Algoritmos y Estructuras de Datos II

TAD Cola

10 de abril de 2019

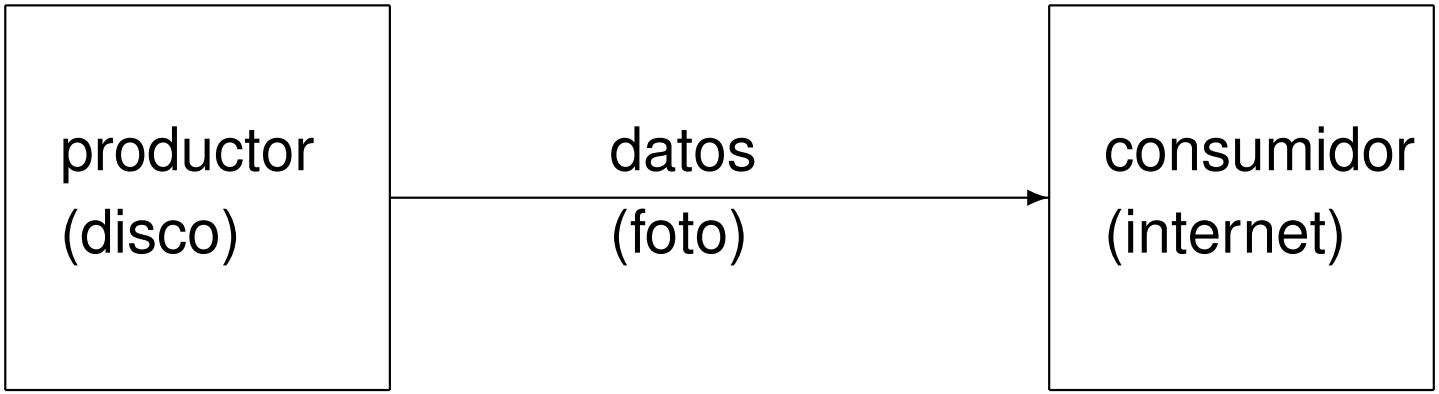
Clase de hoy

1. Buffer de datos entre productor y consumidor
   - Buffer de datos
   - TAD cola
   - Resolviendo el problema
2. Cola de prioridades
   - Especificación del TAD PCola
   - Ordenando con una cola de prioridades

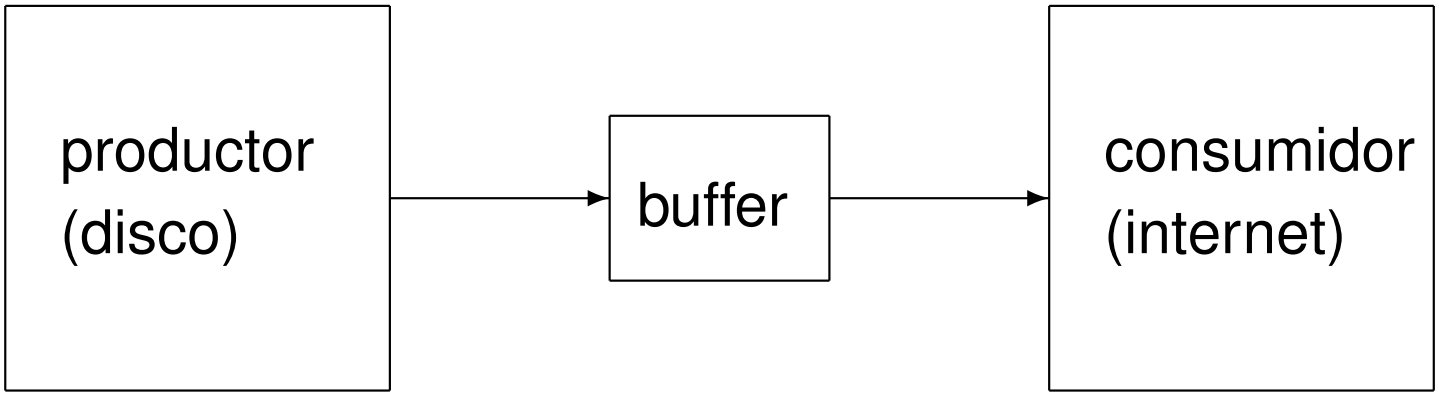
Buffer de datos

- Imaginemos cualquier situación en que ciertos datos deben transferirse desde una unidad a otra,
- por ejemplo, datos (¿una foto?) que se quiere subir a algún sitio de internet desde un disco,
- un agente suministra o produce datos (el disco) y otro que los utiliza o consume (el sitio de internet),
- esta relación se llama **productor-consumidor**
- para amortiguar el impacto por la diferencia de velocidades, se puede introducir un buffer entre ellos,
- un buffer recibe y almacena los datos a medida que se producen y los emite en el mismo orden, a medida que son solicitados.

Gráficamente



se interpone un buffer



Interés

- El programa que realiza la subida de datos puede liberar más rápidamente la lectora del disco.
- El proceso que realizaba la lectura se desocupa antes.
- El productor se ocupa de lo suyo.
- El consumidor se ocupa de lo suyo.
- El buffer se ocupa de la interacción entre ambos.

Uso del buffer

- La interposición del buffer no debe afectar el orden en que los datos llegan al consumidor.
- El propósito es sólo permitir que el productor y el consumidor puedan funcionar cada uno a su velocidad sin necesidad de sincronización.
- El buffer inicialmente está **vacío**.
- A medida que se van **agregando** datos suministrados por el productor, los mismos van siendo alojados en el buffer.
- Siempre que sea necesario enviar un dato al consumidor, habrá que comprobar que el buffer no se encuentre **vacío** en cuyo caso se enviará el **primero** que llegó al buffer y se lo **eliminará** del mismo.

Cola

- Es **algo**, con lo que se pueda
  - inicializar **vacía**,
  - agregar o **encolar** un dato,
  - comprobar si quedan datos en el buffer, es decir, si **es** o no **vacía**
  - examinar el **primer** dato (el más viejo de los que se encuentran en el buffer),
  - quitar o **decolar** un dato.
- El primer dato que se agregó, es el primero que debe enviarse y quitarse de la **cola**.
- Por eso se llama **cola** o también **cola FIFO** (First-In, First-Out).

Tad cola

- La cola se define por lo que sabemos: sus cinco operaciones
  - inicializar en **vacía**
  - **encolar** un nuevo dato (o elemento)
  - comprobar si **está vacía**
  - examinar el **primer** elemento (si no está vacía)
  - **decolarlo** (si no está vacía).
- Las operaciones **vacía** y **encolar** son capaces de generar todas las colas posibles,
- **está vacía** y **primero**, en cambio, solamente examinan la cola,
- **decolarla** no genera más valores que los obtenibles por **vacía** y **apilar**.

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) = ?
decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = ?
                      | otherwise = ?

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = ?

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = ?
                      | otherwise = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = Vacía
                      | otherwise = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = Vacía
                      | otherwise = Encolar (decolar q) e
```

Explicación

Los valores posibles de una cola están expresados por

- ningún elemento: Vacía
- un elemento: Encolar Vacía A, Encolar Vacía B, Encolar Vacía C
- dos elementos: Encolar (Encolar Vacía A) B, Encolar(Encolar Vacía A), A . . .
- tres elementos: Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A . . .
- etcétera

Mostrar en Haskell.

Ejemplo

- Gracias a las ecuaciones, podemos comprobar que
- primero (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = ?
- decolar (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = ?

Ejemplo

- Gracias a las ecuaciones, podemos comprobar que
- primero (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = B
- decolar (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = Encolar (Encolar (Encolar Vacía A) A) C

En efecto

$$
\begin{aligned}
& \text{primero (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C)} \\
= \; & \text{primero (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A)} \\
= \; & \text{primero (Encolar (Encolar Vacía B) A)} \\
= \; & \text{primero (Encolar Vacía B)} \\
= \; & \text{B}
\end{aligned}
$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
& \text{decolar (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C)} \\
= \; & \text{Encolar (decolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A)) C} \\
= \; & \text{Encolar (Encolar (decolar (Encolar (Encolar Vacía B) A)) A) C} \\
= \; & \text{Encolar (Encolar (Encolar (decolar (Encolar Vacía B)) A) A) C} \\
= \; & \text{Encolar (Encolar (Encolar Vacía A) A) C}
\end{aligned}
$$

Sobre las ecuaciones que definen una operación

- Además de cubrir todos los casos posibles (como señalamos en los TADs Contador y Pila), ahora es necesario observar que tanto primero como decolar **ocurren en el lado derecho** de las ecuaciones.
- Si en cada una de esas ocurrencias:
  - el argumento al que se aplica satisface la precondición de la operación, y
  - es sintácticamente más pequeño que el argumento correspondiente en el lado izquierdo de la ecuación.
- entonces, podemos estar seguros de que es una definición sintácticamente correcta.

Por ejemplo

- Por ejemplo,
- primero se aplica al argumento q, en el lado derecho de la ecuación.
- comprobamos que q satisface la precondición de primero, pues “otherwise” en este caso significa que q no es vacía.
- comprobamos que q es sintácticamente más pequeño que Encolar q e, que es el argumento correspondiente en el lado izquierdo de la ecuación.
- como además podemos comprobar que todos los casos están cubiertos por las ecuaciones,
- entonces primero es una definición sintácticamente correcta.

Especificación e implementación

type queue = . . . {- no sabemos aún cómo se implementará -}

proc empty(**out** q:queue) {Post: q $\sim$ Vacía}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E}
proc enqueue(**in**/**out** q:queue,**in** e:elem)
{Post: q $\sim$ Encolar Q E}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge\neg$is_empty(q)}
fun first(q:queue) **ret** e:elem
{Post: e $\sim$ primero Q}

Especificación e implementación

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
proc dequeue(**in**/**out** q:queue)
{Post: q $\sim$ decolar Q}

fun is_empty(q:queue) **ret** b:**bool**
{Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}

Algoritmo de transferencia de datos con buffer

```
proc buffer ()
    var d: data
    var q: queue of data
    empty(q)
    produce:= false
    demand:= false
    do forever
        if produce → receive d from producer
                     enqueue(q,d)
                     produce:= false
          demand ∧¬ is_empty(q) → d:= first(q)
                                  send d to consumer
                                  demand:= false
                                  dequeue(q)
        fi
    od
end proc
```

- Hemos asumido que hay dos variables booleanas compartidas:
- produce:
  - variable compartida entre el programa buffer y el productor,
  - el productor le asigna verdadero cuando produce un dato,
  - el programa buffer accede mediante el comando receive.
- demand:
  - variable compartida entre el programa buffer y el consumidor,
  - el consumidor le asigna verdadero cuando espera un dato,
  - el programa buffer se lo envía mediante el comando send.

Utilización

- El TAD cola tiene numerosas aplicaciones.
- Siempre que se quieran atender pedidos, datos, etc. en el orden de llegada.
- Una aplicación interesante es el algoritmo de ordenación llamado Radix Sort.

Cola de prioridades

- Volvamos al problema de ordenación: tengo ciertos elementos que quiero ordenar.
- Se nos ocurre la siguiente solución:
  - si tuviera **algo** inicialmente **vacío**, donde pueda **ir almacenando** los elementos uno a uno.
  - si tuviera una operación que permitiera **ver** cuál es el mayor de todos los almacenados, en caso de que **haya alguno almacenado**.
  - si tuviera una operación para **eliminar** el mayor de todos los almacenados, en caso de que **haya alguno almacenado**.
- Entonces podría ordenar en 2 etapas:
  - comenzando con el **vacío**, **almaceno** uno a uno todos los elementos a ordenar
  - luego **extraigo** uno a uno desde el **mayor** hasta el menor de todos, colocandolo en su lugar

Cola de prioridades

- Es similar a la cola,
- pero el orden de llegada no importa,
- los elementos son valores,
- los elementos son atendidos según su valor exclusivamente,
- primero al de mayor valor y luego los de menor valor.
- Por esa razón a ese valor se le puede llamar prioridad: se atiende a cada elemento según su prioridad.

Asumimos

- Asumimos que existe un orden total entre los elementos de la cola,
- que un elemento sea mayor que otro significa que tiene mayor prioridad,
- las operaciones son las mismas que la de cola:
  - **vacía**
  - **encolar**
  - **es_vacía**
  - **primero**
  - **decolar**
- sólo que **primero** devuelve el mayor valor,
- y **decolar** quita el de mayor valor.

Especificación del TAD Pcola

```
module TADPCola where

data Ord e ⇒ PCola e = Vacía
                     | Encolar (PCola e) e

es_vacía :: Ord e ⇒ PCola e → Bool
primero :: Ord e ⇒ PCola e → e
decolar :: Ord e ⇒ PCola e -> PCola e
- - las dos últimas se aplican sólo a pcola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) = ?
decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD Pcola

```
module TADPCola where

...

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = ?

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD Pcola

```
module TADPCola where

...

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | e >= primero q = ?
                      | otherwise = ?

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD Pcola

```
module TADPCola where

...

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | e >= primero q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD Pcola

module TADPCola **where**

...

```
primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | e >= primero q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = ?
                      | e >= primero q = ?
                      | otherwise = ?
```

Especificación del TAD Pcola

```
module TADPCola where

...

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | e >= primero q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = Vacía
                      | e >= primero q = q
                      | otherwise = Encolar (decolar q) e
```

Observaciones

- Es posible convencerse de que primero devuelve siempre el máximo de la pcola:
  - en la primera ecuación devuelve el único (por lo tanto, el máximo) de la pcola,
  - en la segunda ecuación devuelve e, que por hipótesis inductiva es mayor o igual al máximo del resto de los elementos de la pcola,
  - en la tercera ecuación devuelve el que por hipótesis inductiva es el máximo de los elementos del resto de la pcola, que por estar en el "otherwise" es también mayor que e.
- De la misma manera, es posible convencerse de que decolar elimina el primero (el máximo) de la pcola (en caso de estar repetido, elimina una sola ocurrencia del mismo).

Ecuaciones entre constructores

- Hemos dicho que en el TAD PCola el orden de llegada de los elementos a la pcola no tiene ninguna importancia.
- Sin embargo no hay ninguna propiedad en nuestra especificación que nos permita afirmar, por ejemplo, que
  - Encolar (Encolar (Encolar Vacía 2) 3) 4
  - Encolar (Encolar (Encolar Vacía 3) 4) 2

  son en realidad la misma pcola.
- ¿Cómo podemos expresar que el orden de llegada no es relevante?
- Puede haber varias, una forma económica es con el axioma
  - Encolar (Encolar q e) e' = Encolar (Encolar q e') e

  para toda cola q y elementos e y e'.

Ecuaciones entre constructores

- En efecto, a pesar de que el axioma
  - Encolar (Encolar q e) e' = Encolar (Encolar q e') e
- dice que dos elementos consecutivos son intercambiables,
- es posible utilizar repetidamente el axioma para establecer que, por ejemplo,
  - Encolar (Encolar (Encolar Vacía 2) 3) 4
  - Encolar (Encolar (Encolar Vacía 3) 4) 2

  son iguales.
- Por ejemplo, intercambiando primero 2 con 3, y luego 2 con 4.
- Es posible convencerse de que el axioma expresa exactamente lo que buscábamos: que el orden entre los elementos es irrelevante.
- Agreguemos entonces este axioma a la especificación.

Especificación del TAD Pcola

```
module TADPCola where

data Ord e ⇒ PCola e = Vacía
                     | Encolar (PCola e) e

es_vacía :: Ord e ⇒ PCola e → Bool
primero :: Ord e ⇒ PCola e → e
decolar :: Ord e ⇒ PCola e -> PCola e
- - las dos últimas se aplican sólo a pcola no vacía

Encolar (Encolar q e) e' = Encolar (Encolar q e') e

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | e >= primero q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = Vacía
                      | e >= primero q = q
                      | otherwise = Encolar (decolar q) e
```

Nueva dificultad

- Si bien este axioma fue necesario, introduce una nueva dificultad sobre la definición de las operaciones:
- ¿están bien definidas primero y decolar?
- ¿o es posible que al aplicar primero (o decolar) a “dos pcolas iguales” obtengamos resultados diferentes?
- afortunadamente, ya hemos observado que primero devuelve siempre el máximo, por consiguiente no depende del orden de sus elementos.
- Y un razonamiento similar hemos hecho para decolar.
- Podemos concluir que tanto primero como decolar **respetan el axioma**.

Usando la PCola para ordenar

type pqueue = . . . {- no sabemos aún cómo se implementará -}

proc empty(**out** q:pqueue) {Post: q $\sim$ Vacía}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E}
proc enqueue(**in**/**out** q:pqueue,**in** e:elem)
{Post: q $\sim$ Encolar Q E}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge\neg$is_empty(q)}
fun first(q:pqueue) **ret** e:elem
{Post: e $\sim$ primero Q}

Usando la PCola para ordenar

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
proc dequeue(**in**/**out** q:pqueue)
{Post: q $\sim$ decolar Q}

fun is_empty(q:pqueue) **ret** b:**bool**
{Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}

Algoritmo de ordenación

```
proc pqueue_sort (in/out a: array[1..n] of T)
    var q: pqueue of T
    empty(q);
    for i:= 1 to n do
        enqueue(q,a[i])
    od
    for i:= n downto 1 do
        a[i]:= first(q)
        dequeue(q)
    od
end proc
```