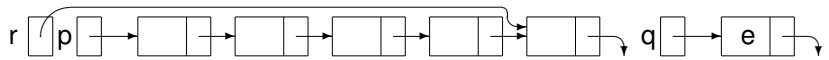
q→value:= e
q→next:= **null**



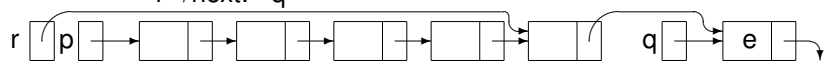
if p = **null** → p:= q {no engañarse con el dibujo, la cola puede ser vacía}
p ≠ **null** → r:= p



while r→next ≠ **null do** {mientras ⋆r no sea el último nodo}
r:= r→next {que r pase a señalar el nodo siguiente}
od



r→next:= q



fi
end proc
{Post: p ∼ Encolar Q E}

Encolar (implementación ingenua, corregida)

En limpio

```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q,r: pointer to node
    alloc(q)
    q→value:= e
    q→next:= null
    if p = null → p:= q
       p ≠ null → r:= p
                  while r→next ≠ null do
                      r:= r→next
                  od
                  r→next:= q
    fi
end proc
```

Conclusiones

- Todas las operaciones son constantes,
- salvo enqueue que es lineal,
- ya que debe recorrer toda la lista hasta encontrar el último nodo.
- Hay al menos dos soluciones a este problema:
  - Mantener dos punteros: uno al primero y otro al último,
  - o utilizar listas enlazadas **circulares**.

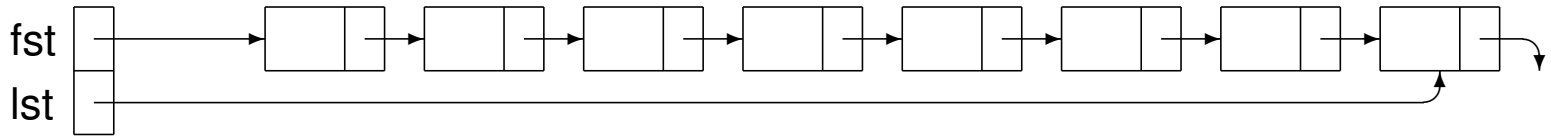
Implementación de colas usando listas enlazadas (con dos punteros)

Mostrar en
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/QueueLL.html

Implementación del TAD cola con listas enlazadas y dos punteros

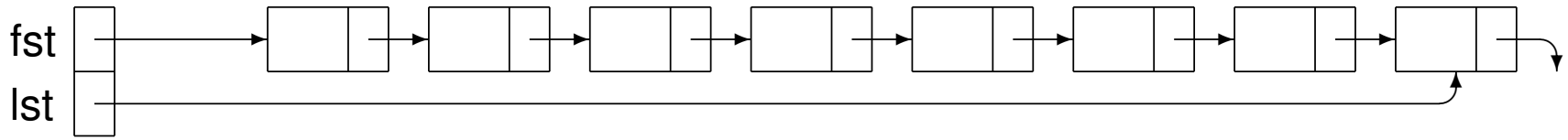
```
type node = tuple
              value: elem
              next: pointer to node
            end
type queue = tuple
               fst: pointer to node
               lst: pointer to node
             end
```

Gráficamente, puede representarse de la siguiente manera



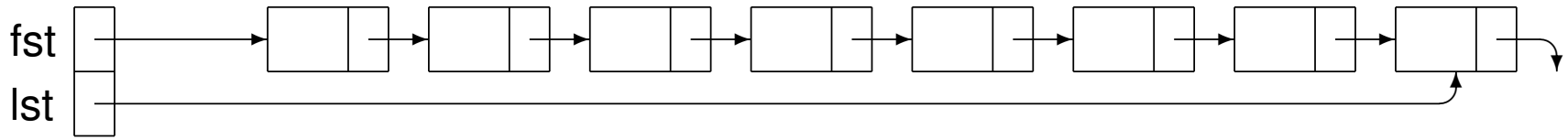
Cola vacía

proc empty(**out** p:queue)
    p.fst:= **null**
    p.lst:= **null**
end proc
{Post: p $\sim$ Vacía}



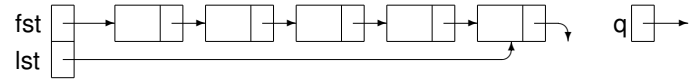
Primer elemento

{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
fun first(p:queue) **ret** e:elem
    e:= p.fst$\rightarrow$value
end fun
{Post: e $\sim$ primero Q}

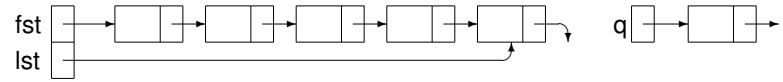


Encolar

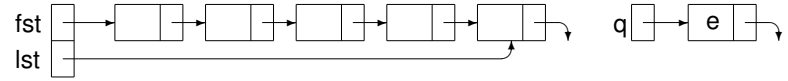
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q: **pointer to** node



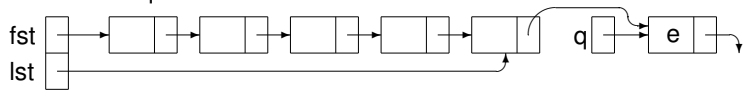
alloc(q)



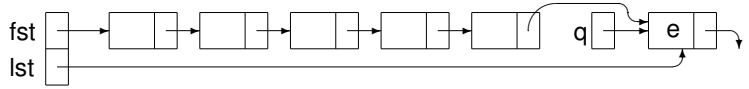
q→value:= e
q→next:= **null**



if p.lst = **null** → p.fst:= q {caso enqueue en cola vacía}
p.lst:= q
p.lst ≠ **null** → p.lst→next:= q



p.lst:= q



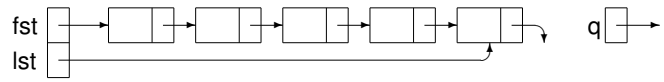
fi
end proc
{Post: p ∼ Encolar Q E}

Encolar
En limpio

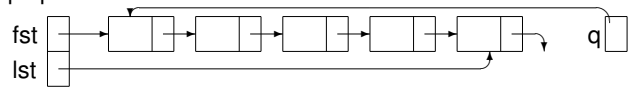
```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q: pointer to node
    alloc(q)
    q→value:= e
    q→next:= null
    if p.lst = null → p.fst:= q
                      p.lst:= q
      p.lst ≠ null → p.lst→next:= q
                      p.lst:= q
    fi
end proc
```

Decolar

{Pre: p ∼ Q ∧¬is_empty(p)}
proc dequeue(**in**/**out** p:queue)
var q: **pointer to** node

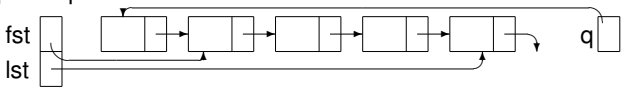


q:= p.fst



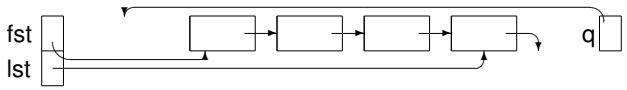
if p.fst = p.lst →
p.fst:= **null** {caso cola con un solo elemento}
p.lst:= **null**

p.fst ≠ p.lst → p.fst:= p.fst->next



fi
free(q)

end proc
{Post: p ∼ decolar Q}



Decolar
En limpio

```
proc dequeue(in/out p:queue)
    var q: pointer to node
    q:= p.fst
    if p.fst = p.lst → p.fst:= null
                       p.lst:= null
      p.fst ≠ p.lst → p.fst:= p.fst->next
    fi
    free(q)
end proc
```

Examinar si es vacía

{Pre: p $\sim$ Q}
fun is_empty(p:queue) **ret** b:**Bool**
    b:= (p.fst = **null**)
end fun
{Post: b $\sim$ es_vacía Q}

Destroy

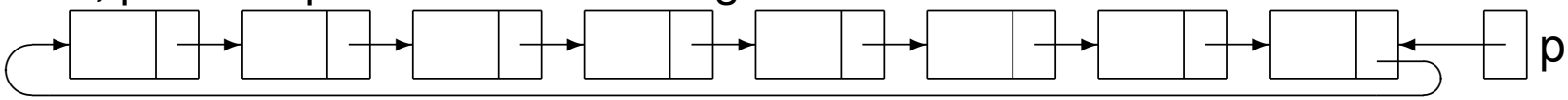
proc destroy(**in**/**out** p:queue)
    while ¬ is_empty(p) **do** dequeue(p) **od**
end proc

Todas las operaciones son constantes, salvo el destroy que es lineal.

Implementación del TAD cola con listas enlazadas circulares

```
type node = tuple
              value: elem
              next: pointer to node
            end
type queue = pointer to node
```

Gráficamente, puede representarse de la siguiente manera



Explicación

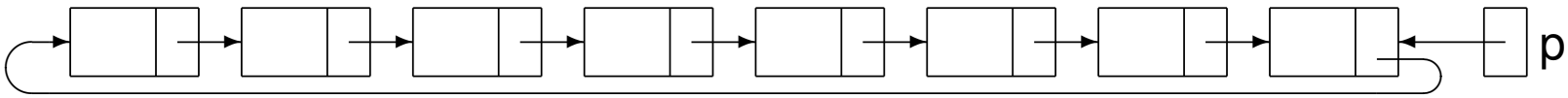
- La lista es circular,
- es decir que además de los punteros que ya teníamos en implementaciones anteriores,
- el último nodo tiene un puntero al primero,
- alcanza con saber dónde se encuentra el último nodo para saber también dónde está el primero.

Cola vacía

proc empty(**out** p:queue)
    p:= **null**
end proc
{Post: p $\sim$ vacia}

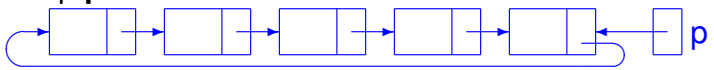
Primer elemento

{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
fun first(p:queue) **ret** e:elem
    e:= p$\rightarrow$next$\rightarrow$value
end fun
{Post: e $\sim$ primero Q}

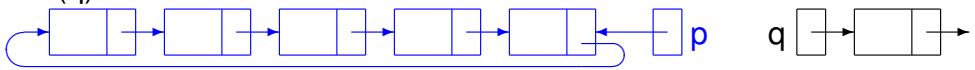


Encolar: caso cola no vacía (en azul, la cola)

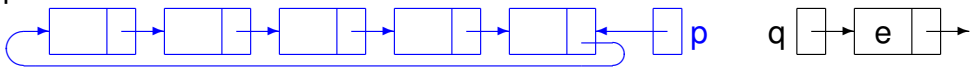
{Pre: p $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q: **pointer to** node



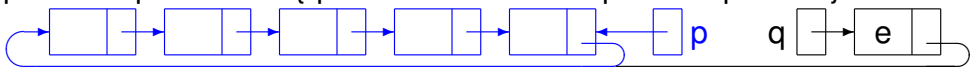
alloc(q)



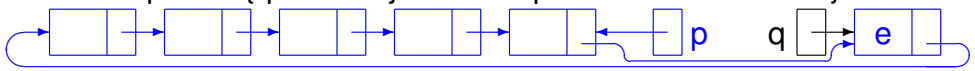
q$\rightarrow$value:= e



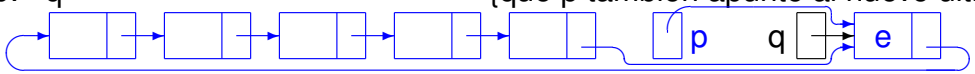
if p = **null** $\rightarrow$ q$\rightarrow$next:= q {caso enqueue en cola vacía}
p $\neq$ **null** $\rightarrow$ q$\rightarrow$next:= p$\rightarrow$next {que el nuevo último apunte al primero}



p$\rightarrow$next:= q {que el viejo último apunte al nuevo último}



fi
p:= q {que p también apunte al nuevo último}

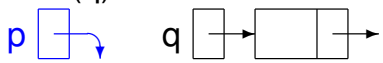


end proc
{Post: p $\sim$ Encolar Q E}

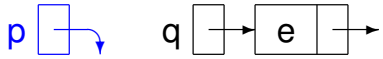
Encolar: caso cola vacía (en azul, la cola)

{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q: **pointer to** node

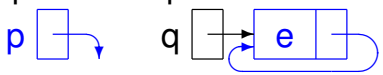
alloc(q)



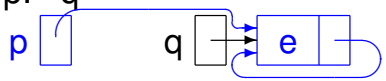
q→value:= e



if p = **null** → q→next:= q



p ≠ **null** → q→next:= p→next {caso enqueue en cola no vacía}
p→next:= q
fi
p:= q



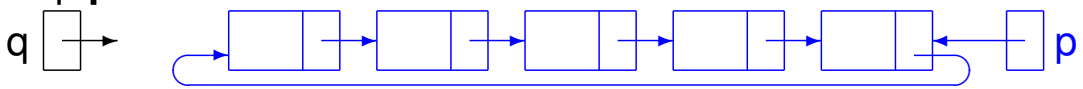
end proc
{Post: p ∼ Encolar Q E}

Encolar
En limpio

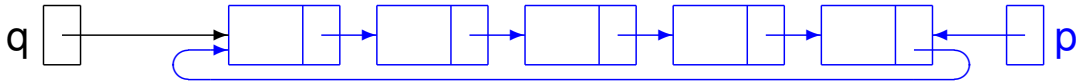
```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q: pointer to node
    alloc(q)
    q→value:= e
    if p = null → q→next:= q
       p ≠ null → q→next:= p→next
                  p→next:= q
    fi
    p:= q
end proc
```

Decolar: caso cola con más de un elemento

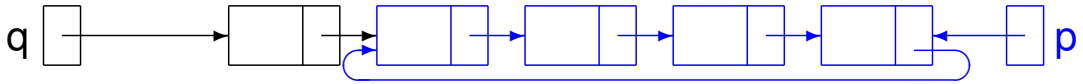
{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc dequeue(**in**/**out** p:queue)
var q: **pointer to** node



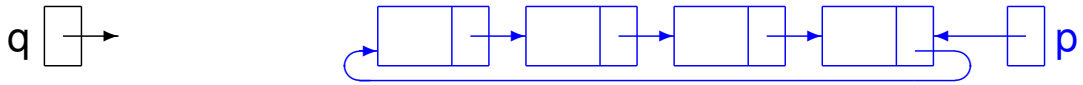
q:= p$\rightarrow$next



if p = q $\rightarrow$ p:= **null** {caso cola con un solo elemento}
p $\neq$ q $\rightarrow$ p$\rightarrow$next:= q$\rightarrow$next {caso cola con más de un elemento}
fi



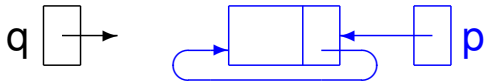
free(q)



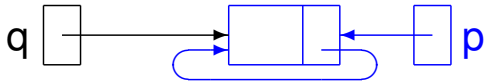
end proc
{Post: p $\sim$ decolar Q}

Decolar: caso cola con un solo elemento

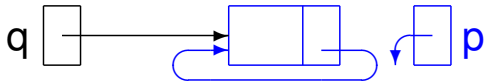
{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc dequeue(**in**/**out** p:queue)
var q: **pointer to** node



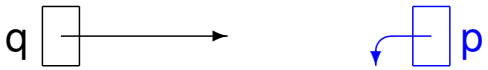
q:= p$\rightarrow$next



if p = q $\rightarrow$ p:= **null** {caso cola con un solo elemento}
p $\neq$ q $\rightarrow$ p$\rightarrow$next:= q$\rightarrow$next {caso cola con más de un elemento}
fi



free(q)



end proc
{Post: p $\sim$ decolar Q}

Examinar si es vacía

{Pre: p $\sim$ Q}
fun is_empty(p:queue) **ret** b:**Bool**
    b:= (p = **null**)
end fun
{Post: b $\sim$ es_vacía Q}

Destroy

```
proc destroy(in/out p:queue)
        while ¬ is_empty(p) do dequeue(p) od
end proc
```

Todas las operaciones son constantes, salvo el destroy que es lineal.