Algoritmos y Estructuras de Datos II

Backtracking

15 de mayo de 2019

Clase de hoy

1. Backtracking
   - Forma general de algoritmos voraces
   - ¿Y cuando no hay un buen criterio de selección?
   - Problema de la moneda
   - Problema de la mochila
   - Camino de costo mínimo entre todo par de vértices
2. Conclusiones
3. Backtracking, grafo implícito
4. Ocho reinas

Forma general de algoritmos voraces

```
fun voraz(C) ret S
                {C: conjunto de candidatos, S: solución a construir}
    S:= {}
    do S no es solución → c:= seleccionar de C
                          C:= C-{c}
                          if S∪{c} es factible → S:= S∪{c} fi
    od
end fun
```

- Ser solución y ser factible no tienen en cuenta optimalidad.
- Optimalidad depende totalmente del criterio de selección.

¿Y cuando no hay un buen criterio de selección?

- A veces no hay un criterio de selección que garantice optimalidad.
- Por ejemplo:
  - Problema de la moneda para conjuntos de denominaciones arbitrarios.
  - Problema de la mochila para objetos no fraccionables.
- En este caso, si se elige un fragmento de solución puede ser necesario “volver hacia atrás” (**backtrack**) sobre esa elección e intentar otro fragmento.
- En la práctica, estamos hablando de considerar todas las selecciones posibles e intentar cada una de ellas para saber cuál de ellas conduce a la solución óptima. (backtracking = fuerza bruta)

Forma general de algoritmos que hacen backtracking

```
fun backtrack(C) ret S
                {C: conjunto de candidatos, S: solución a construir}
    S:= backtracking(C, { })
end fun

fun backtracking(C, Sp) ret S                {Sp: solución parcial}
    if Sp es solución then S:= Sp
    else para cada c ∈ C tal que Sp ∪{c} sea factible, calcular
            Sc:= backtracking(C-{c}, Sp ∪{c})
        S:= la mejor entre todas las Sc's calculadas
    fi
end fun
```

A diferencia de la técnica voraz

- Siempre que haya solución, backtracking la encuentra.
- En general son algoritmos ineficientes (aunque pueda que no se conozcan mejores alternativas).
- No hay buen criterio de selección: se utiliza fuerza bruta.
- A veces se puede ser un poco menos brutal...

Problema de la moneda

- Sean $d_1, d_2, \ldots, d_n$ las denominaciones de las monedas (todas mayores que 0),
- no se asume que estén ordenadas,
- se dispone de una cantidad infinita de monedas de cada denominación,
- se desea pagar un monto k de manera exacta,
- utilizando el **menor número de monedas posibles**.
- Vimos que el algoritmo voraz puede no funcionar para ciertos conjuntos de denominaciones.
- Daremos un algoritmo consistente en considerar todas las combinaciones de monedas posibles.

Problema de la moneda usando backtracking

fun cambio($\{d_1, \ldots, d_n\}, k$) **ret** S : conjunto de monedas
    S:= cambiando($\{d_1, \ldots, d_n\}, k, \{\ \}$)
end fun

fun cambiando($\{d_1, \ldots, d_n\}, k$, Sp) **ret** S {Sp: carrito de monedas}
    if monto total de Sp = k **then** S:= Sp
    else para cada i tal que monto total de Sp$+d_i \leq k$, calcular
        S_i:= cambiando($\{d_1, \ldots, d_n\}, k$, Sp $\cup\{$ d_i $\}$)
        S:= la S_i con menor cantidad de monedas
    fi
end fun

Algunas observaciones

- El algoritmo mantiene un cierto conjunto Sp de monedas.
- Prueba extender ese conjunto de n maneras posibles:
  - agregando una moneda de valor d_1 (si no se pasa).
  - o agregando una moneda de valor d_2 (si no se pasa).
  - etcétera
  - agregando una moneda de valor d_n (si no se pasa).
- La recursión asegura que en cada uno de los casos anteriores vuelven a considerarse los n casos posibles para agregar una moneda más, . . . , hasta llegar a una solución (caso base).
- Hmmm. Estamos repitiendo casos...

Sin repetir casos

fun cambio($\{d_1, \ldots, d_n\}, k$) **ret** S : conjunto de monedas
    S:= cambiando($\{d_1, \ldots, d_n\}, k, \{\ \}$)
end fun

fun cambiando($\{d_1, \ldots, d_j\}, k$, Sp) **ret** S
    if monto total de Sp = k **then** S:= Sp
    else para cada $i \leq j$ tal que monto total de Sp$+d_i \leq k$, calcular
        S_i:= cambiando($\{d_1, \ldots, d_i\}, k$, Sp $\cup\{$ d_i $\}$)
        S:= la S_i con menor cantidad de monedas
    fi
end fun

Simplifiquemos el problema

- sólo nos interesa por ahora hallar la menor cantidad de monedas necesarias,
- no nos interesa saber cuáles son esas monedas.

Algoritmo simplificado 1

fun cambio($\{d_1, \ldots, d_n\}, k$) **ret** s : número de monedas
    s:= cambiando($\{d_1, \ldots, d_n\}, k, 0, 0$)
end fun

fun cambiando($\{d_1, \ldots, d_j\}, k, m$, sp) **ret** s
    if m = k **then** s:= sp
    else para cada $i \leq j$ tal que $m + d_i \leq k$, calcular
            s_i:= cambiando($\{d_1, \ldots, d_i\}, k, m + d_i$, sp+1)
        s:= mínimo de los s_i
    fi
end fun

Observemos

- El **for** i:= 1 **to** j pone en evidencia que estamos intentando solucionar el problema con
  - i = 1
  - i = 2
  - etcétera
  - i = j
- y de estas -a lo sumo *j*- posibilidades nos quedamos con la mejor.
- Una solución más simple: en vez de *j* posibilidades (¿qué moneda uso?) podemos reducir a dos posibilidades (¿uso o no la moneda de denominación d_j?).

Algoritmo simplificado 2

```
fun cambio({d_1, ..., d_n}, k) ret s : número de monedas
    s:= cambiando({d_1, ..., d_n}, k, 0, 0)
end fun
fun cambiando({d_1, ..., d_j}, k, m, sp) ret s
    if m = k then s:= sp
    else s:= ∞
        for i:= 1 to j do
            if sp+d_i ≤ k then
                s:= min(s, cambiando({d_1, ..., d_i}, k, m + d_i, sp + 1))
            fi
        od
    fi
end fun
```

Simplificación y generalización

- Simplificamos el problema:
  - sólo nos interesa por ahora hallar el menor número de monedas necesario,
  - no nos interesa saber cuáles son esas monedas.
- Generalizamos el problema:
  - Sea *ds* una lista cualquiera de denominaciones y $0 \leq j \leq k$,
  - definimos $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de *ds*."
  - La solución del problema original se obtiene calculando $cambio([d_1, d_2, \ldots, d_n], k)$.

Definiendo $cambio(ds, j)$

Caso $j = 0$

- Recordemos que $cambio(ds, j)$ = "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$

Definiendo $cambio(ds, j)$

Caso $j > 0$ y $ds = [\,]$

- Recordemos que $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$,
- $j > 0 \Rightarrow cambio([\,], j) = \infty$,
  ya que no hay manera posible de pagar el monto

Definiendo $cambio(ds \lhd d, j)$

Caso $d > j > 0$

- Recordemos que $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$,
- $j > 0 \Rightarrow cambio([\,], j) = \infty$,
- $d > j > 0 \Rightarrow cambio(ds \lhd d, j) = cambio(ds, j)$,
  ya que no se pueden usar monedas de denominación d, es como si no estuvieran disponibles

Definiendo $cambio(ds \lhd d, j)$

Caso $j \geq d$

- Recordemos que $cambio(ds, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con las denominaciones de ds."
- $cambio(ds, 0) = 0$,
- $j > 0 \Rightarrow cambio([\,], j) = \infty$,
- $d > j > 0 \Rightarrow cambio(ds \lhd d, j) = cambio(ds, j)$,
- si $j \geq d$ hay dos posibilidades
  - la solución óptima no usa monedas de denominación d
    - $cambio(ds \lhd d, j) = cambio(ds, j)$
  - la solución óptima usa una o más monedas de denominación d
    - $cambio(ds \lhd d, j) = 1 + cambio(ds \lhd d, j - d)$

Definición recursiva (a la Haskell) de *cambio*(*ds*, *j*)

Conclusión de estas últimas filminas:

```
cambio ds 0 = 0
cambio [] j = ∞
cambio (ds ◁ d) j | d > j = cambio ds j
                  | otherwise = min (cambio ds j)
                                    (1 + cambio (ds ◁ d) (j - d))
```

Decisión que determina esta definición: ¿usamos monedas de denominación *d* o no?

Definición recursiva de $cambio(i, j)$

Otra notación: definir $cambio(i, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con denominaciones $d_1, d_2, \ldots, d_i$."

$$cambio(i, j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ cambio(i-1, j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(cambio(i-1, j), 1 + cambio(i, j - d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

Decisión que determina esta definición: ¿usamos monedas de denominación d_i o no?

Otras posibles definiciones que usan backtracking

Considerando el número exacto de monedas de denominación d_i

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ \min_{q \in \{0,1,\ldots,j \div d_i\}}(q + cambio(i-1, j - q * d_i)) & j > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

Acá estamos considerando la posibilidad de usar 0 monedas ($q = 0$) de denominación d_i, 1 moneda ($q = 1$) de denominación d_i, etc. De todas esas posibilidades se elige la que minimice el número total de monedas.
Decisión que determina esta definición: ¿cuántas monedas de denominación d_i usamos?

Otras posibles definiciones que usan backtracking

Considerando cuál moneda de las disponibles se usa

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 1 + \min_{i' \in \{1,2,\ldots,i \mid d_{i'} \leq j\}}(cambio(i', j - d_{i'})) & j > 0 \end{cases}$$

Acá estamos considerando la posibilidad de usar 1 moneda de denominación d_i ($i' = i$), 1 moneda de denominación d_{i-1} ($i' = i - 1$), etc. De todas esas posibilidades se elige la que minimice el número total de monedas. Para evitar cálculos repetidos, se restringe la búsqueda a monedas de índice menor o igual a los ya utilizados.

Decisión que determina esta definición: de las monedas de que disponemos, ¿cuál usamos?

Primera definición recursiva en pseudocódigo

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ cambio(i-1,j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(cambio(i-1,j), 1 + cambio(i, j-d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, i,j: nat) ret r: nat
    if j=0 then r:= 0
    else if i = 0 then r:= ∞
    else if d[i] > j then r:= cambio(d,i-1,j)
    else r:= min(cambio(d,i-1,j),1+cambio(d,i,j-d[i]))
    fi
end fun
```

Segunda definición recursiva en pseudocódigo

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ \min_{q \in \{0,1,\ldots,j \div d_i\}}(q + cambio(i-1, j - q * d_i)) & j > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, i,j: nat) ret r: nat
    if j=0 then r:= 0
    else if i = 0 then r:= ∞
    else r:= cambio(d,i-1,j)
         for q:= 1 to j ÷ d[i] do
             r:= min(r,q+cambio(d,i-1,j-q*d[i]))
         od
    fi
end fun
```

Tercera definición recursiva en pseudocódigo

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 1 + \min_{i' \in \{1,2,\ldots,i \mid d_{i'} \leq j\}} (cambio(i', j - d_{i'})) & j > 0 \end{cases}$$

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, i,j: nat) ret r: nat
    if j=0 then r:= 0
    else r:= ∞
        for i':= 1 to i do
            if d[i'] ≤ j then r:= min(r,cambio(d,i',j-d[i'])) fi
        od
        r:= r + 1
    fi
end fun
```

Otras posibilidades

- No son éstas las únicas formas de resolver el problema usando backtracking.
- Podríamos definir, por ejemplo, a la Haskell

```
cambio ds 0 = 0
cambio [] j = ∞
cambio (d ▷ ds) j | d > j = cambio ds j
                  | otherwise = min (cambio ds j)
                                    (1 + cambio (d ▷ ds) (j - d))
```

Otras posibilidades

- Se correspondería con
  - $cambio(i, j) =$ "menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto j con denominaciones $d_{i+1}, d_{i+2}, \ldots, d_n$."
- Obtendríamos, entre otras posibles definiciones recursivas,

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = n \\ cambio(i+1, j) & d_i > j > 0 \wedge i < n \\ \min(cambio(i+1, j), 1 + cambio(i, j - d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i < n \end{cases}$$

- Para resolver el problema original se calcula $cambio(0, k)$.

Primera solución, pero ¡Queremos las monedas!

```
fun cambio(d:array[1..n] of nat, i,j: nat) ret r: list of nat
    var r1, r2 : list of nat
    if j=0 then r:= [ ]
    else if i = 0 then r:= una lista infinita o muy larga
    else if d[i] > j then r:= cambio(d,i-1,j)
    else r1 := cambio(d,i-1,j)
         r2 := cambio(d,i,j-d[i]) ◁ d[i]
         if |r1| ≤ |r2| then r:= r1 else r:= r2 fi
    fi
end fun
```

donde |x| es la longitud de x,
y la llamada principal es cambio(d,n,k).

Problema de la mochila

- Tenemos una mochila de capacidad W.
- Tenemos n objetos **no fraccionables** de valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$.
- Se quiere encontrar la mejor selección de objetos para llevar en la mochila.
- Por mejor selección se entiende aquélla que totaliza **el mayor valor posible** sin que su peso exceda la capacidad W de la mochila.

Simplificación y generalización

- Simplificamos el problema:
  - sólo nos interesa por ahora hallar el mayor valor posible sin exceder la capacidad de la mochila,
  - no nos interesa saber cuáles son los objetos que alcanzan ese máximo.
- Generalizamos el problema:
  - Sea *os* una lista cualquiera de pares (valor,peso) y $0 \leq j \leq W$,
  - definimos $mochila(os, j) =$ "mayor valor alcanzable sin exceder la capacidad j con objetos de *os*."
  - La solución del problema original se obtiene calculando $mochila([(v_1, w_1), (v_2, w2), \ldots, (v_n, w_n)], W)$.

Definición recursiva (a la Haskell) de *mochila*(*os*, *j*)

```
mochila os 0 = 0
mochila [] j = 0
mochila (os ◁ (v,w)) j | w > j = mochila os j
                       | otherwise = max (mochila os j)
                                         (v + mochila os (j - w))
```

Decisión que determina esta definición: ¿colocamos o no el objeto de (valor,peso) = (v, w) en la mochila?

Definición recursiva de $mochila(i, j)$

Otra notación: definir $mochila(i, j) =$ "mayor valor alcanzable sin exceder la capacidad j con objetos $1, 2, \ldots, i$."

$$mochila(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \wedge i = 0 \\ mochila(i-1,j) & w_i > j > 0 \wedge i > \\ \max(mochila(i-1,j), v_i + mochila(i-1, j-w_i)) & j \geq w_i > 0 \wedge i > \end{cases}$$

Decisión que determina esta definición: ¿colocamos o no el objeto i en la mochila?

Otras posibilidades

- Ofrece las mismas variantes que en el problema de la moneda,
- el pasaje a pseudocódigo es similar,
- la incorporación de información con los objetos que van en la mochila es también parecido.

Problema del camino de costo mínimo

Entre todo par de vértices

- Tenemos un grafo dirigido $G = (V, A)$,
- con costos no negativos en las aristas,
- se quiere encontrar, para cada par de vértices, el camino de menor costo que los une.
- Se asume $V = \{1, \ldots, n\}$

Simplificación y generalización

- Simplificamos el problema:
  - sólo nos interesa por ahora hallar el costo de cada uno de los caminos de costo mínimo.
  - no nos interesa saber cuáles son los caminos que alcanzan ese mínimo.
- Generalizamos el problema:
  - Sean $1 \leq i, j \leq n$ y $0 \leq k \leq n$,
  - definimos $camino_k(i, j) =$ "menor costo posible para caminos de i a j cuyos vértices intermedios se encuentran en el conjunto $\{1,\ldots,k\}$."
  - La solución del problema original se obtiene calculando $camino_n(i, j)$ para el par i (origen) y j (destino) que se desea.

Definición recursiva de $camino_k(i, j)$

$$camino_k(i,j) = \begin{cases} L[i,j] & k = 0 \\ \min(camino_{k-1}(i,j), camino_{k-1}(i,k) + camino_{k-1}(k,j)) & k \geq 1 \end{cases}$$

donde $L[i, j]$ es el costo de la arista que va de i a j, o infinito si no hay tal arista.
Decisión que determina esta definición: ¿pasamos por el vértice k o no?

Conclusiones

- Hemos visto soluciones a tres problemas.
- En general, muy ineficiente.
- Por ejemplo, para el problema de la moneda, si queremos pagar el monto 90 con nuestros billetes con denominaciones 1, 5 y 10,
  - cambio(3,90) llama a cambio(2,90) y cambio(3,80),
  - cambio(2,90) llama a cambio(1,90) y cambio(2,85),
  - cambio(2,85) llama a cambio(1,85) y **cambio(2,80)**,
  - cambio(3,80) llama a **cambio(2,80)** y cambio(3,70).
- Se ve que cambio(2,80) se calcula 2 veces.
- y muchos otros llamados se repiten, incluso varias veces.
- Esto vuelve los algoritmos exponenciales en el peor caso.

Problema de la moneda

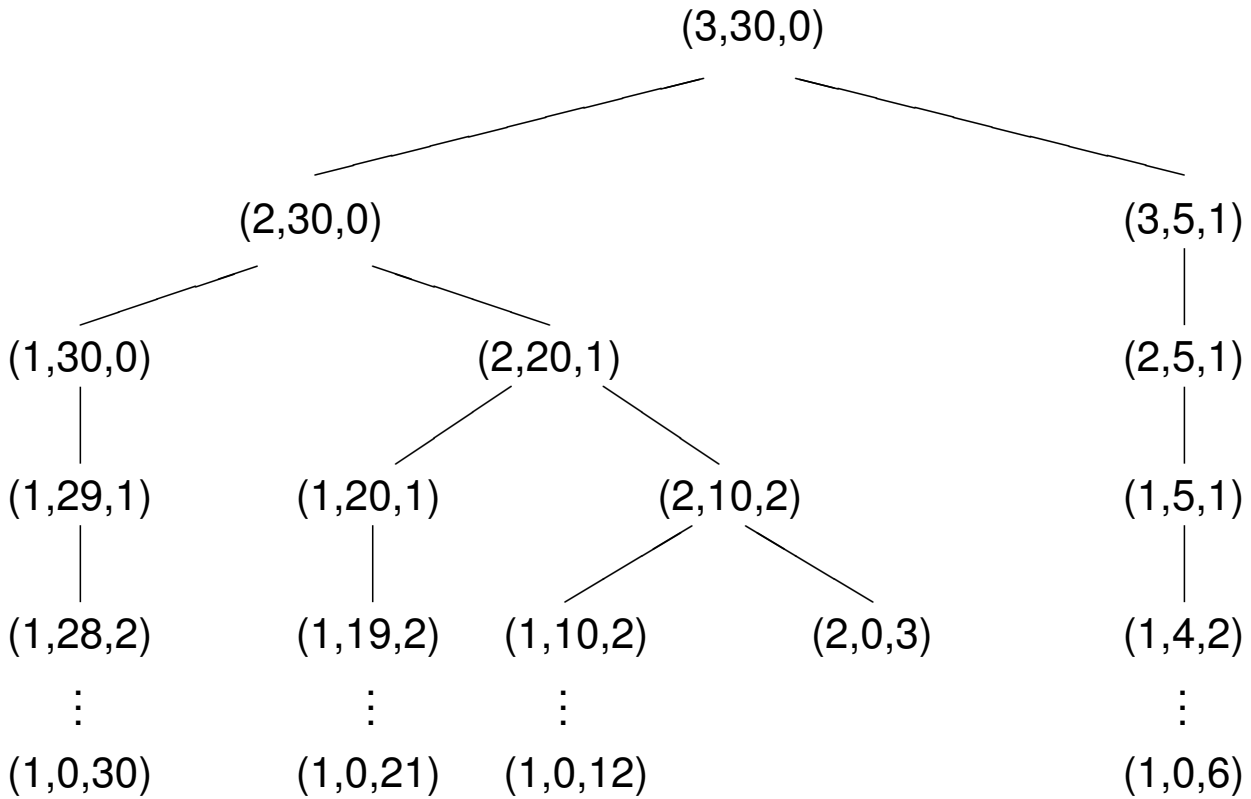
Primera solución que usa backtracking

Recordemos la primera solución al problema de la moneda usando backtracking:

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ cambio(i-1,j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(cambio(i-1,j), 1 + cambio(i, j-d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

Grafo implícito

Ejemplo $d_1 = 1$, $d_2 = 10$, $d_3 = 25$ y $k = 30$



Grafo implícito
Definición general

- Desde el vértice (i, j, x), si $i, j > 0$ y $d_i < j$ existe una única arista al vértice $(i - 1, j, x)$.
- En cambio si $j \leq d_i$ existen dos aristas:
  - una a $(i - 1, j, x)$
  - y otra a $(i, j - d_i, x + 1)$.
- la raíz es el vértice $(n, k, 0)$.

Problema de la moneda

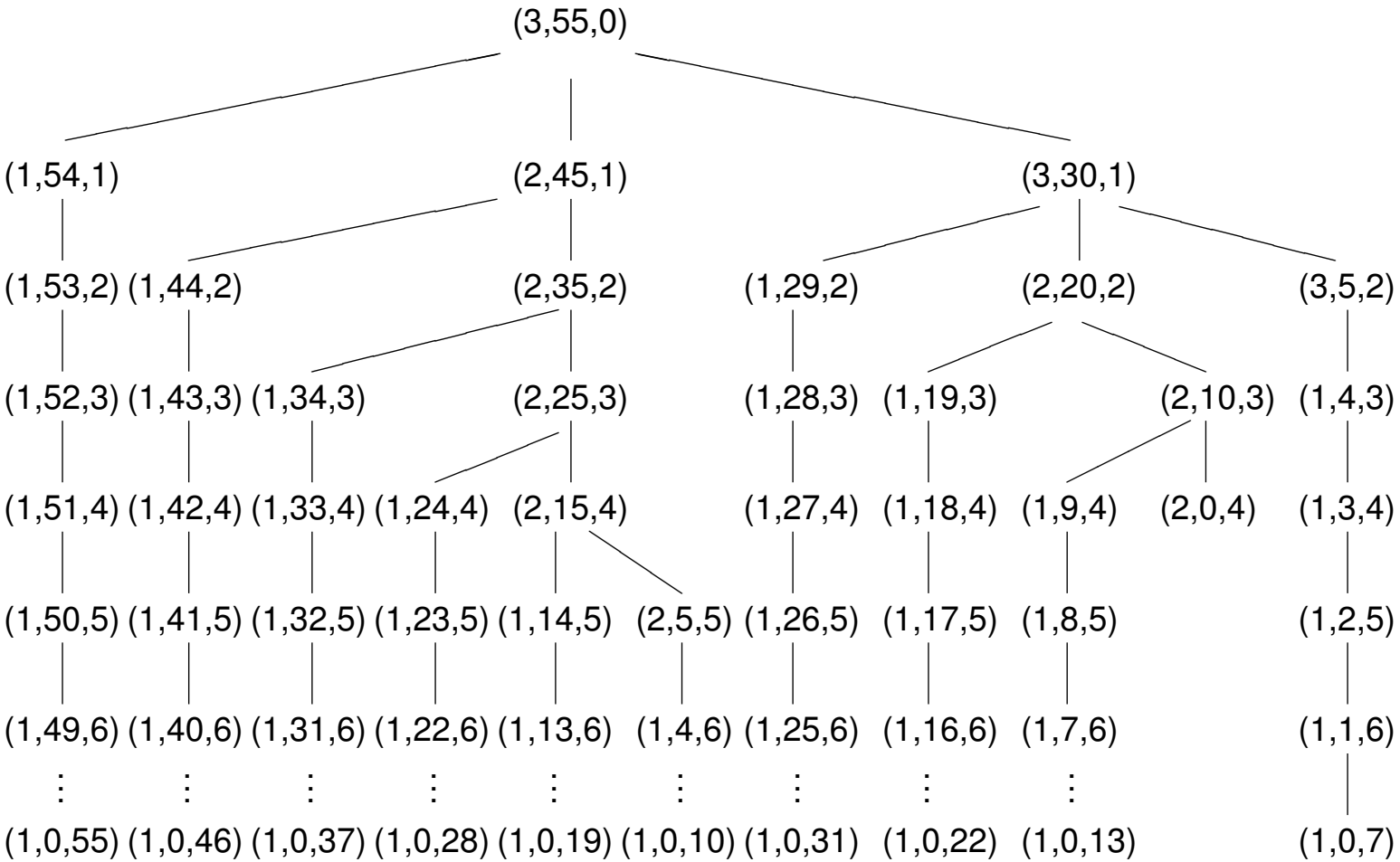
Tercera solución que usa backtracking

Recordemos otra solución al problema de la moneda usando backtracking:

$$cambio(i,j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 1 + \min_{i' \in \{1,2,\ldots,i \mid d_{i'} \leq j\}} (cambio(i', j - d_{i'})) & j > 0 \end{cases}$$

Grafo implícito

Ejemplo $d_1 = 1$, $d_2 = 10$, $d_3 = 25$ y $k = 55$



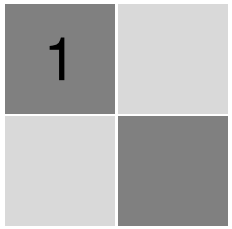
Grafo implícito
Definición general

- La raíz resulta la misma que en el caso anterior,
- pero el vértice (i, j, x) puede tener 0, 1, o varios hijos:
  - todos los vértices de la forma $(i', j - d_{i'}, 1 + x)$ tal que $1 \leq i' \leq i$ y $d_{i'} \leq j$,
  - son hijos de (i, j, x).

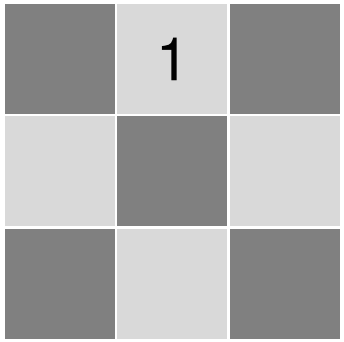
Ocho reinas

- Problema: Encontrar la manera de ubicar 8 reinas en un tablero de 8 filas por 8 columnas de manera tal que ningún par de reinas ocupe la misma fila, la misma columna o la misma diagonal.
- para los que saben ajedrez: de modo de que ninguna reina amenace a otra.
- Es un ejemplo típico de problema que se resuelve usando backtracking, a pesar de no ser de optimización.
- Generalización: ubicar n reinas en un tablero de n filas por n columnas de manera tal que ningún par de reinas ocupe la misma fila, la misma columna o la misma diagonal.
  - 0 reinas, tiene una solución (0 reinas en tablero de 0×0).
  - 1 reina, también (1 reina en tablero de 1×1).

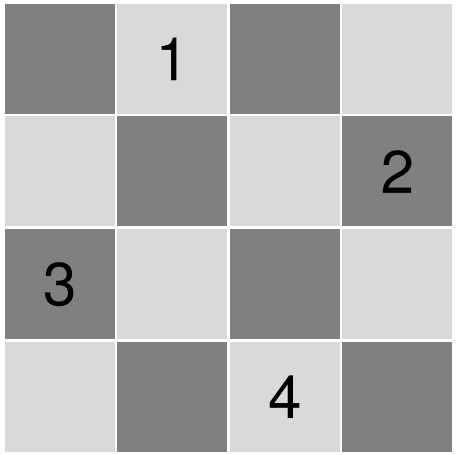
Dos reinas



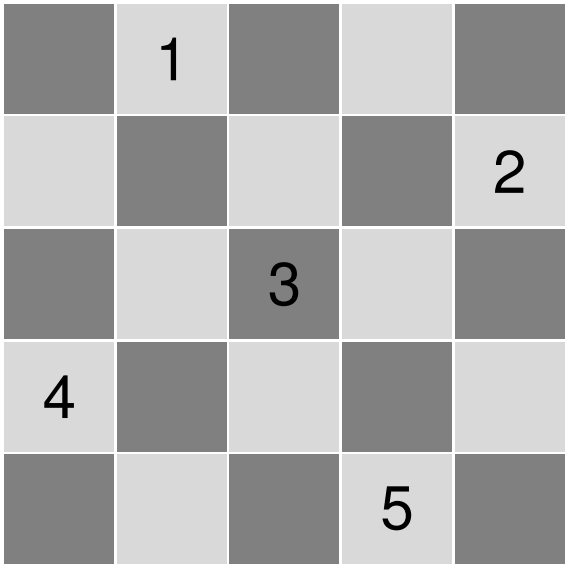
Tres reinas



Cuatro reinas



Cinco reinas

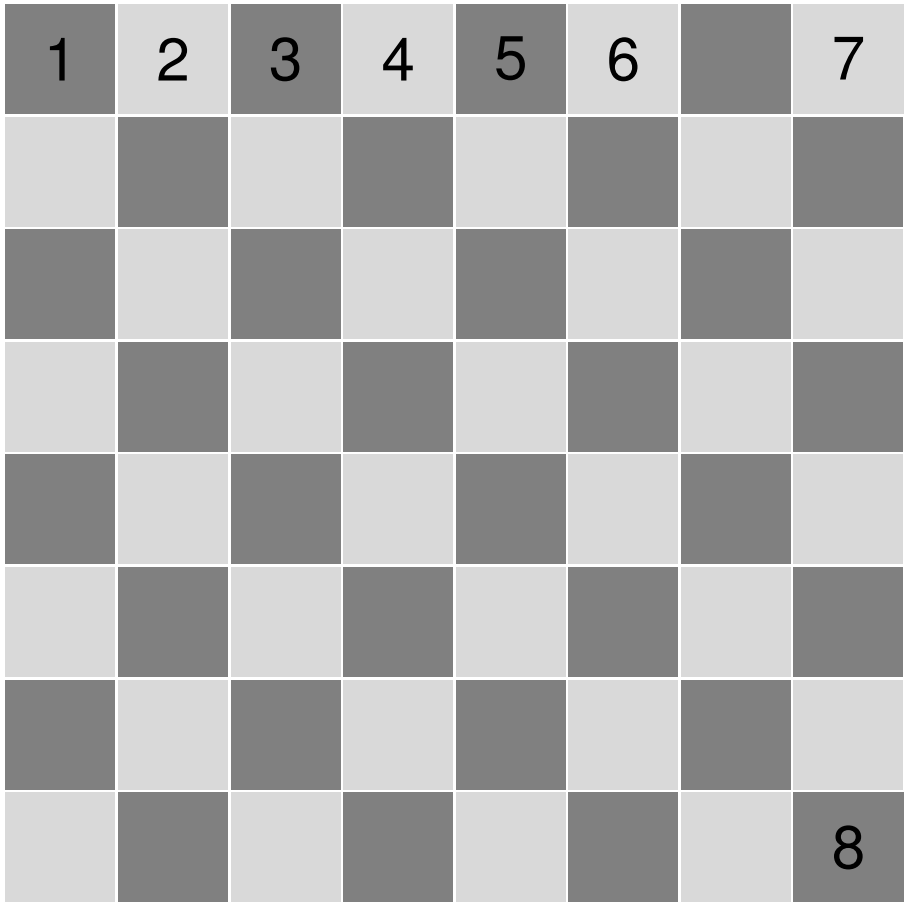


Resumiendo

n reinas:

- $n = 0$ tiene una solución
- $n = 1$ tiene una solución
- $n = 2$ no tiene solución
- $n = 3$ no tiene solución
- $n = 4$ tiene solución
- $n = 5$ varias soluciones
- $n \geq 4$ siempre tiene solución

Ocho reinas, peor algoritmo posible



Ocho reinas, peor algoritmo posible

El algoritmo

Calcula el número de maneras de ubicar 8 reinas sin que se amenacen.

```
fun ocho_reinas_1() ret r: nat
    r:= 0
    for i1:= 1 to 57 do
        for i2:= i1+1 to 58 do
            ...
                for i8:= i7+1 to 64 do
                    if solucion_1([i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]) then r:= r+1 fi
                od
            ...
        od
    od
```

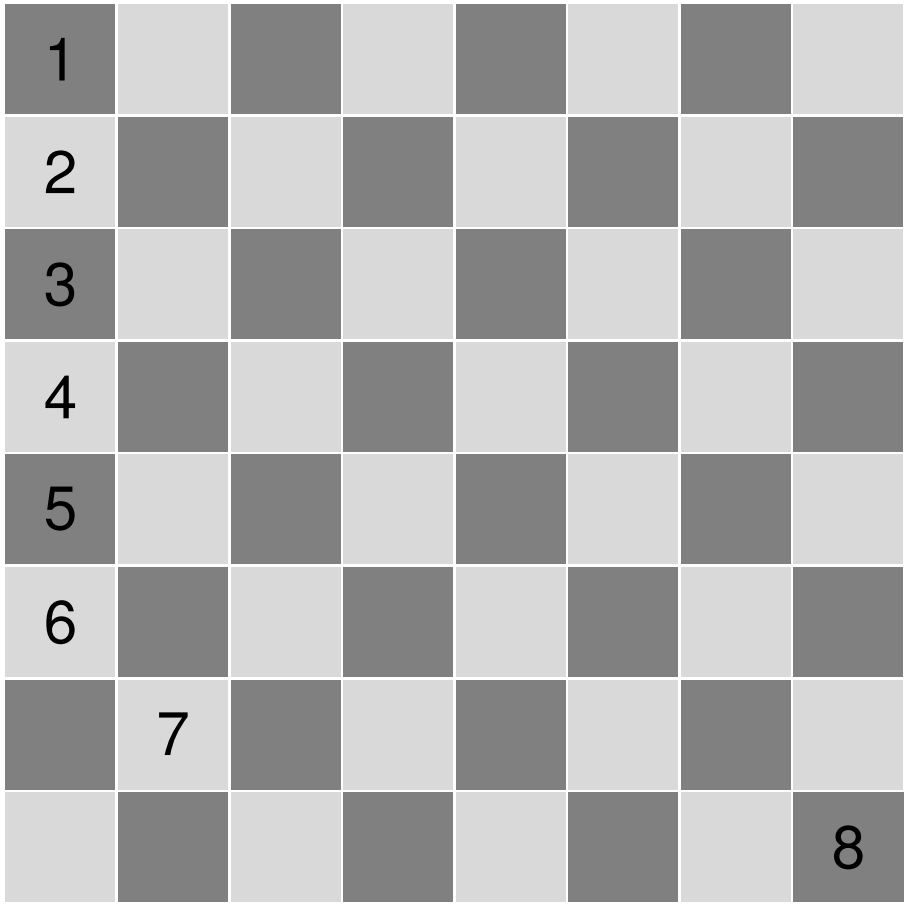
Ocho reinas, peor algoritmo posible

El grafo implícito

$$V = \{[p_1, p_2, \ldots, p_n] \in \{1, \ldots, 64\}^* \mid n \leq 8 \wedge p_1 < p_2 < \ldots < p_n \leq 56 + n\}$$

Dados $p = [p_1, p_2, \ldots, p_n] \in V$ y $q = [q_1, q_2, \ldots, q_m] \in V$ hay una arista de p a q sii $m = n + 1$ y $p_i = q_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Ocho reinas, un algoritmo menos malo



Ocho reinas, un algoritmo menos malo

El algoritmo

Calcula el número de maneras de ubicar 8 reinas sin que se amenacen.

```
fun ocho_reinas_2() ret r: nat
    r:= 0
    for j1:= 1 to 8 do
        for j2:= 1 to 8 do
            ...
                for j8:= 1 to 8 do
                    if solucion_2([j1,j2,j3,j4,j5,j6,j7,j8]) then r:= r+1 fi
                od
            ...
        od
    od
```

Ocho reinas, un algoritmo menos malo

El grafo implícito

$$V = \{p \in \{1, \ldots, 8\}^* \mid |p| \leq 8\}$$

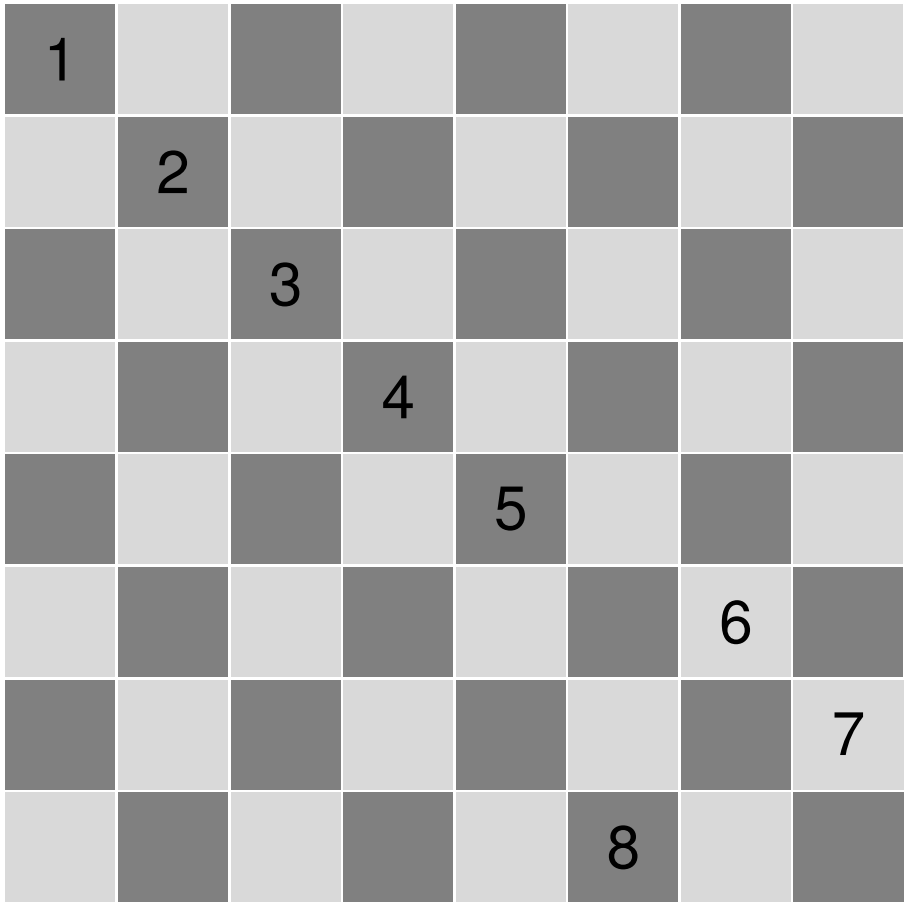
Y las aristas se definen como antes.

Ocho reinas, versión recursiva

```
fun ocho_reinas_2() ret r: nat
    r:= 0
    or_2([ ], r)
end

proc or_2(in sol: list of nat, in/out r: nat)
                    {calcula el número de maneras de extender sol}
              {hasta ubicar en total 8 reinas sin que se amenacen}
      if |sol| = 8 then
        if solucion_2(sol) then r:= r+1 fi
      else for j:= 1 to 8 do
                  or_2(sol ◁ j, r)
           od
      fi
```

Ocho reinas, un algoritmo mejor



Ocho reinas, un algoritmo mejor

El algoritmo

```
fun ocho_reinas_3() ret r: nat
    r:= 0
    or_3([ ], r)
end

proc or_3(in sol: list of nat, in/out r: nat)
                    {calcula el número de maneras de extender sol}
              {hasta ubicar en total 8 reinas sin que se amenacen}
      if |sol| = 8 then
        if solucion_3(sol) then r:= r+1 fi
      else for j:= 1 to 8 do
                  if j ∉ sol then or_3(sol ◁ j, r) fi
           od
```

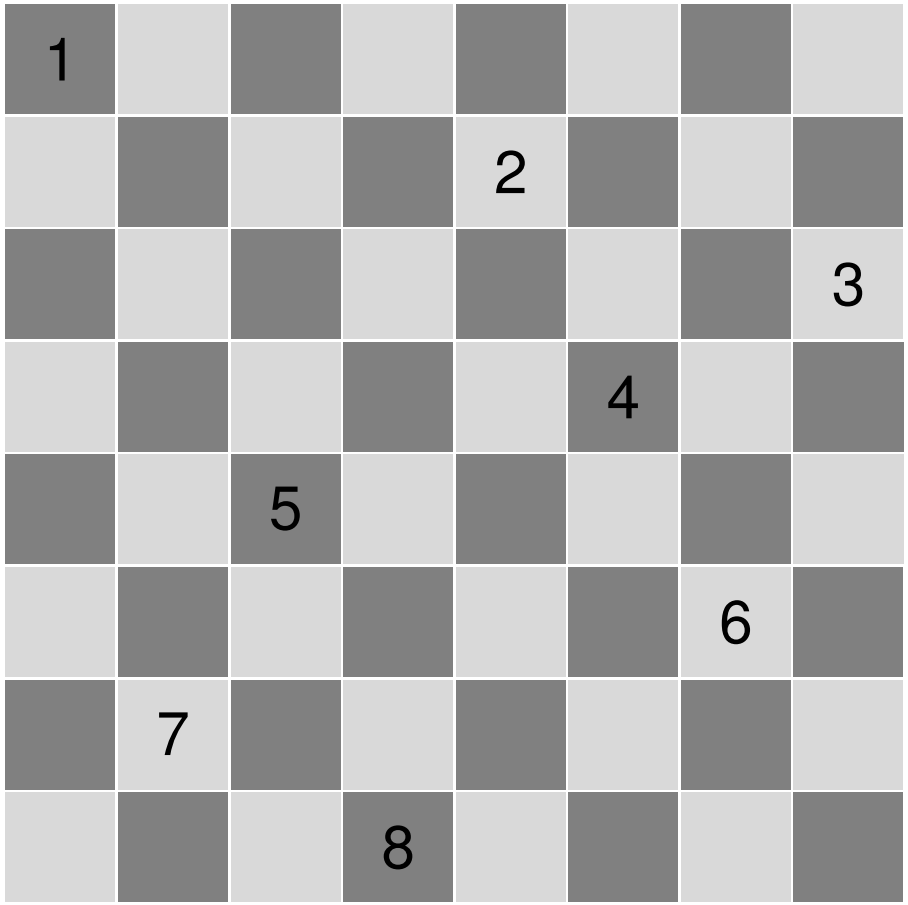
Ocho reinas, un algoritmo mejor

El grafo implícito

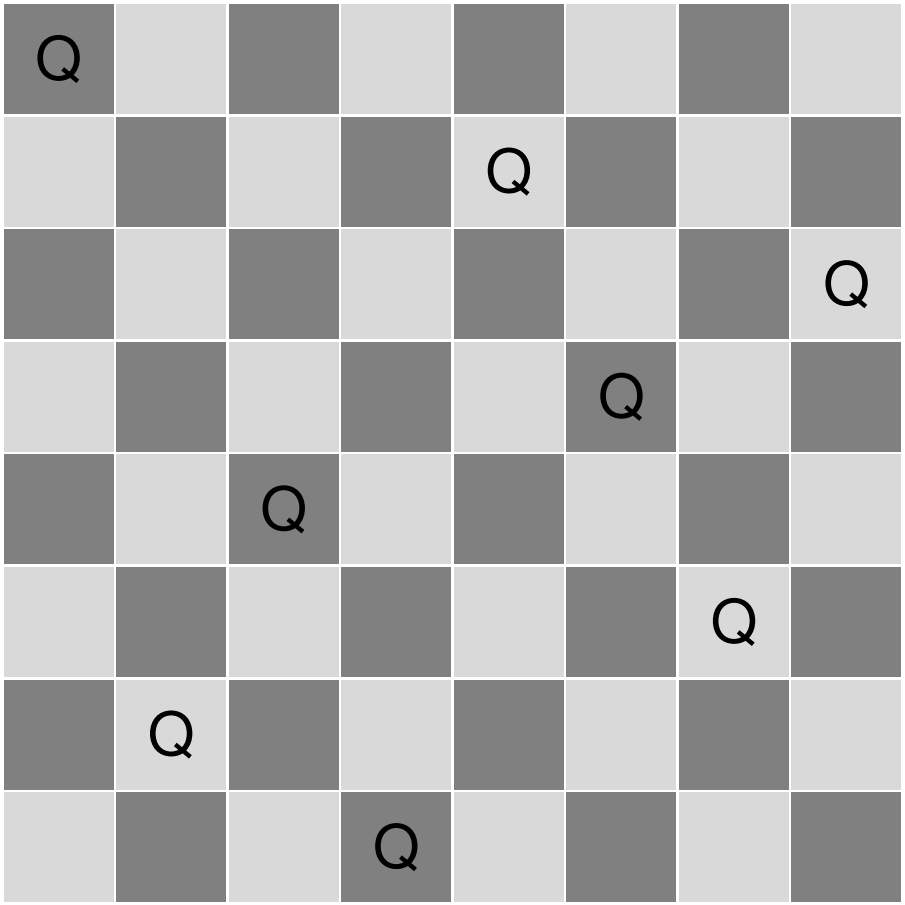
$$V = \{p \in \{1, \ldots, 8\}^* \mid |p| \leq 8 \wedge p \text{ sin repeticiones}\}$$

Y las aristas se definen como antes.

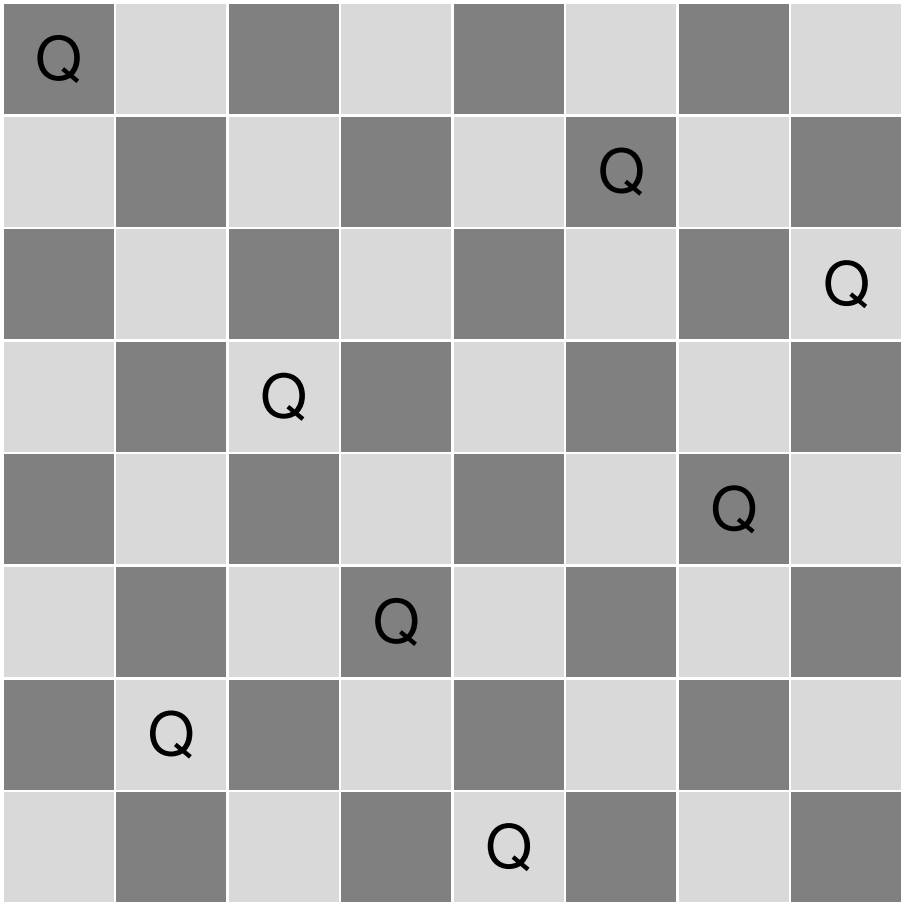
Ocho reinas, un algoritmo optimizado



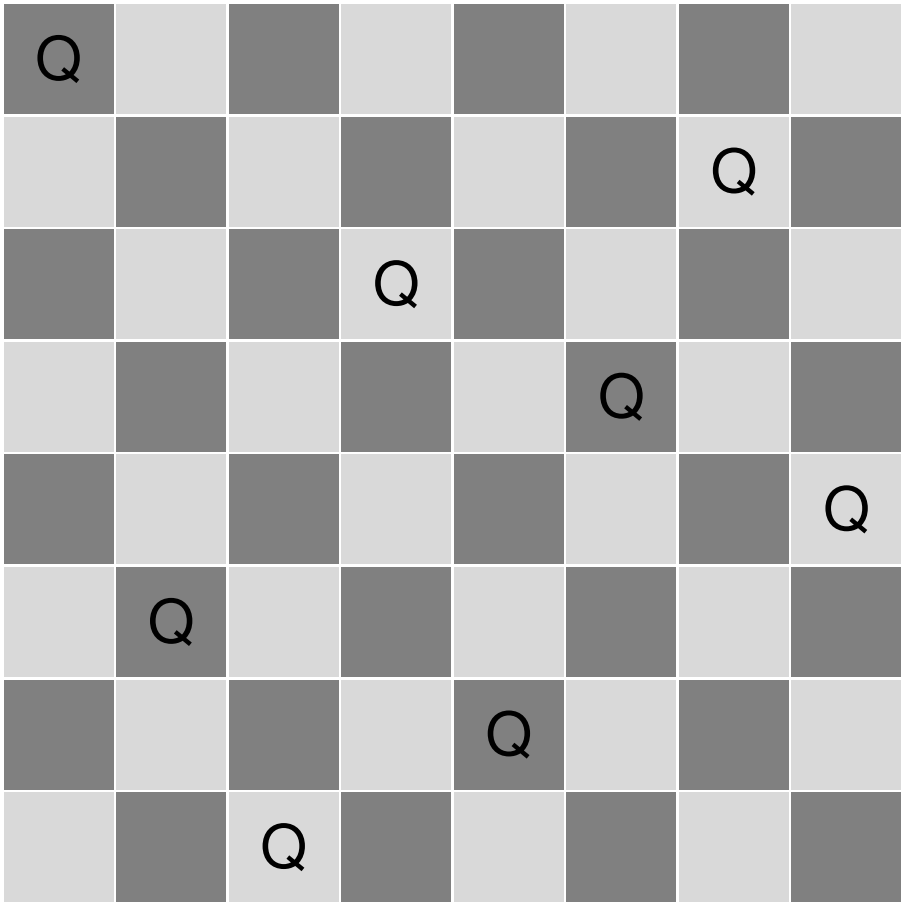
Ocho reinas, todas las soluciones



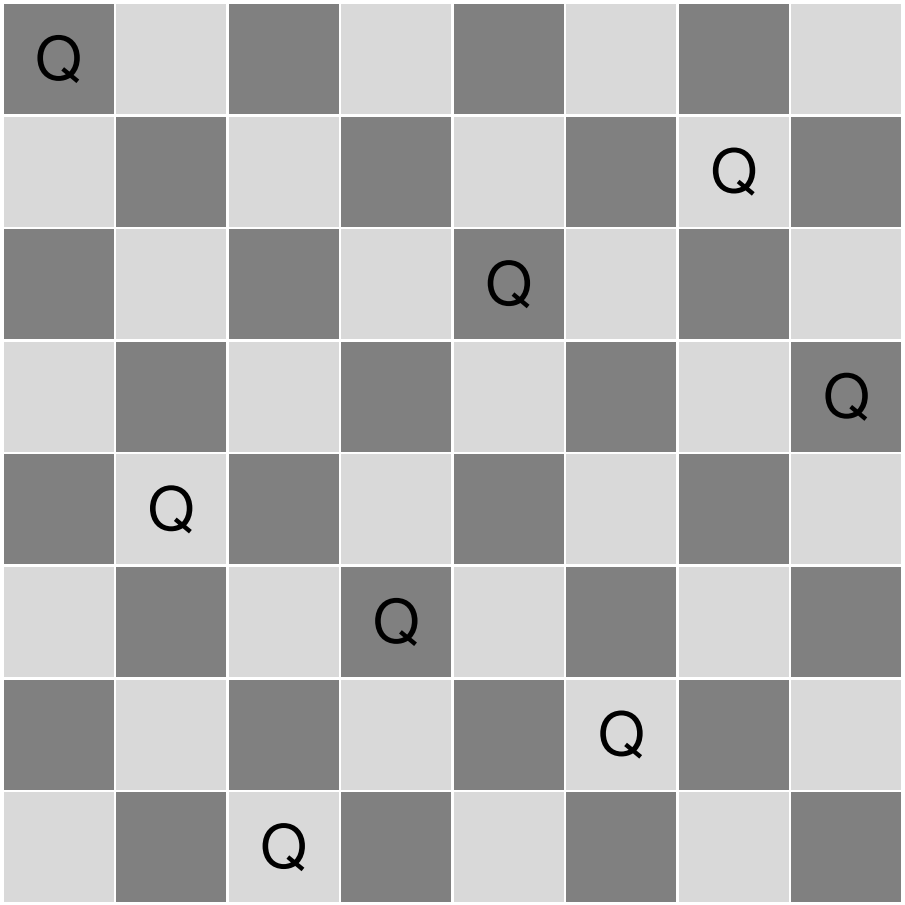
Ocho reinas, todas las soluciones



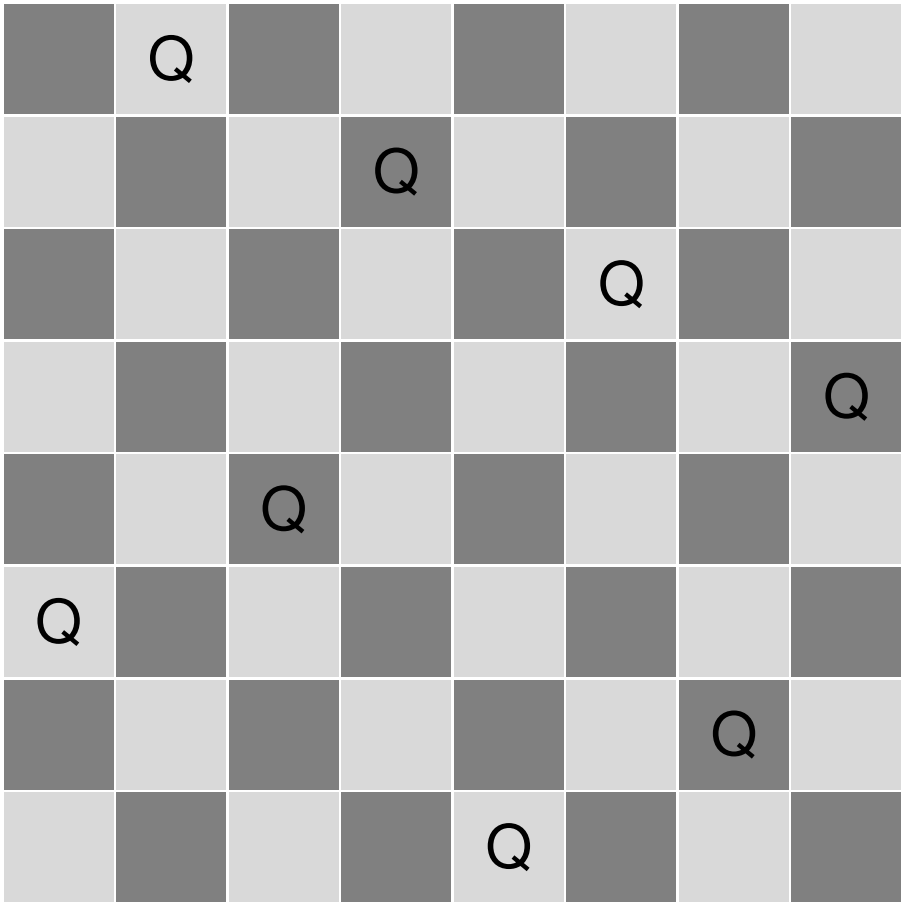
Ocho reinas, todas las soluciones



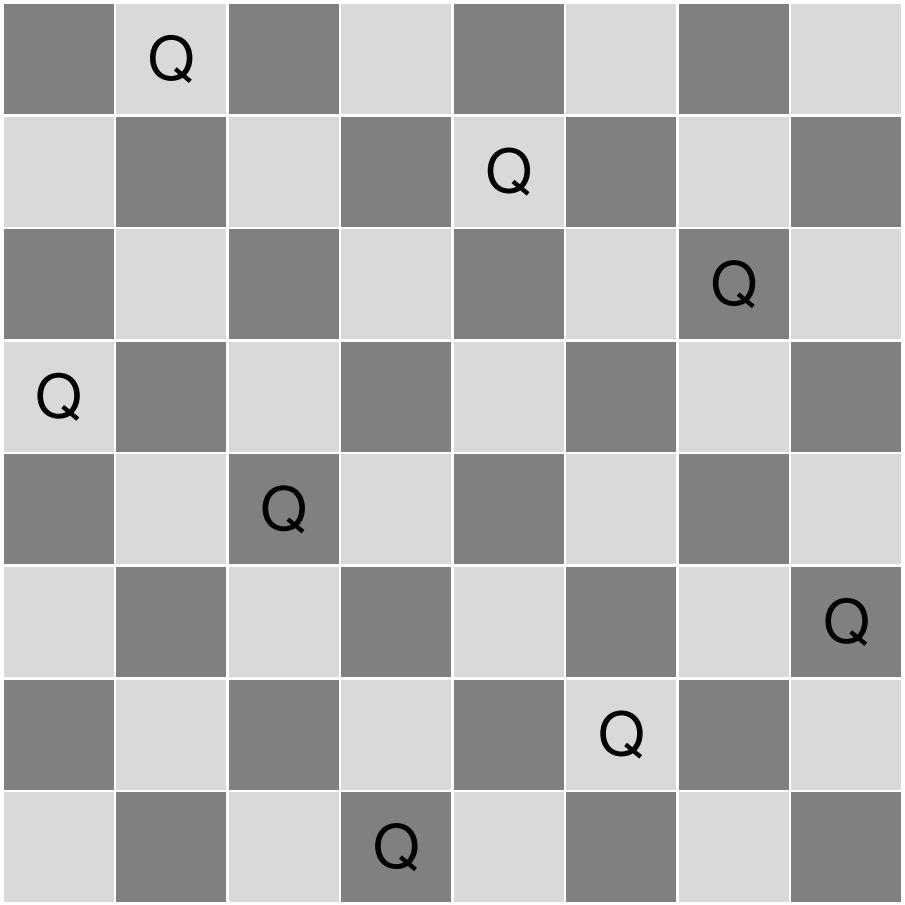
Ocho reinas, todas las soluciones



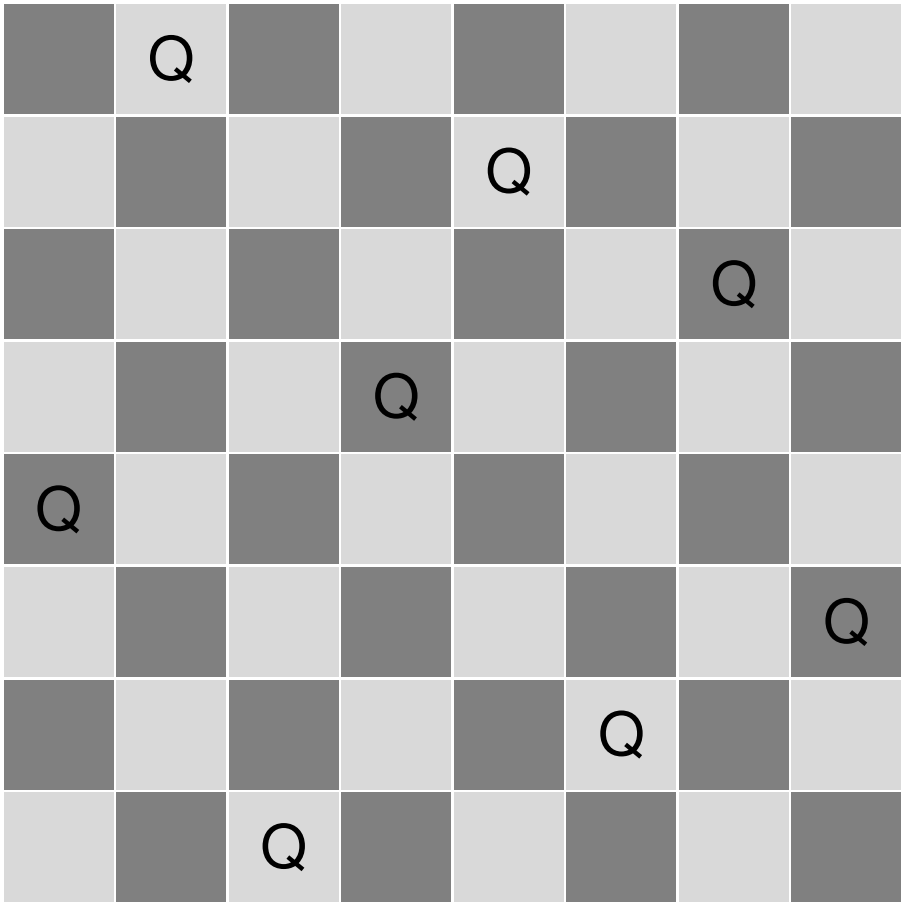
Ocho reinas, todas las soluciones



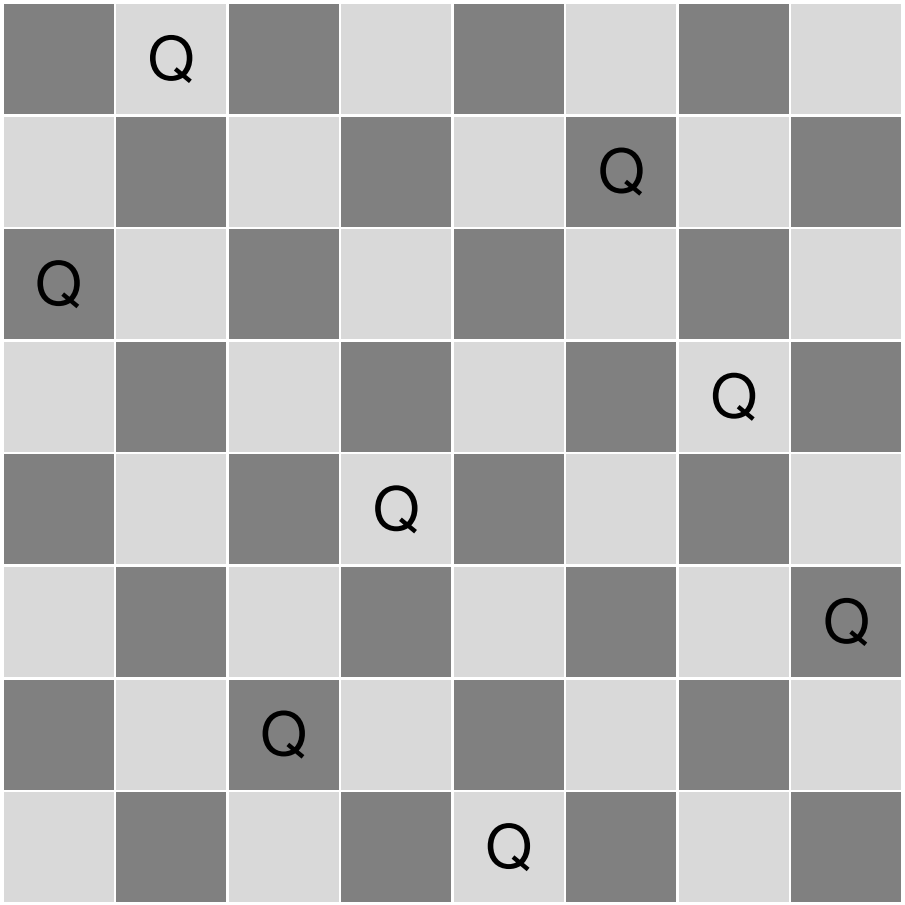
Ocho reinas, todas las soluciones



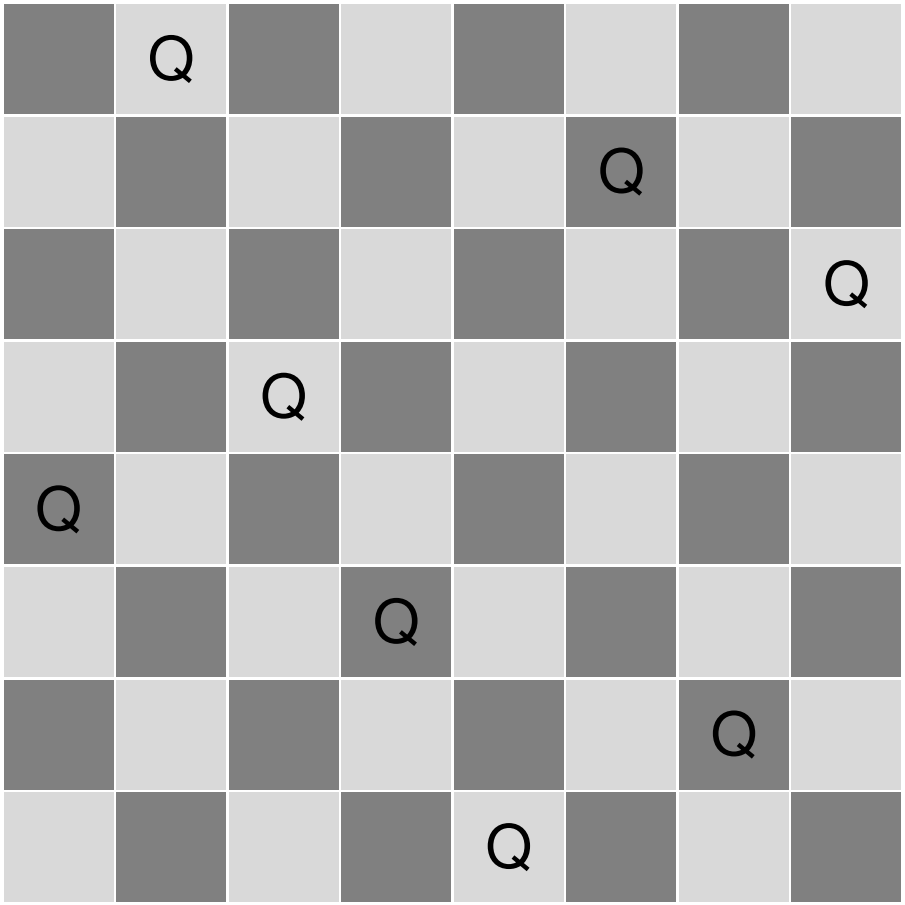
Ocho reinas, todas las soluciones



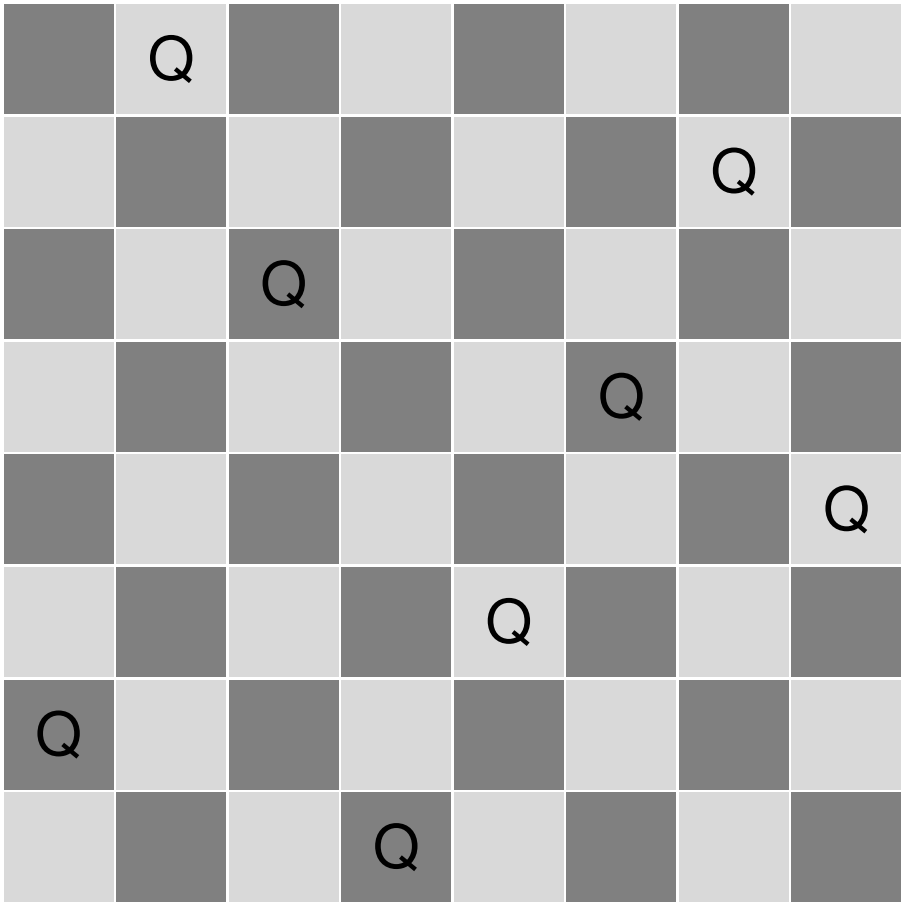
Ocho reinas, todas las soluciones



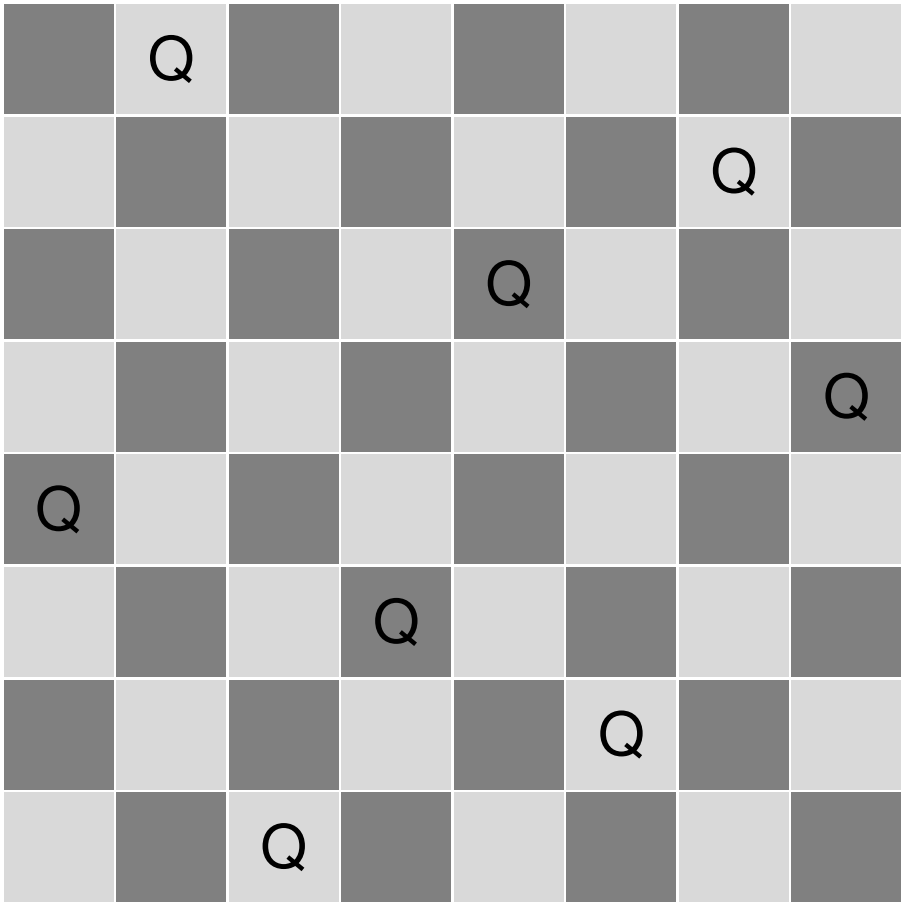
Ocho reinas, todas las soluciones



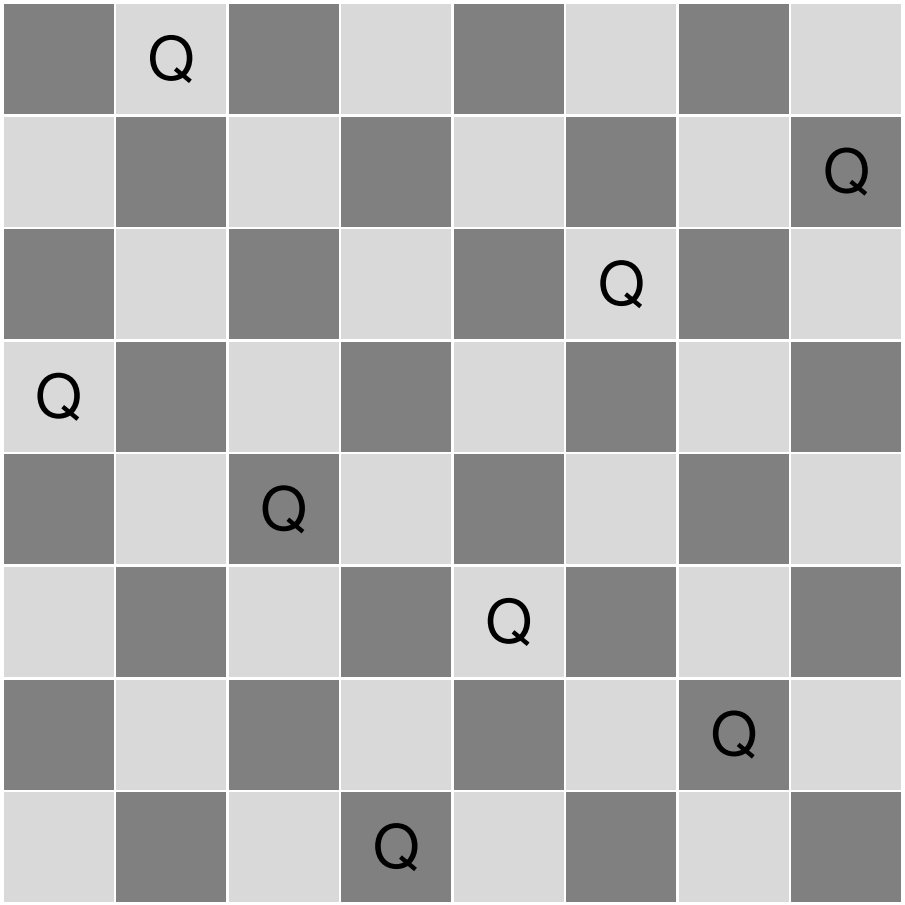
Ocho reinas, todas las soluciones



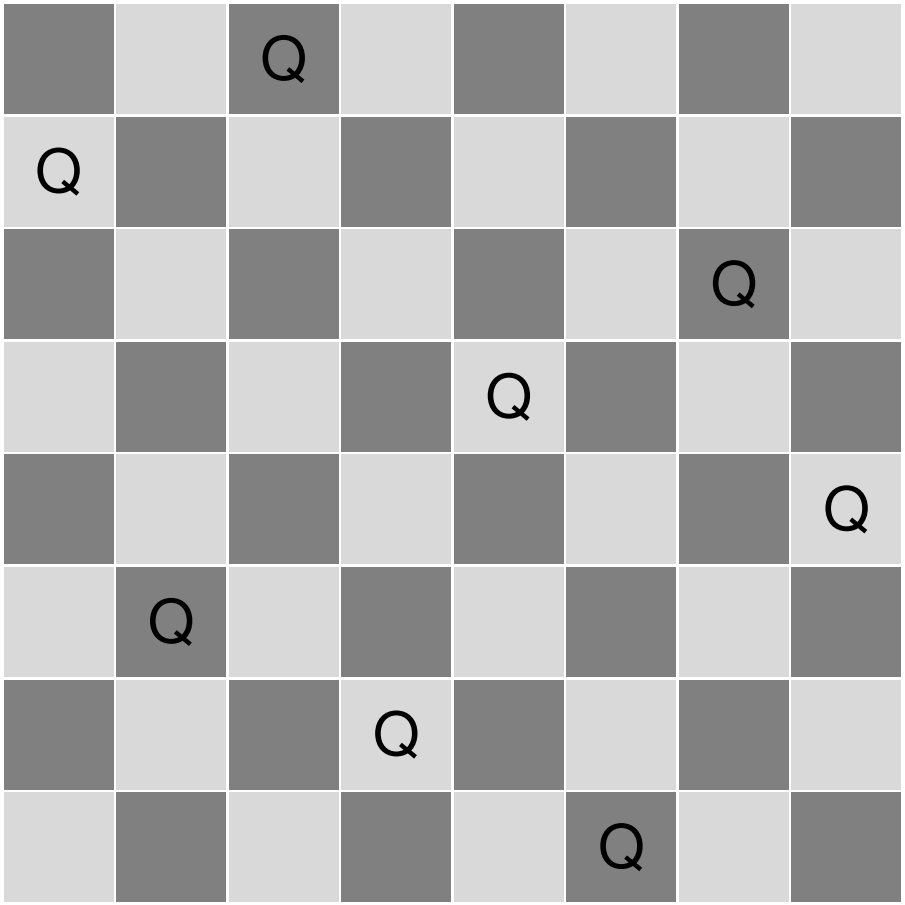
Ocho reinas, todas las soluciones



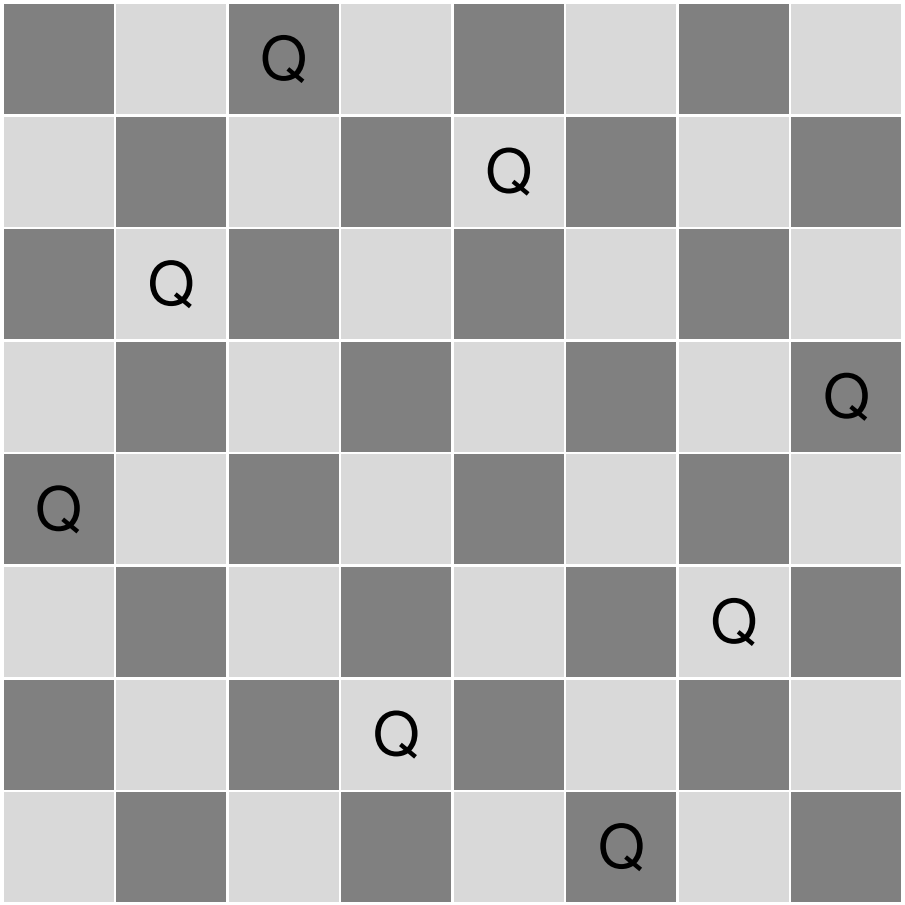
Ocho reinas, todas las soluciones



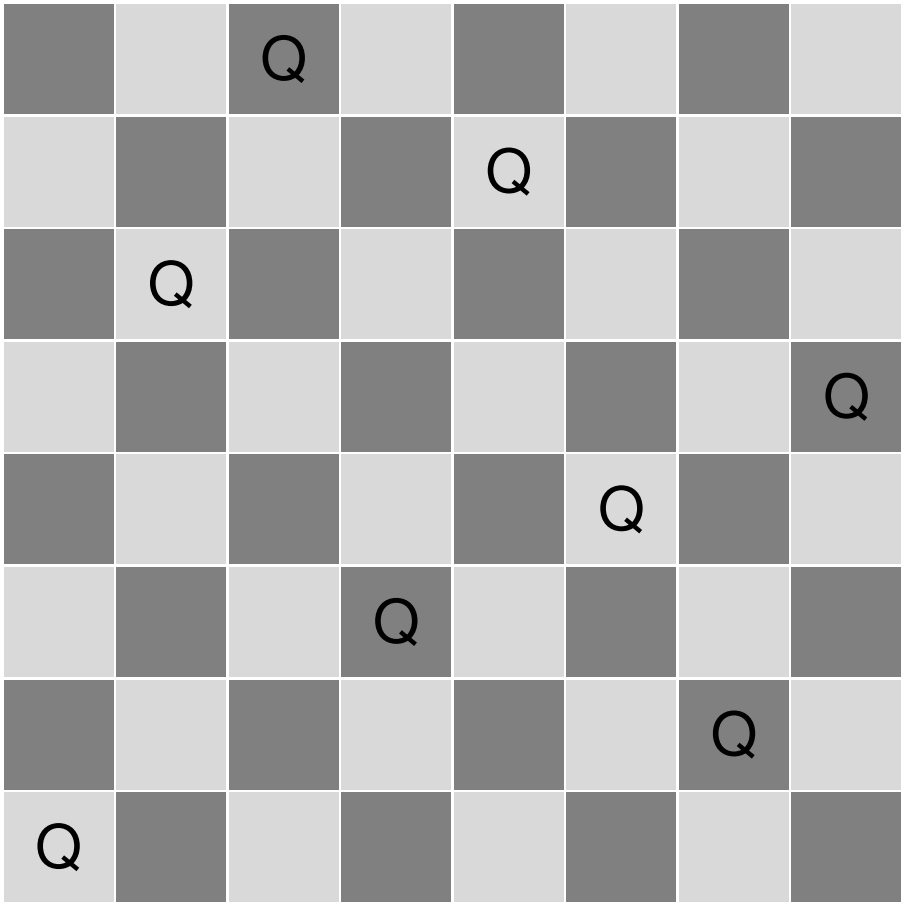
Ocho reinas, todas las soluciones



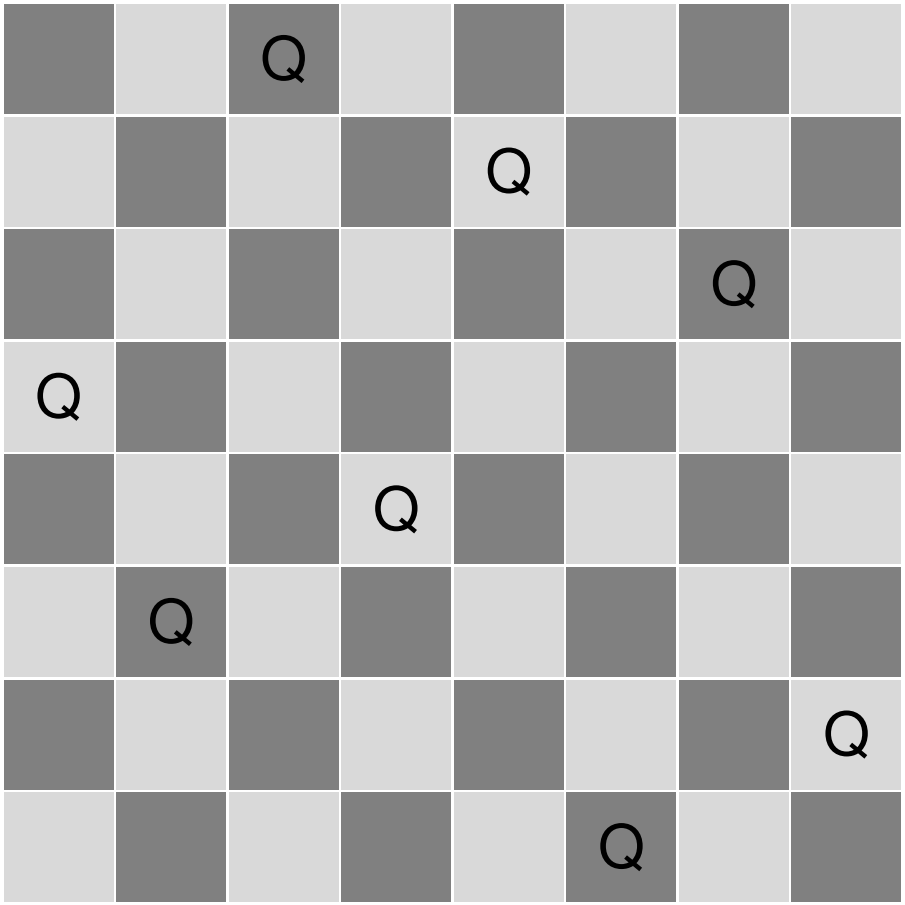
Ocho reinas, todas las soluciones



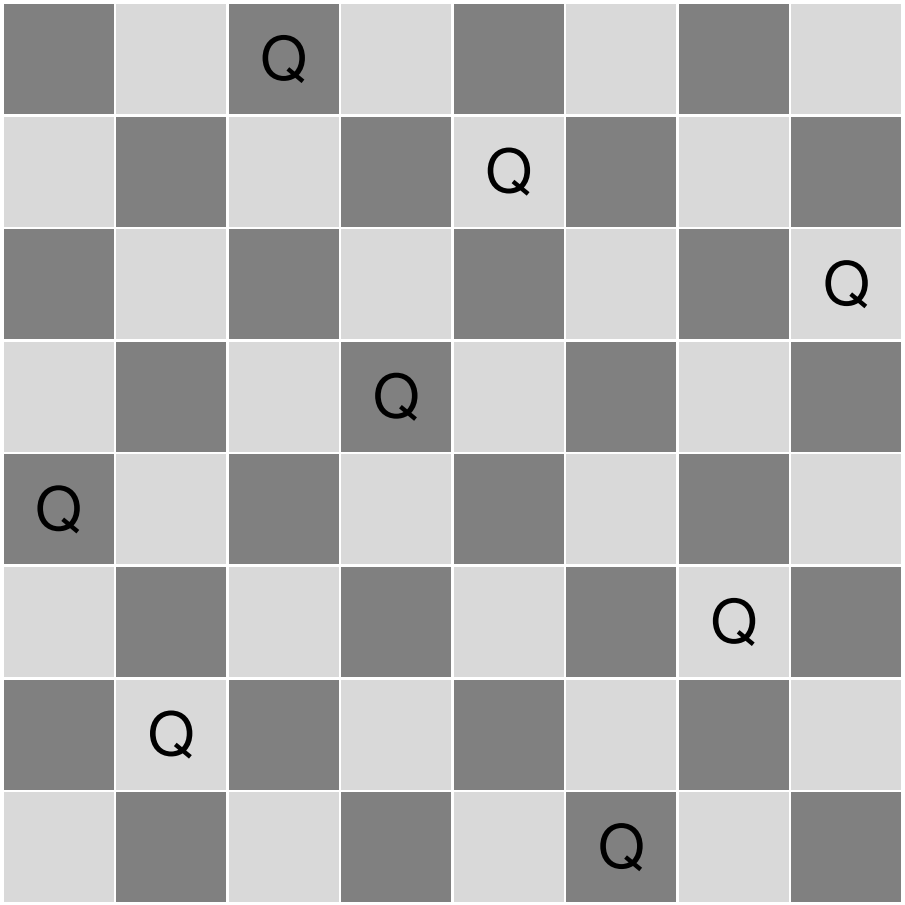
Ocho reinas, todas las soluciones



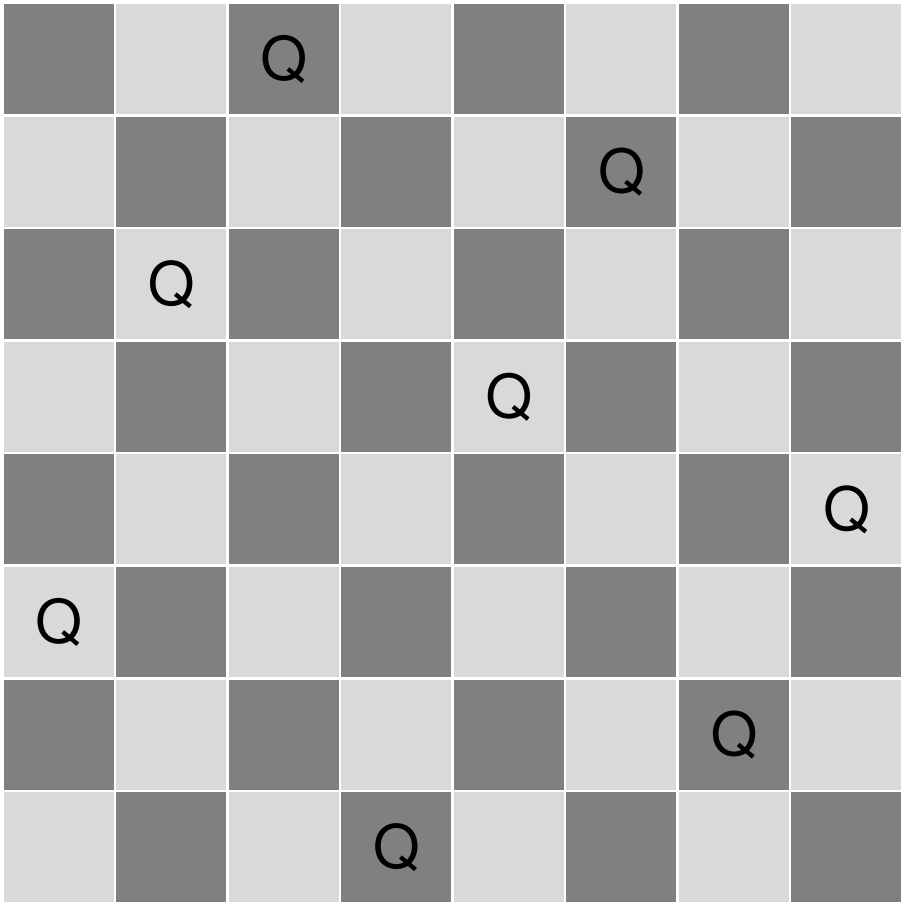
Ocho reinas, todas las soluciones



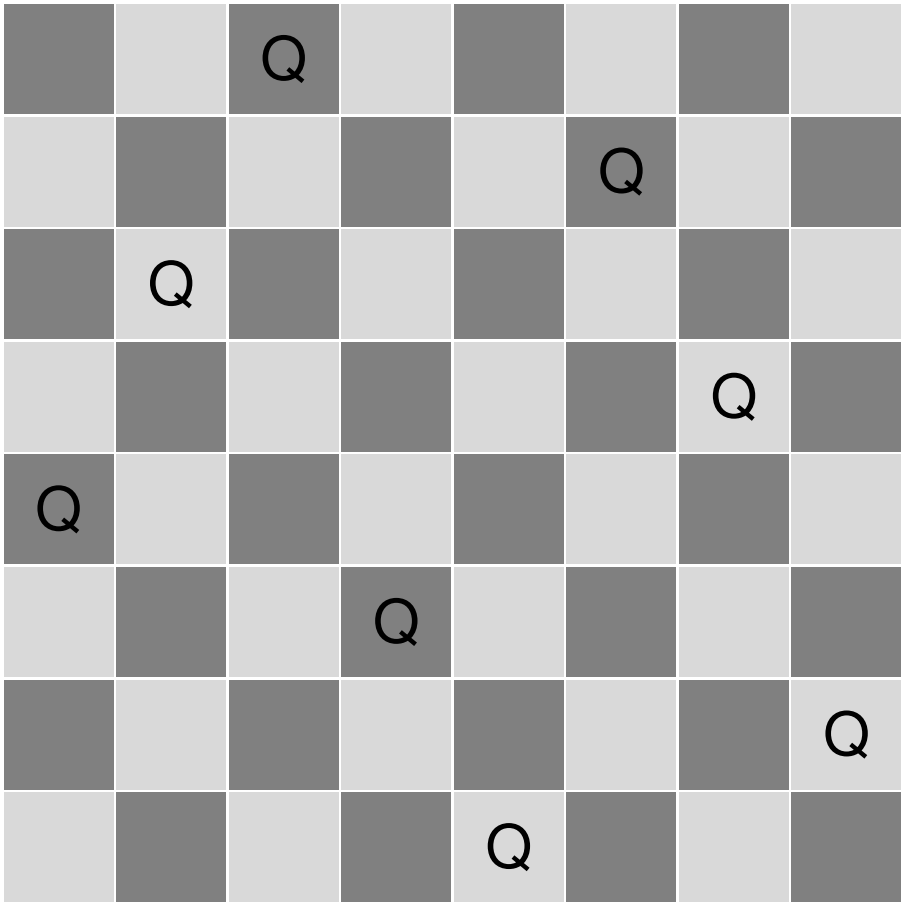
Ocho reinas, todas las soluciones



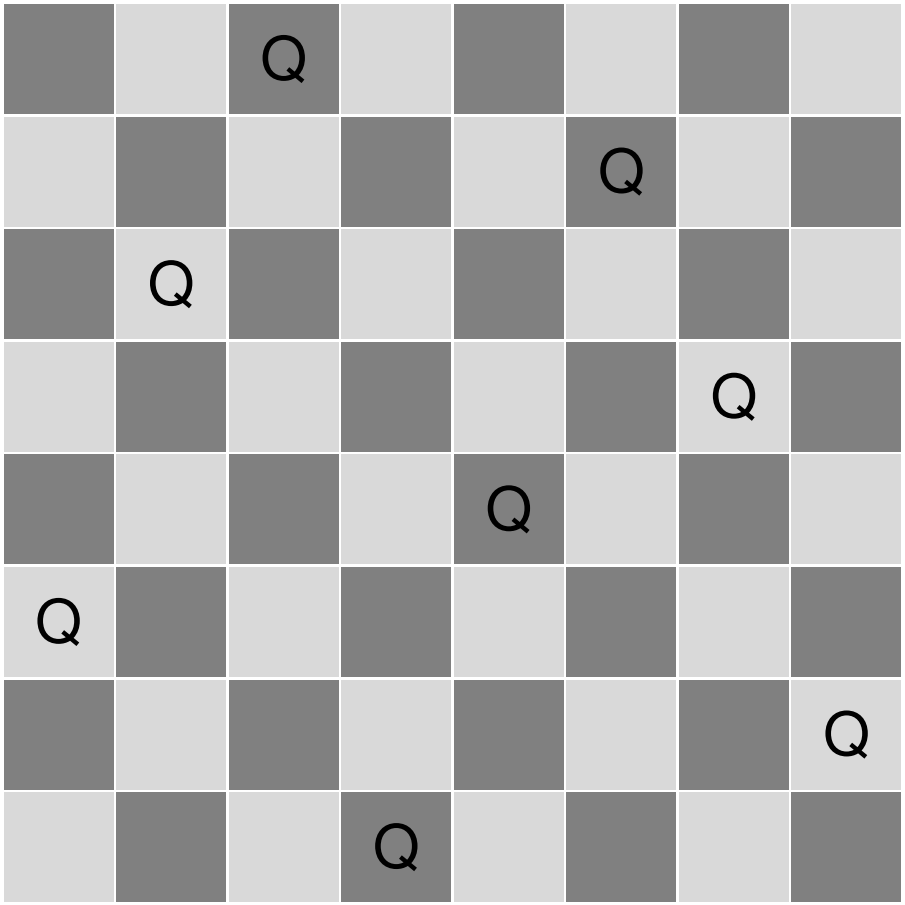
Ocho reinas, todas las soluciones



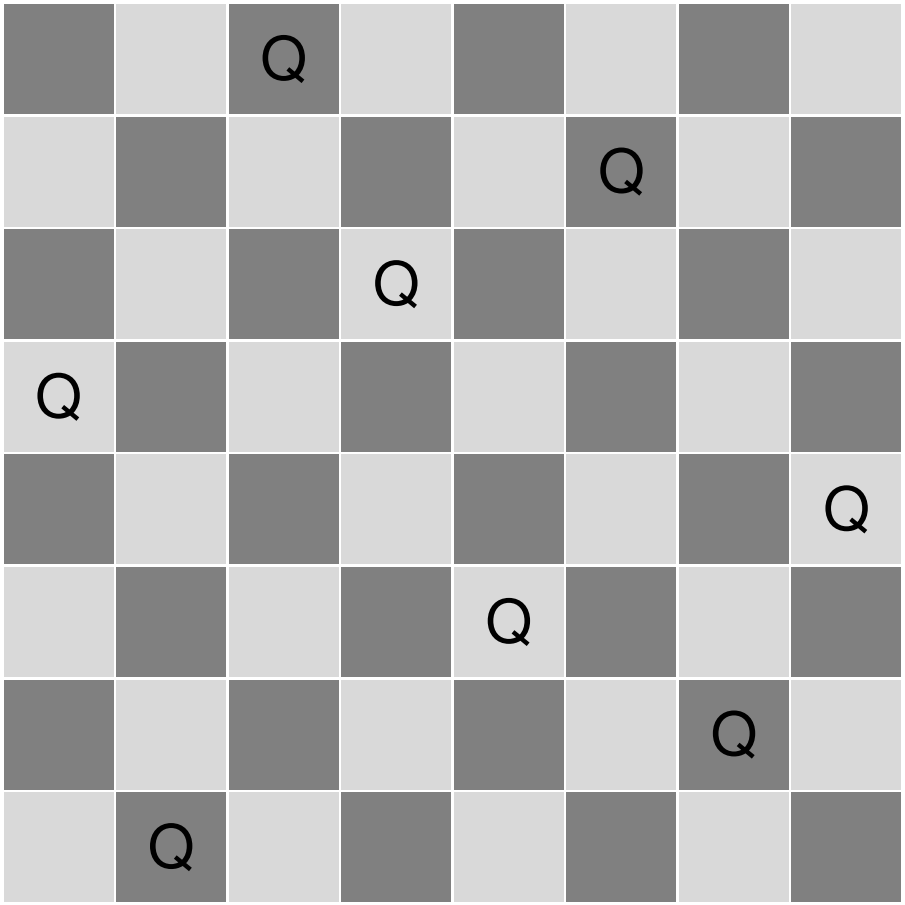
Ocho reinas, todas las soluciones



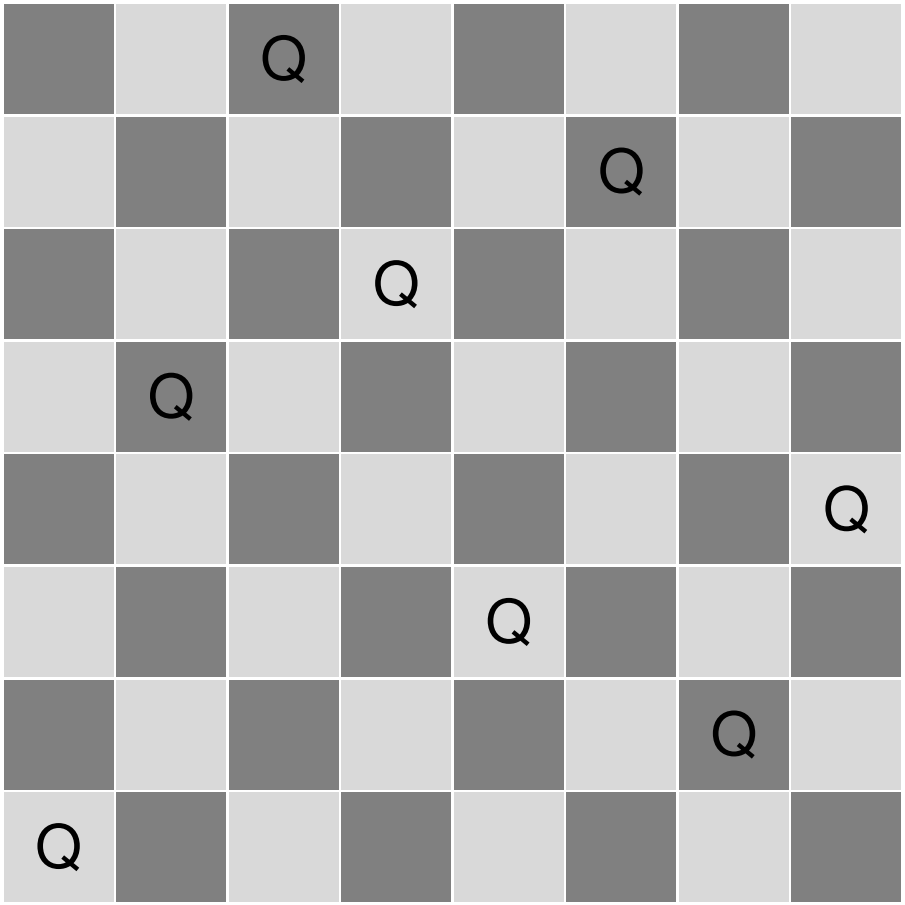
Ocho reinas, todas las soluciones



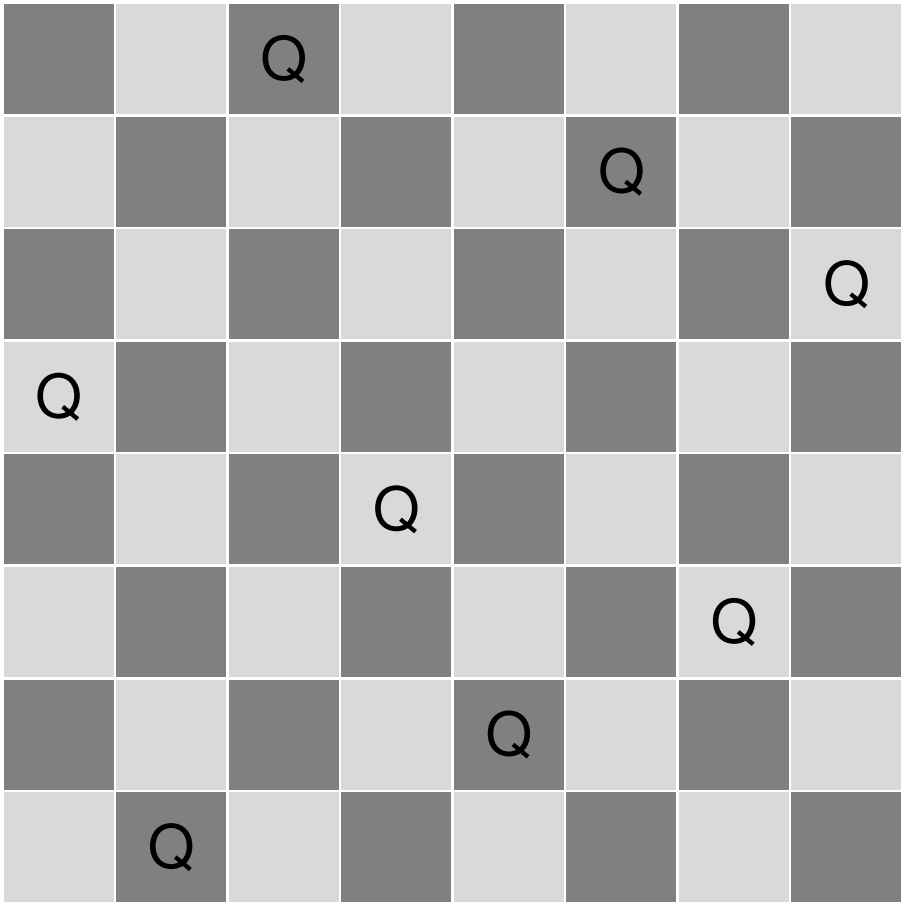
Ocho reinas, todas las soluciones



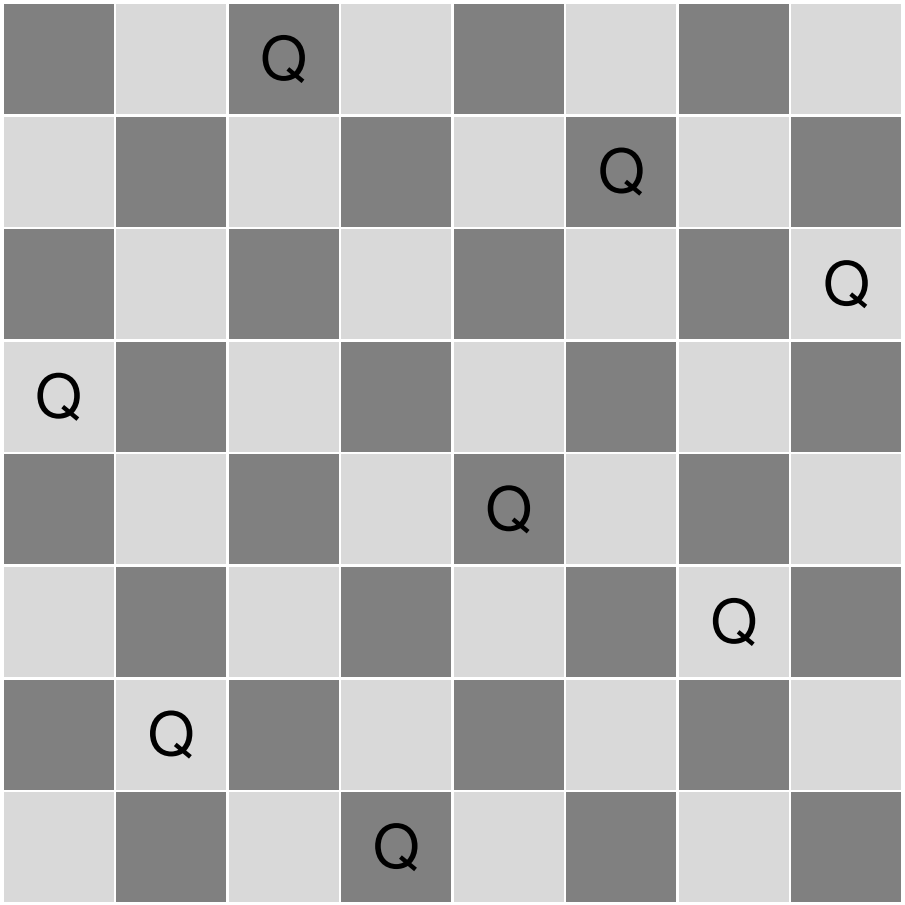
Ocho reinas, todas las soluciones



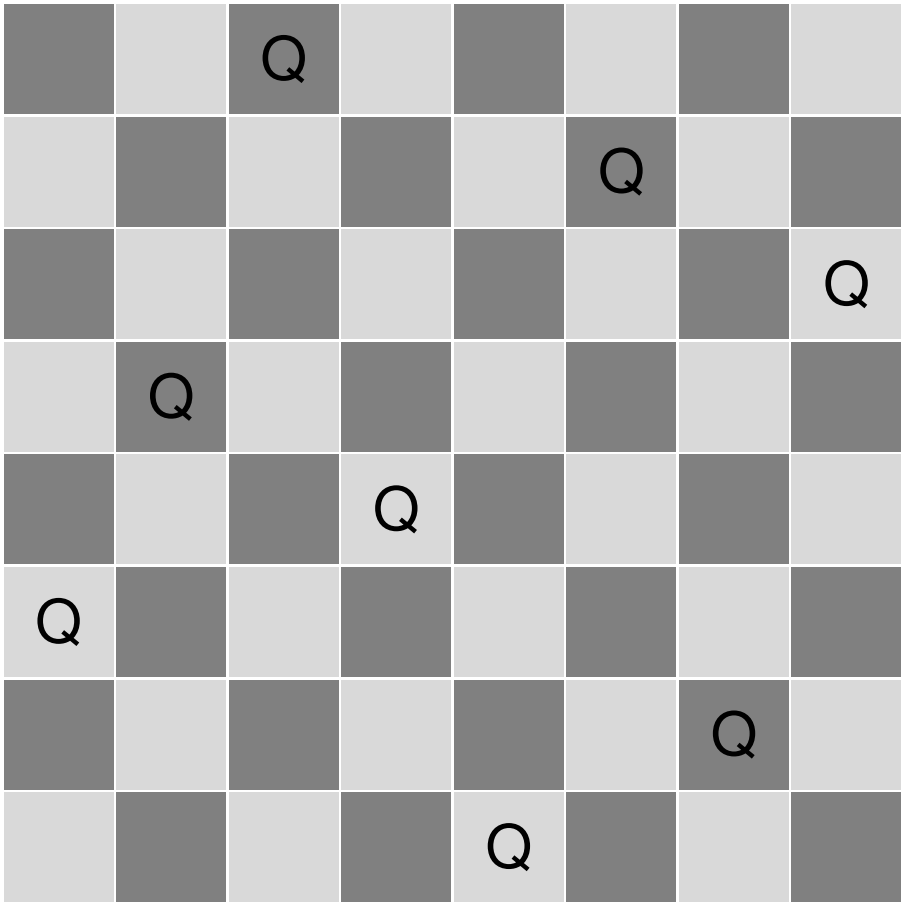
Ocho reinas, todas las soluciones



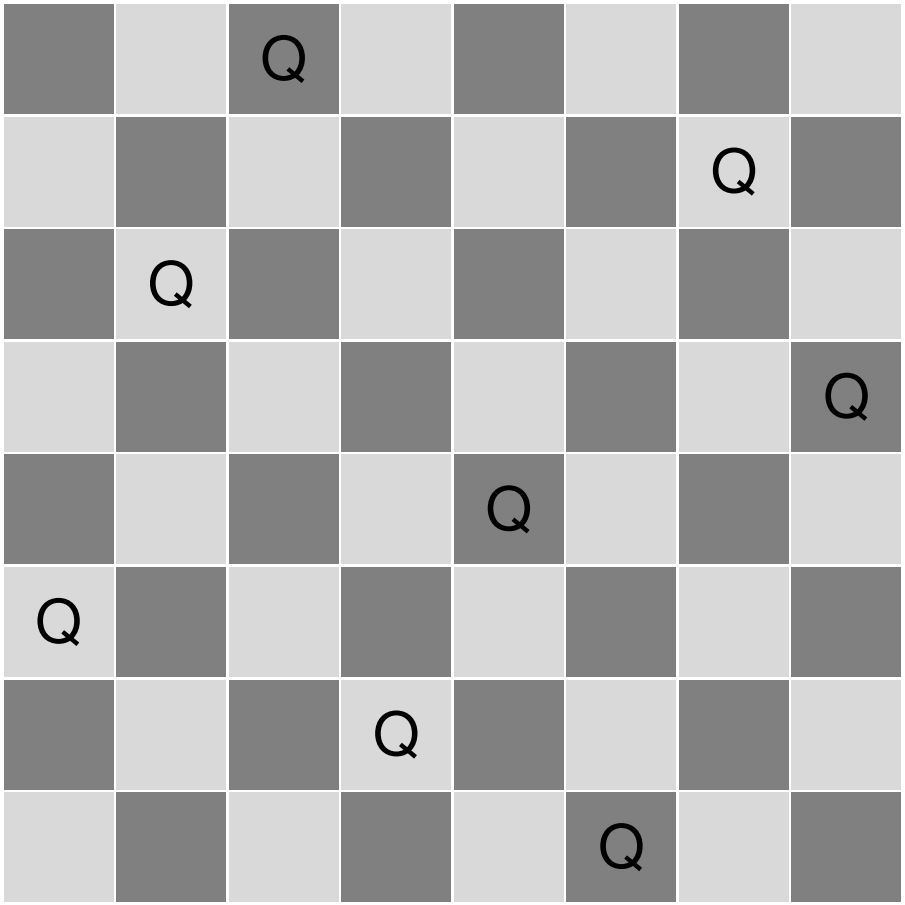
Ocho reinas, todas las soluciones



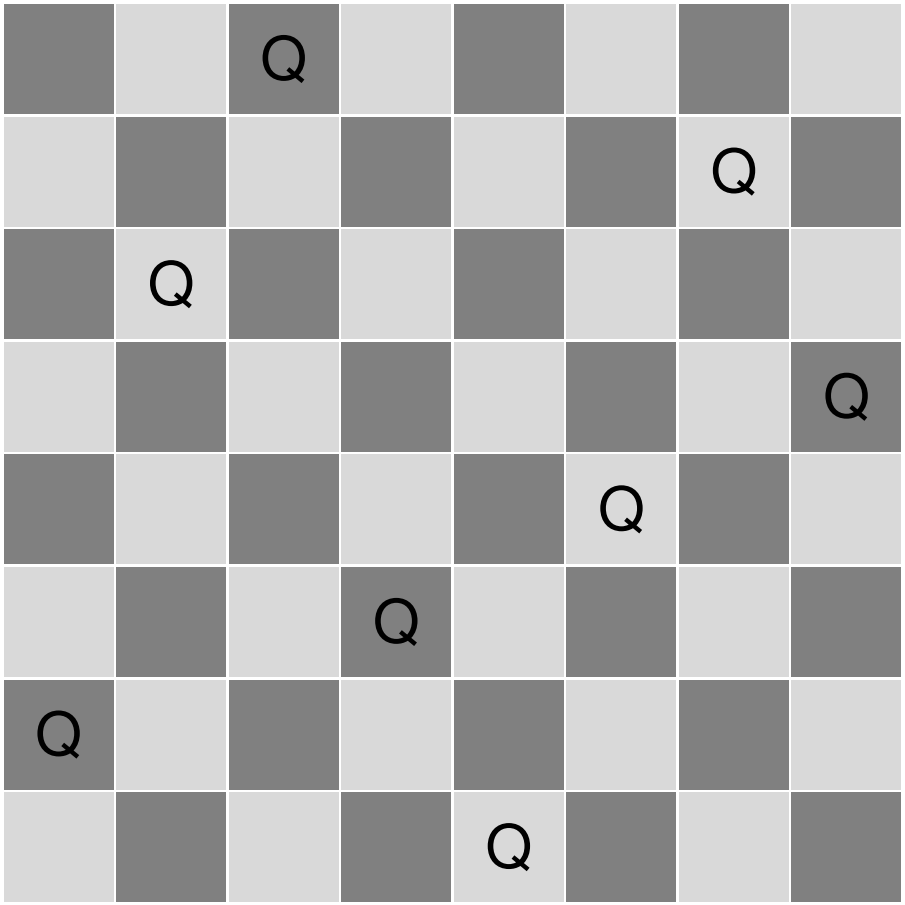
Ocho reinas, todas las soluciones



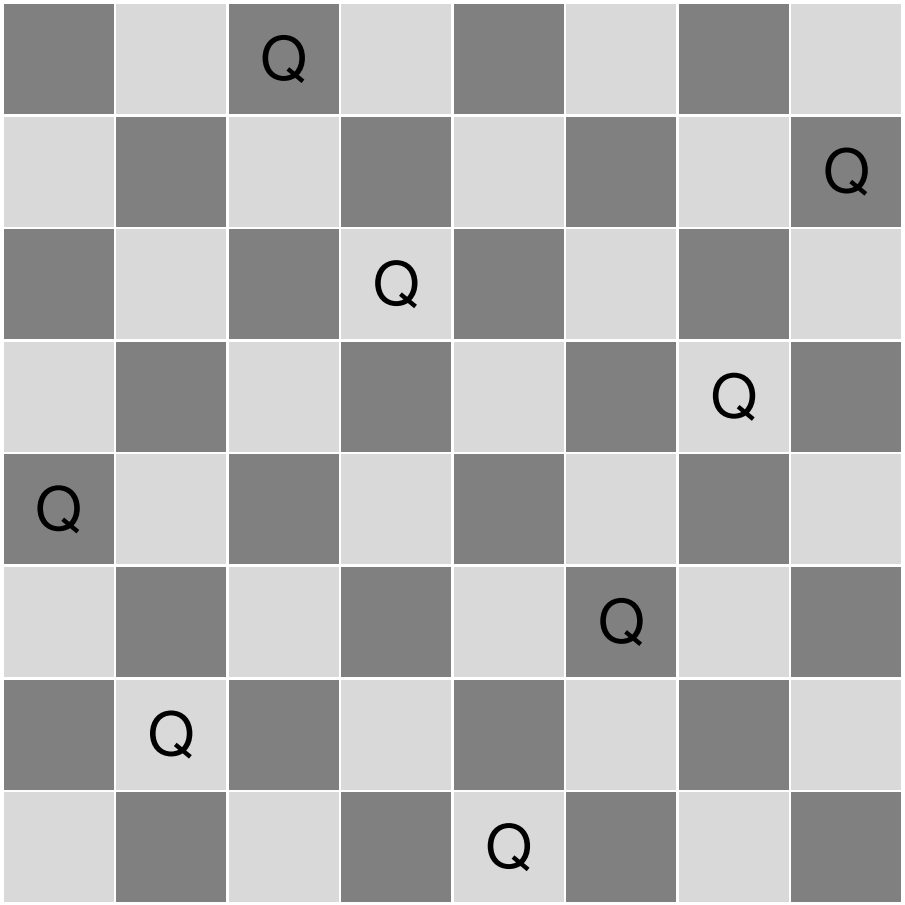
Ocho reinas, todas las soluciones



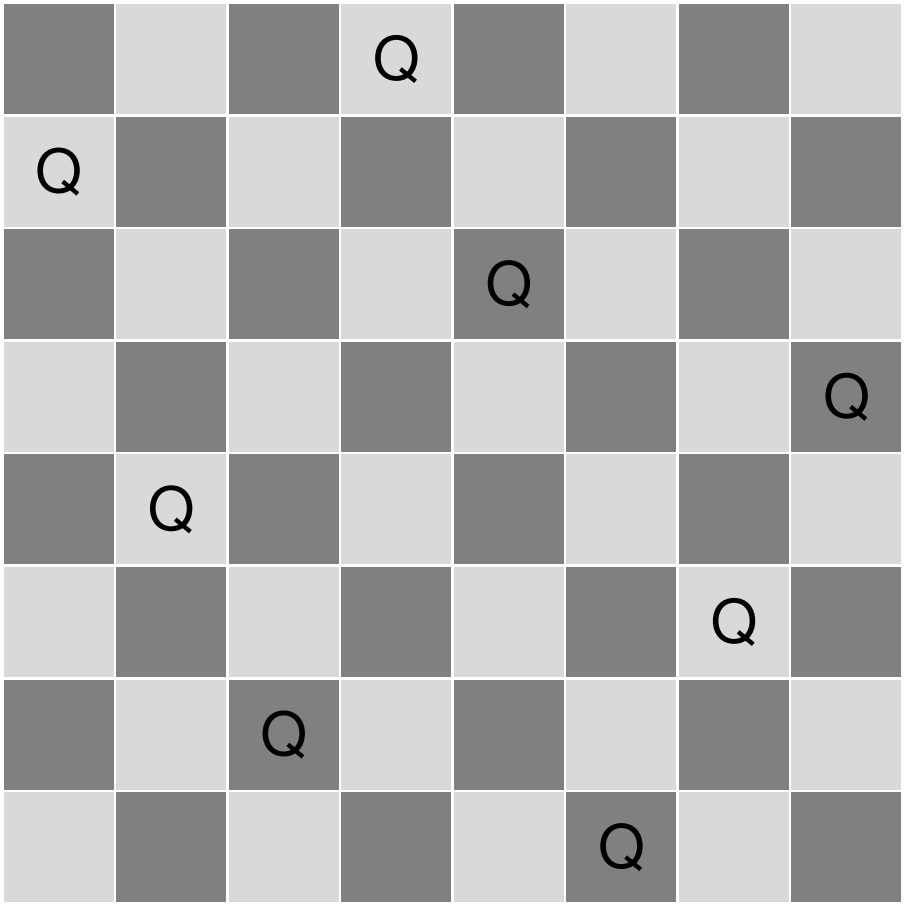
Ocho reinas, todas las soluciones



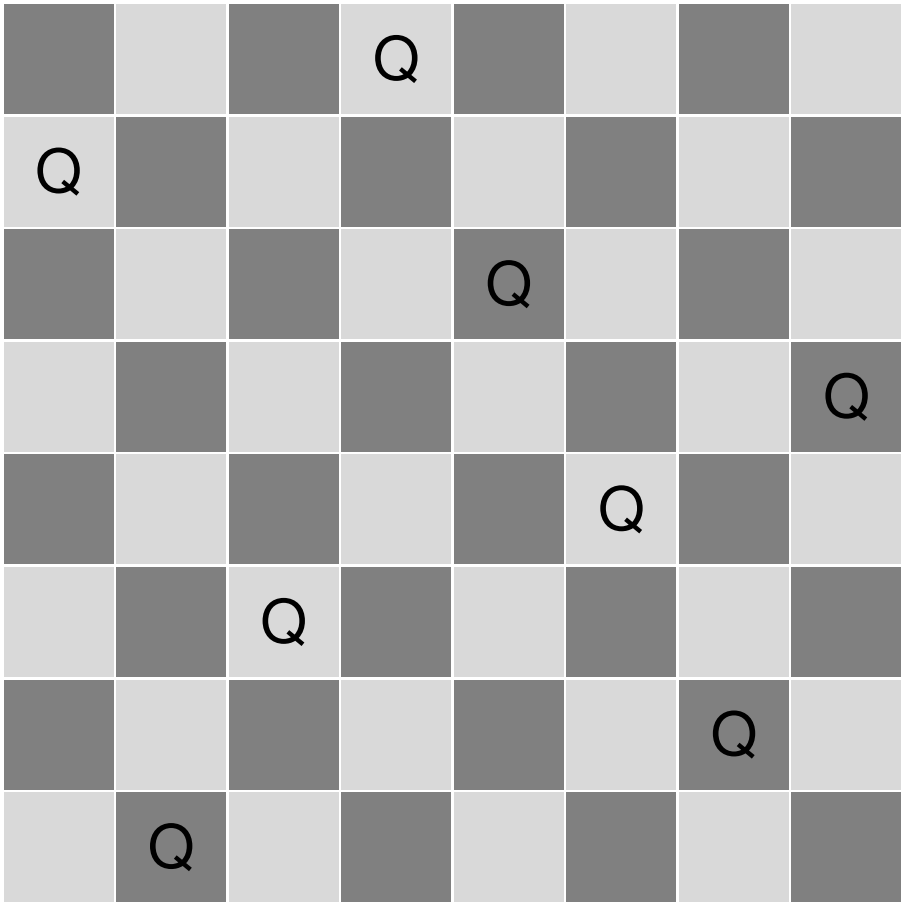
Ocho reinas, todas las soluciones



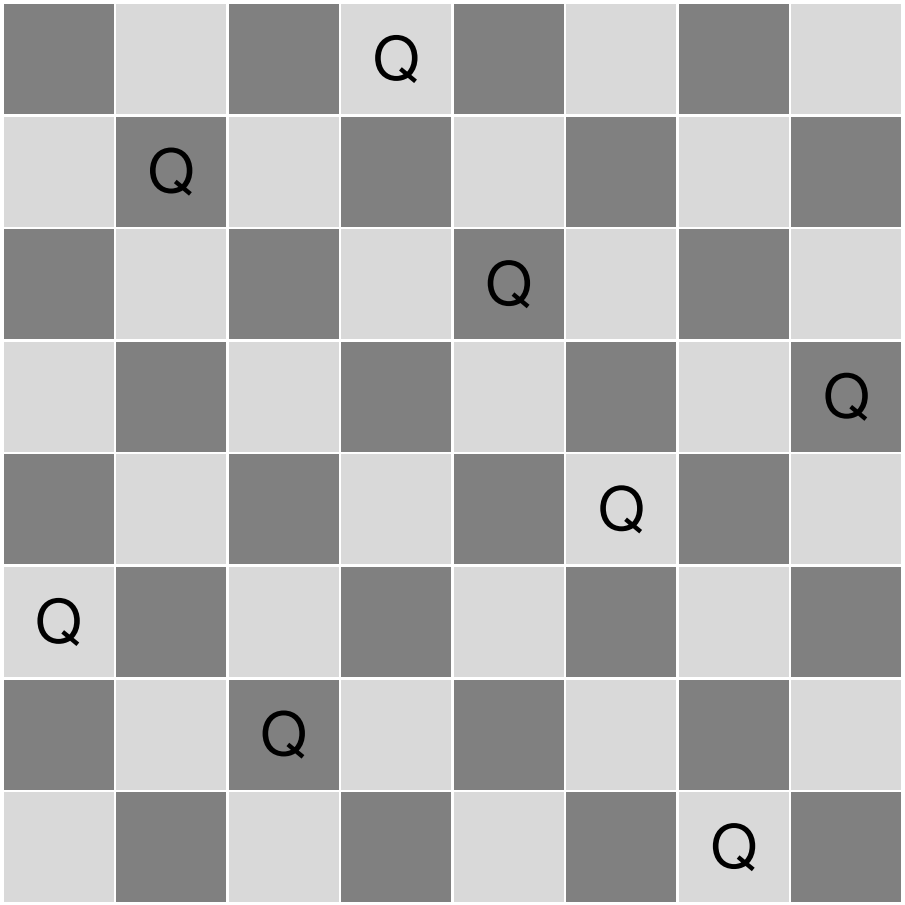
Ocho reinas, todas las soluciones



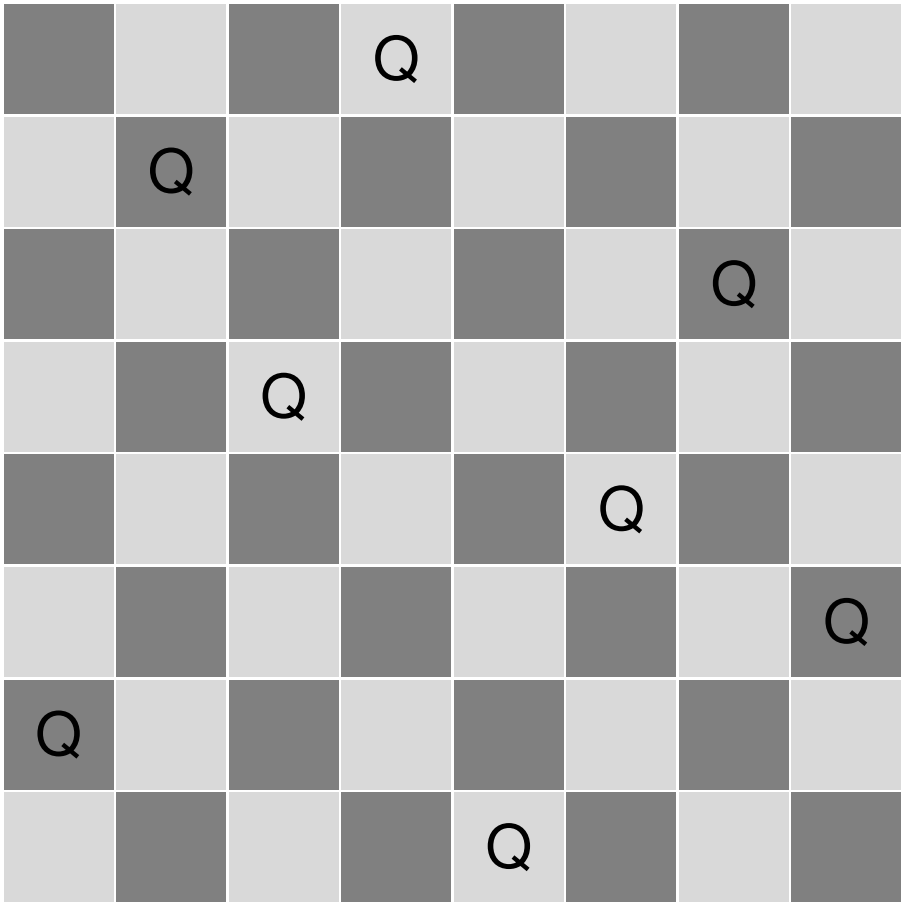
Ocho reinas, todas las soluciones



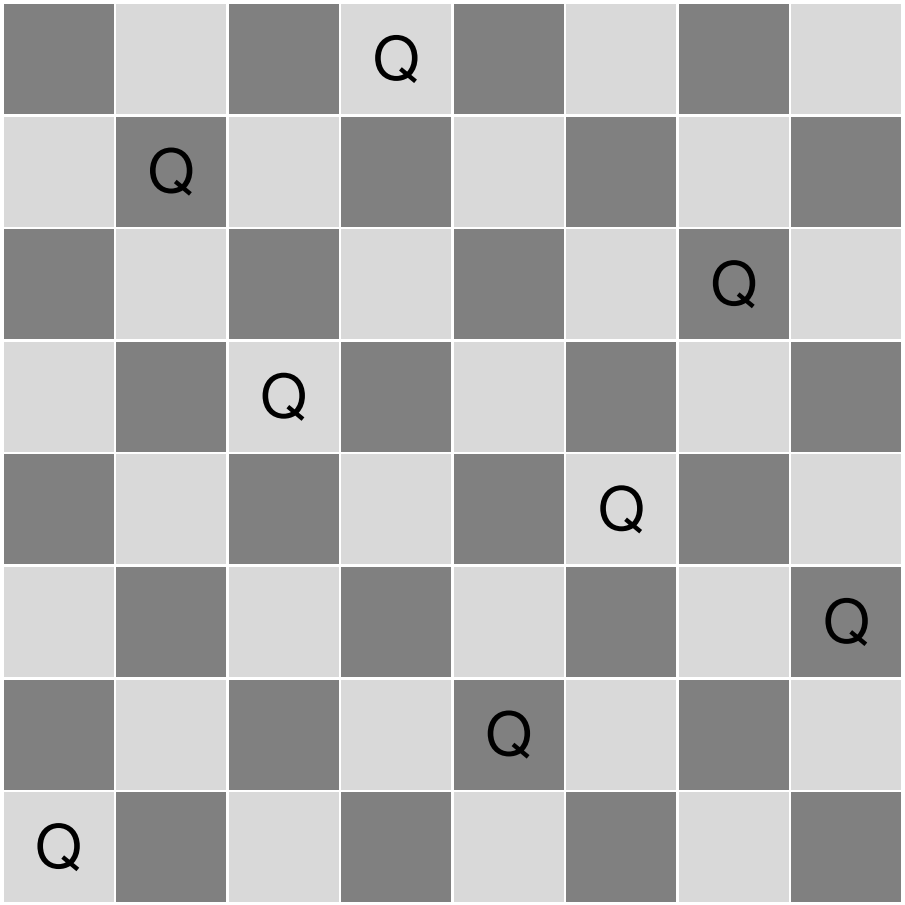
Ocho reinas, todas las soluciones



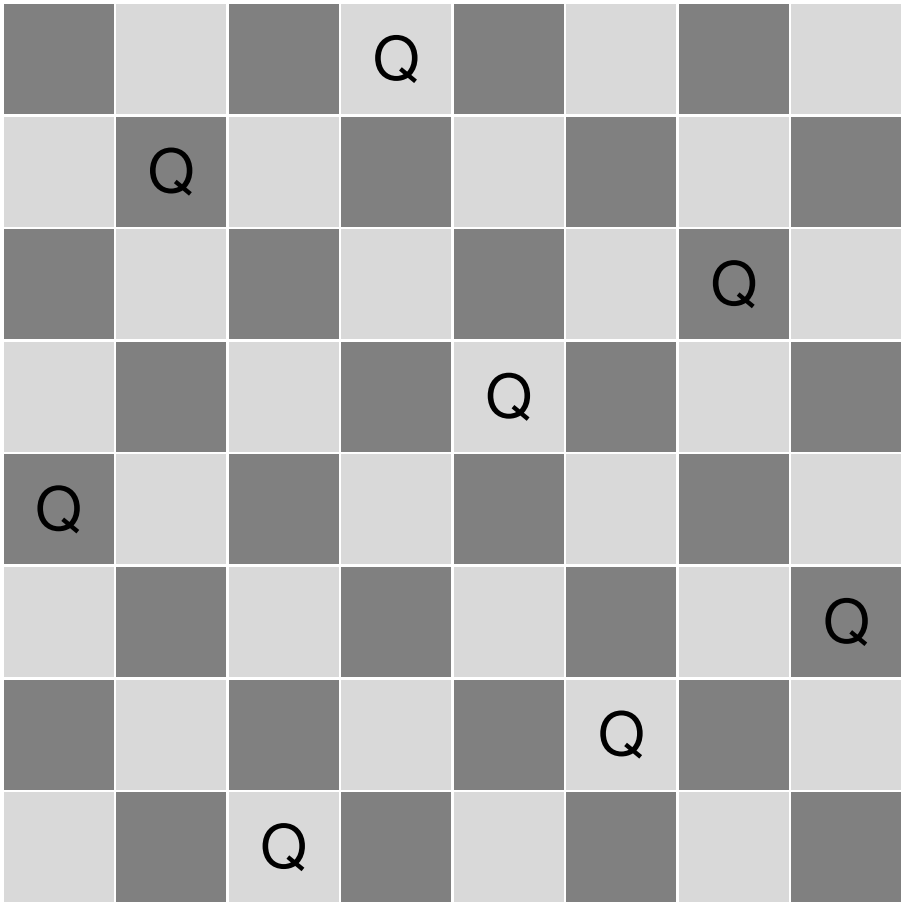
Ocho reinas, todas las soluciones



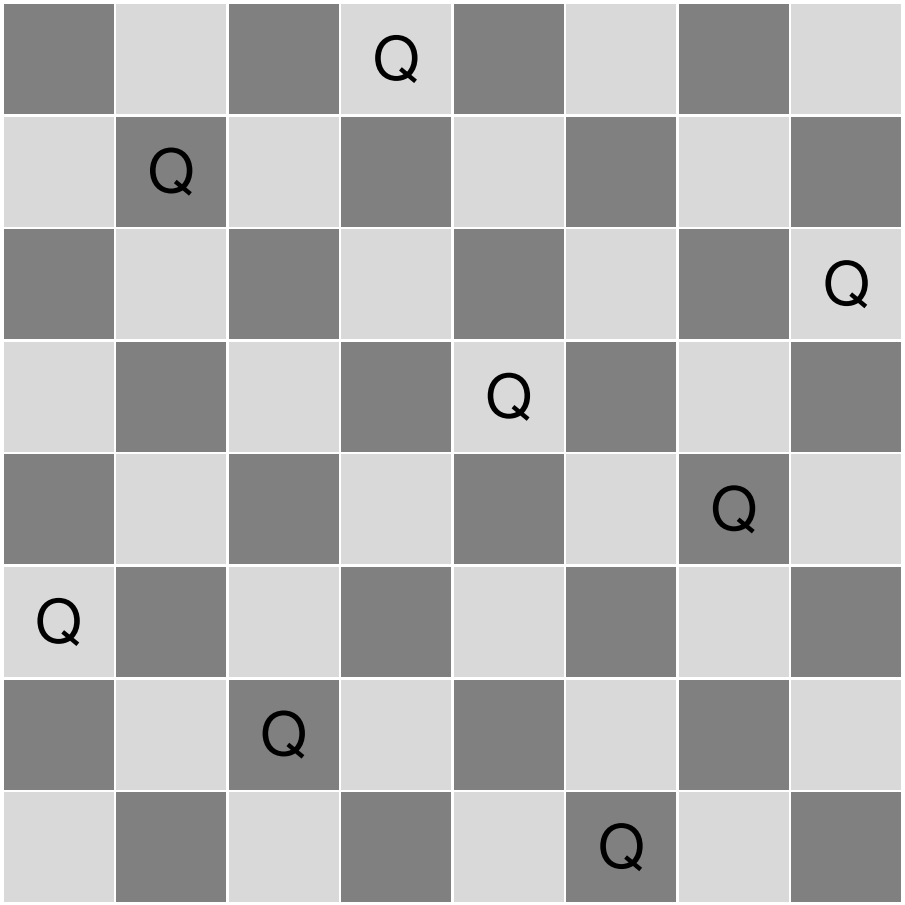
Ocho reinas, todas las soluciones



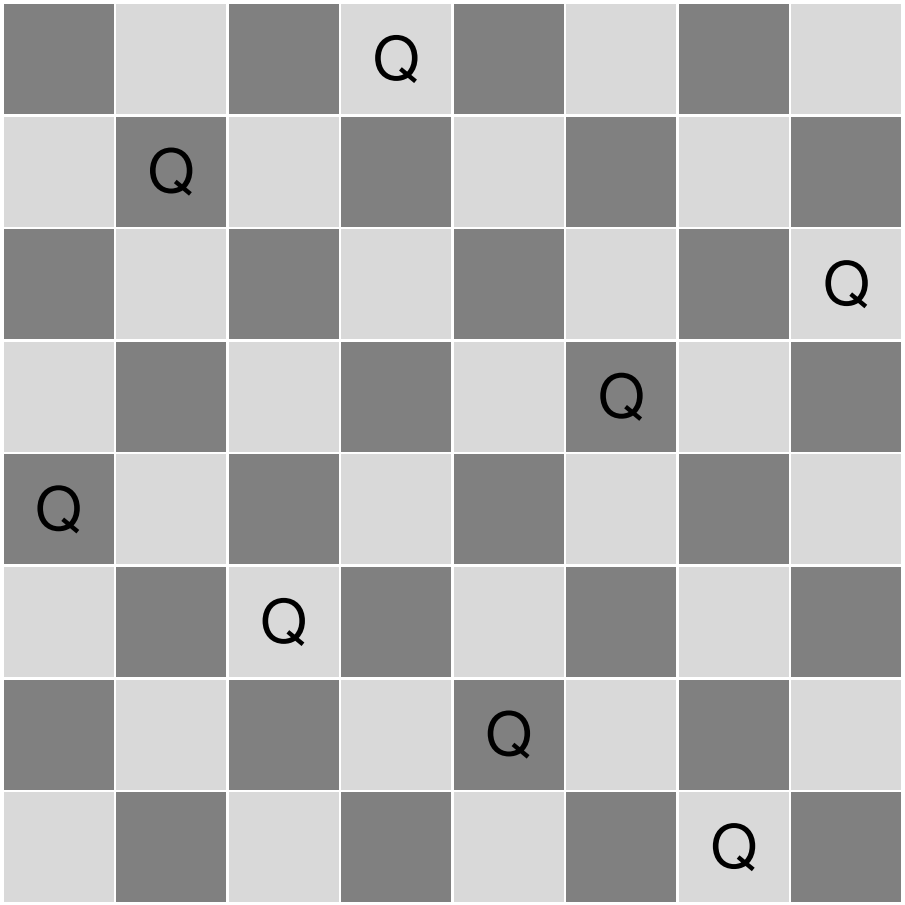
Ocho reinas, todas las soluciones



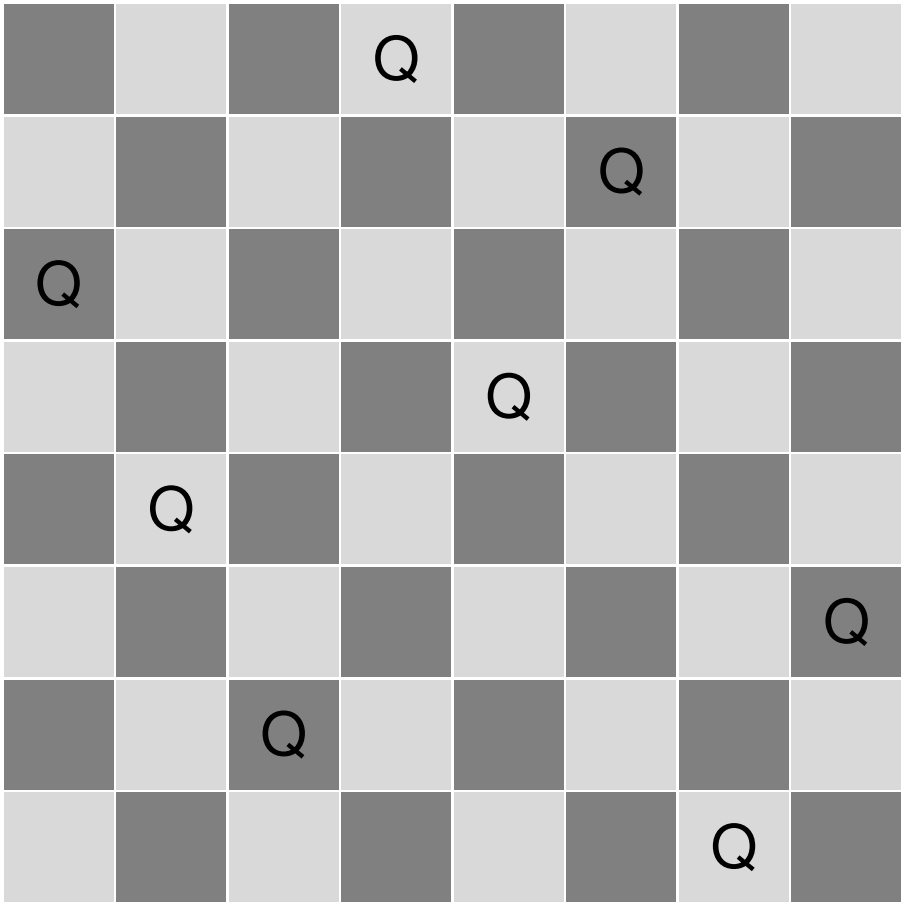
Ocho reinas, todas las soluciones



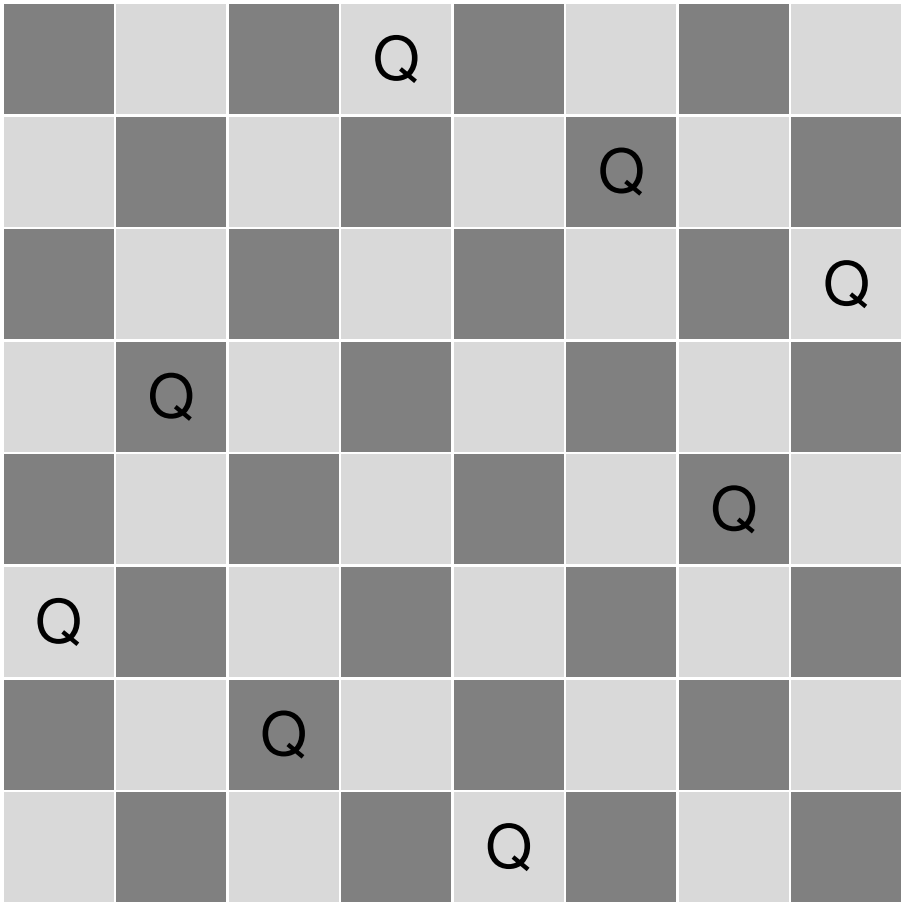
Ocho reinas, todas las soluciones



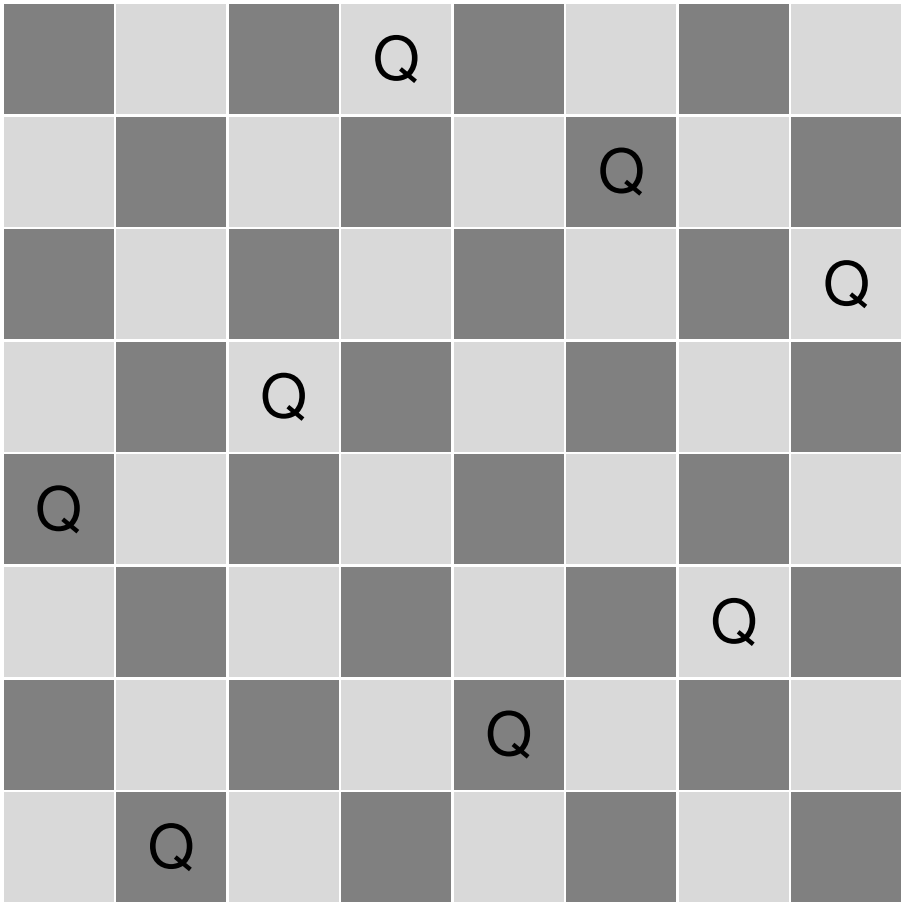
Ocho reinas, todas las soluciones



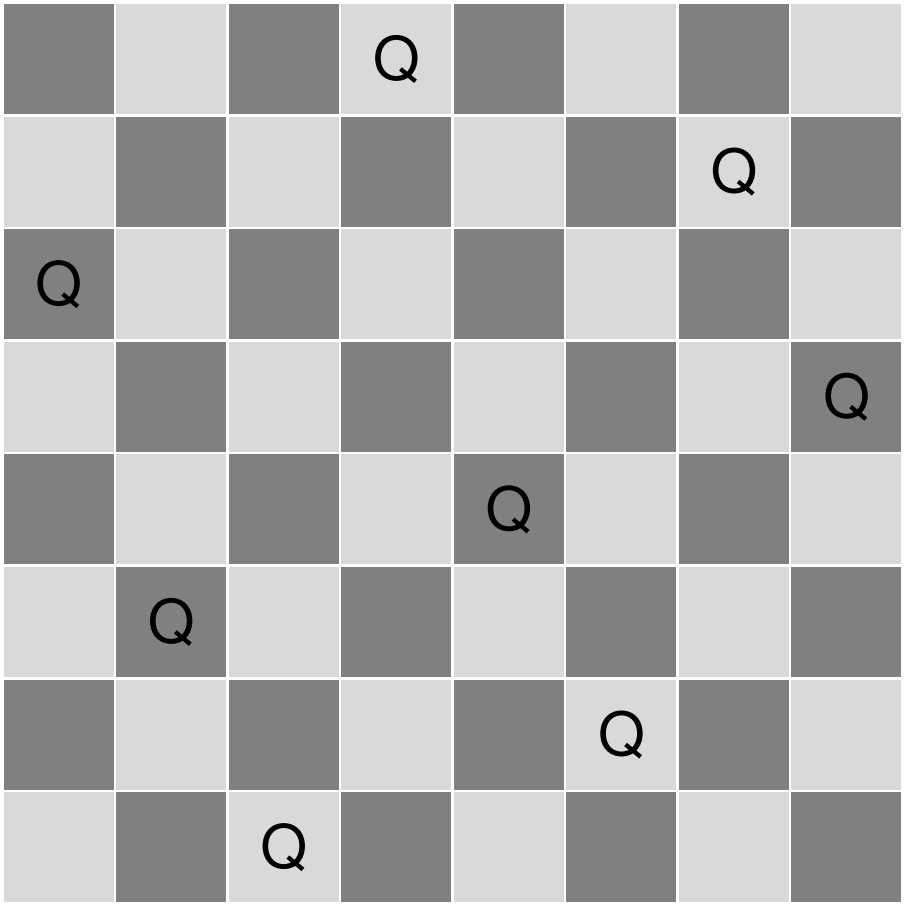
Ocho reinas, todas las soluciones



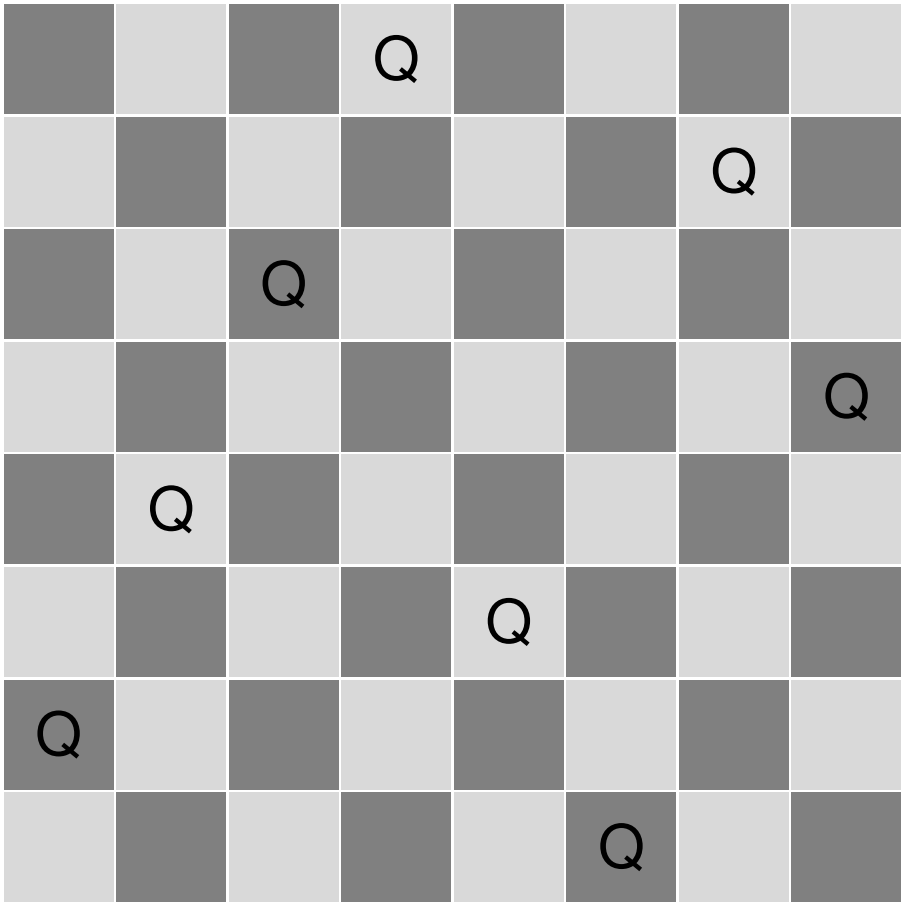
Ocho reinas, todas las soluciones



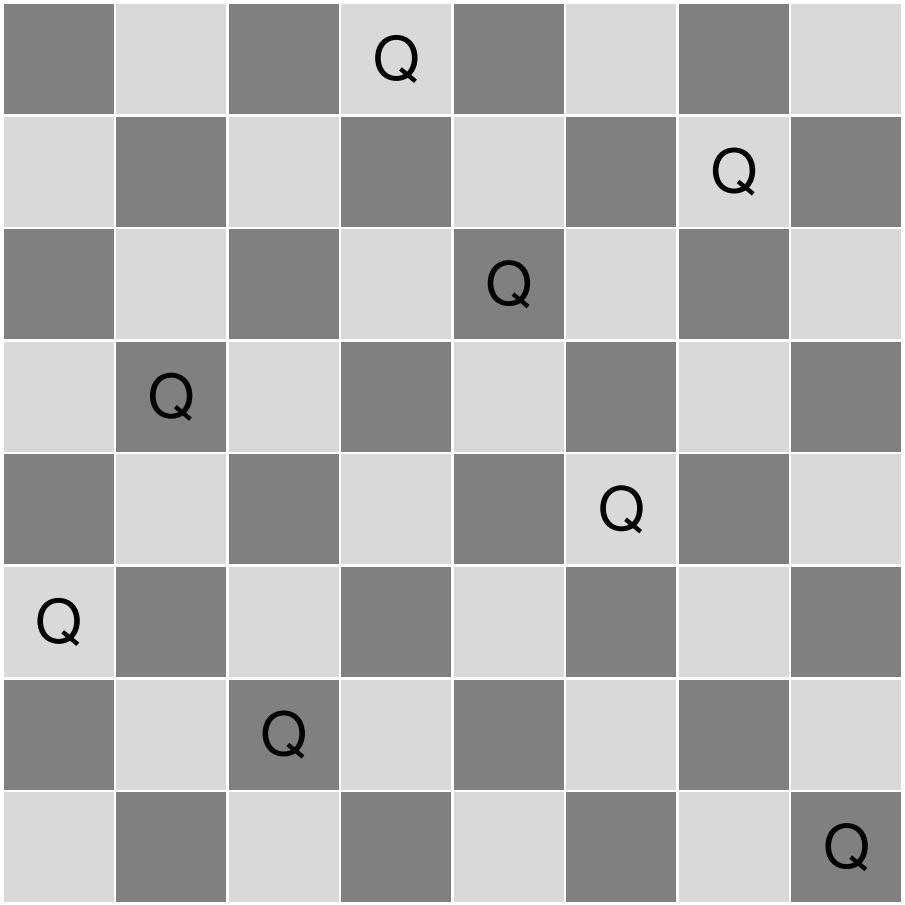
Ocho reinas, todas las soluciones



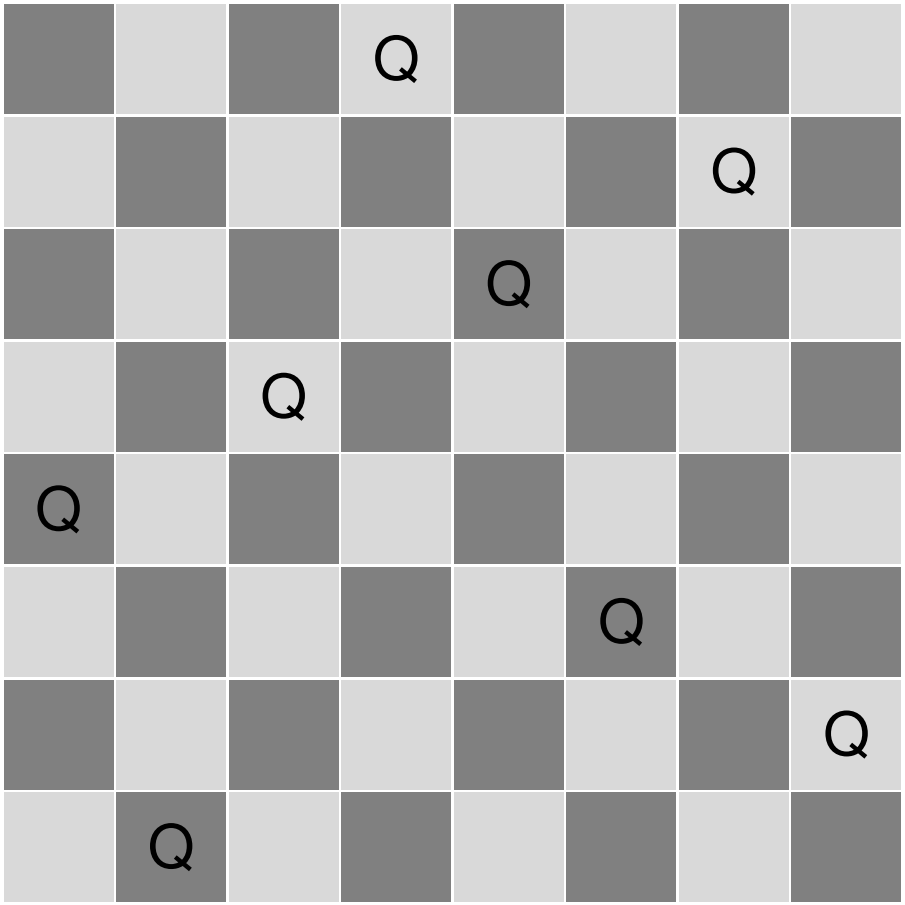
Ocho reinas, todas las soluciones



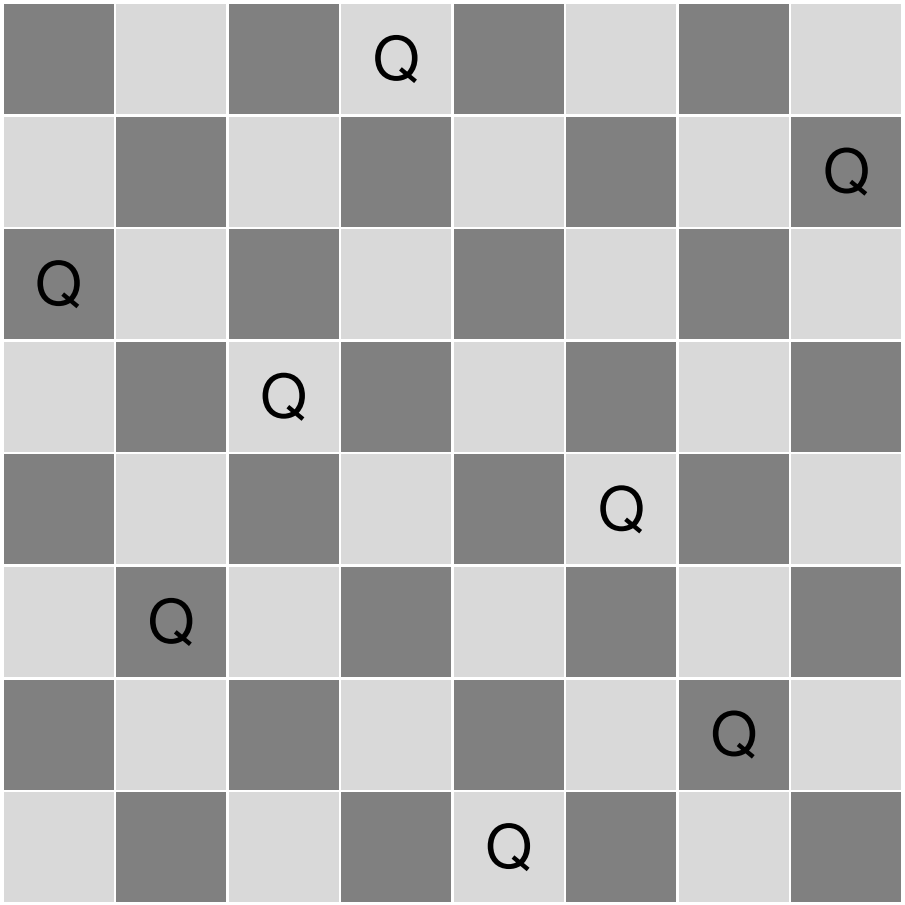
Ocho reinas, todas las soluciones



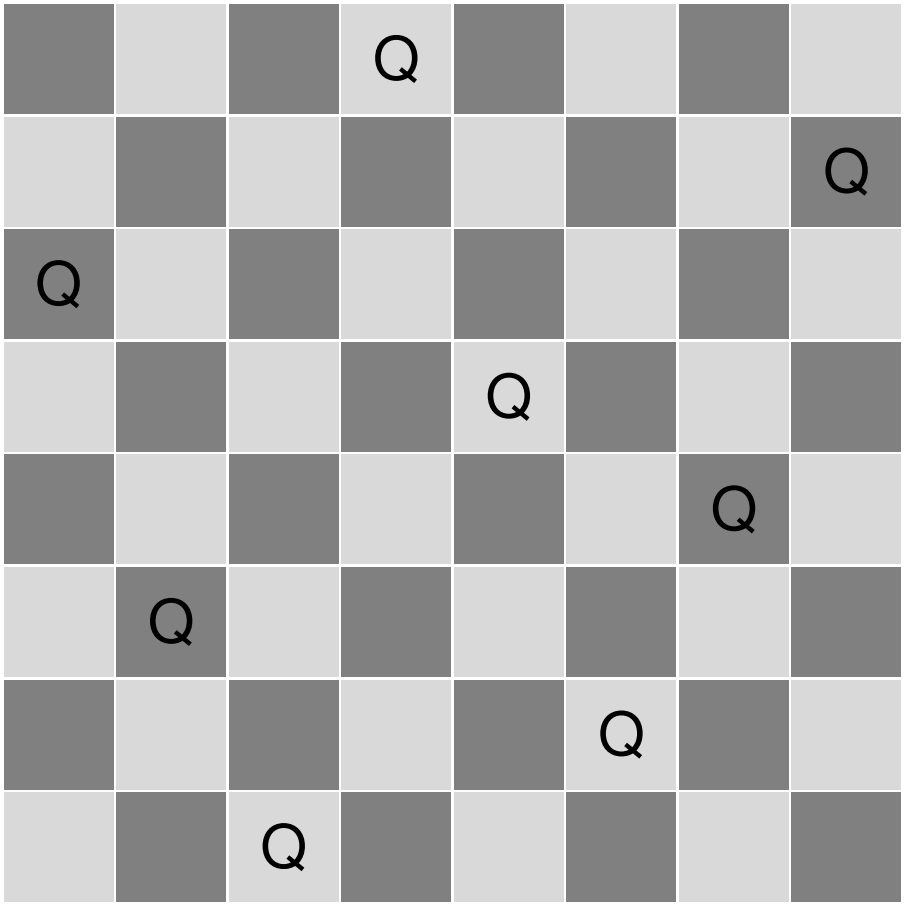
Ocho reinas, todas las soluciones



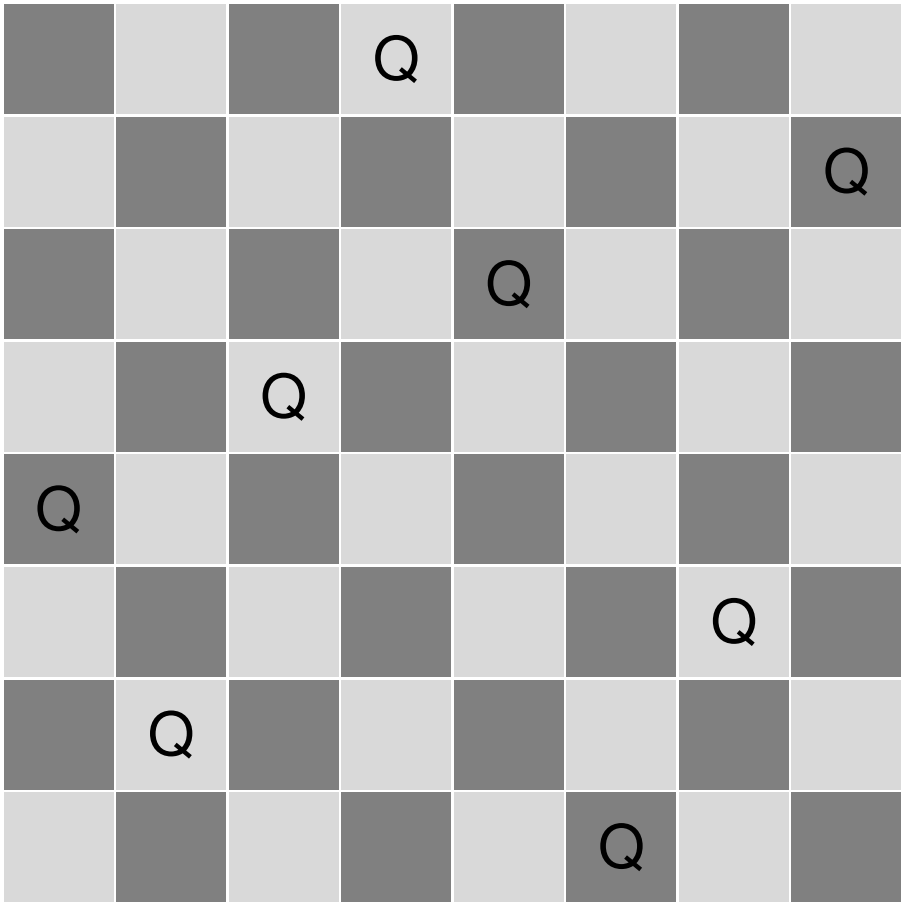
Ocho reinas, todas las soluciones



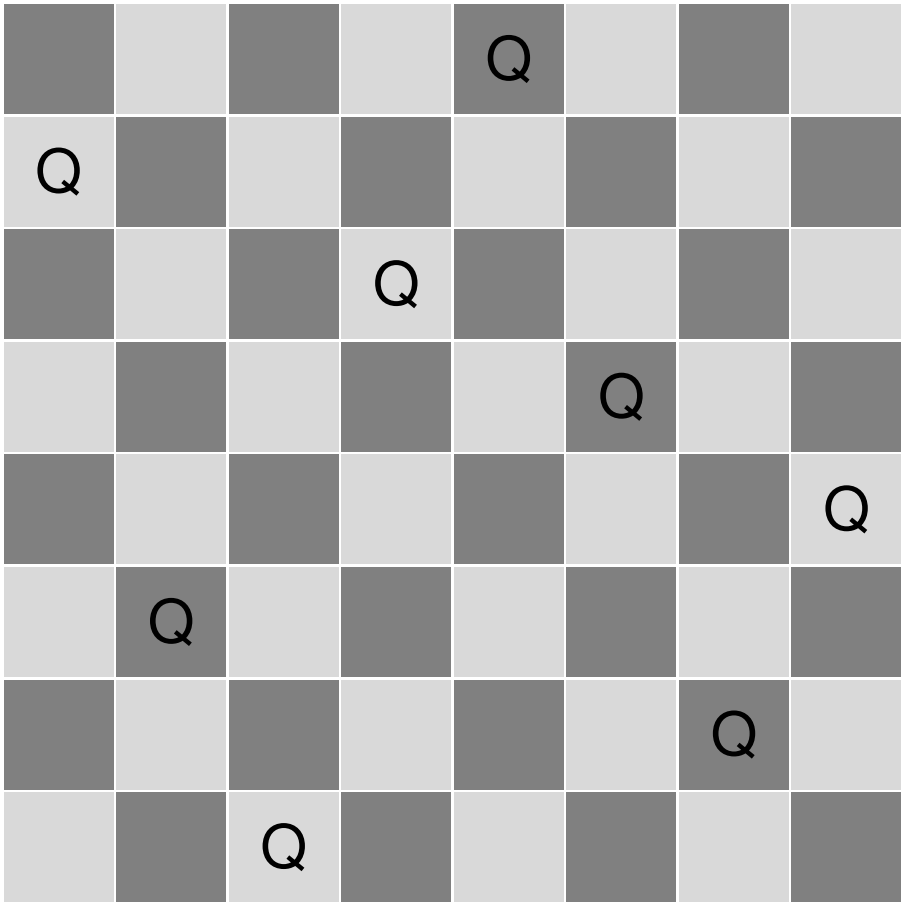
Ocho reinas, todas las soluciones



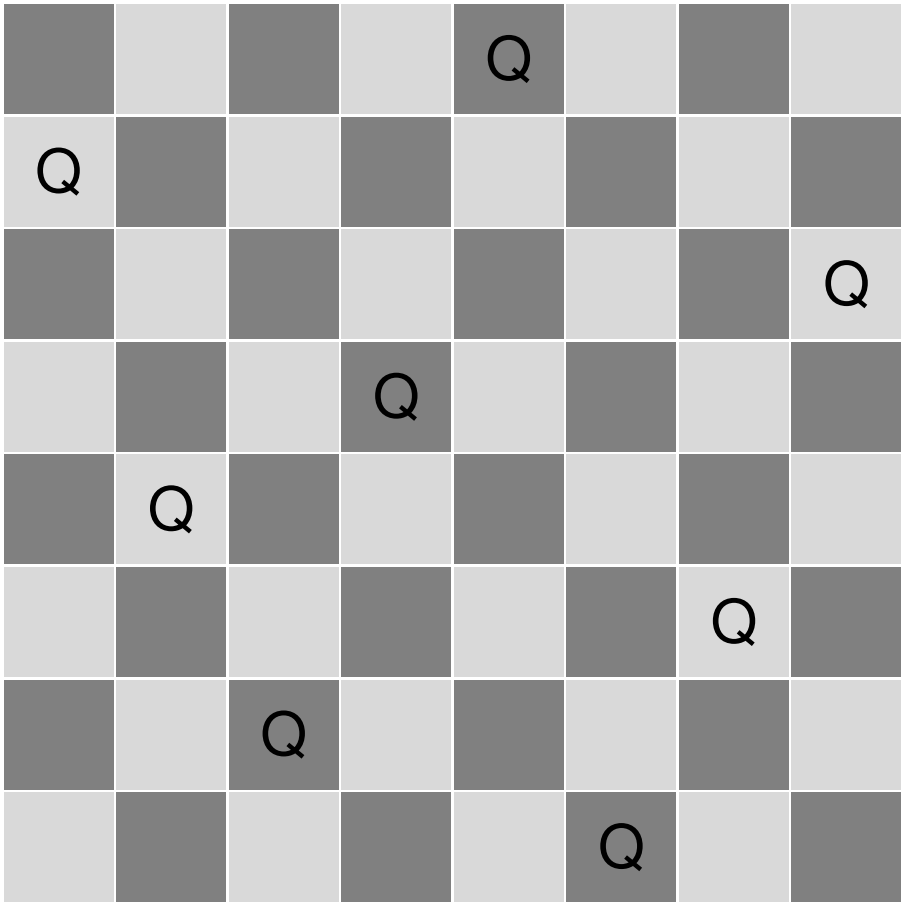
Ocho reinas, todas las soluciones



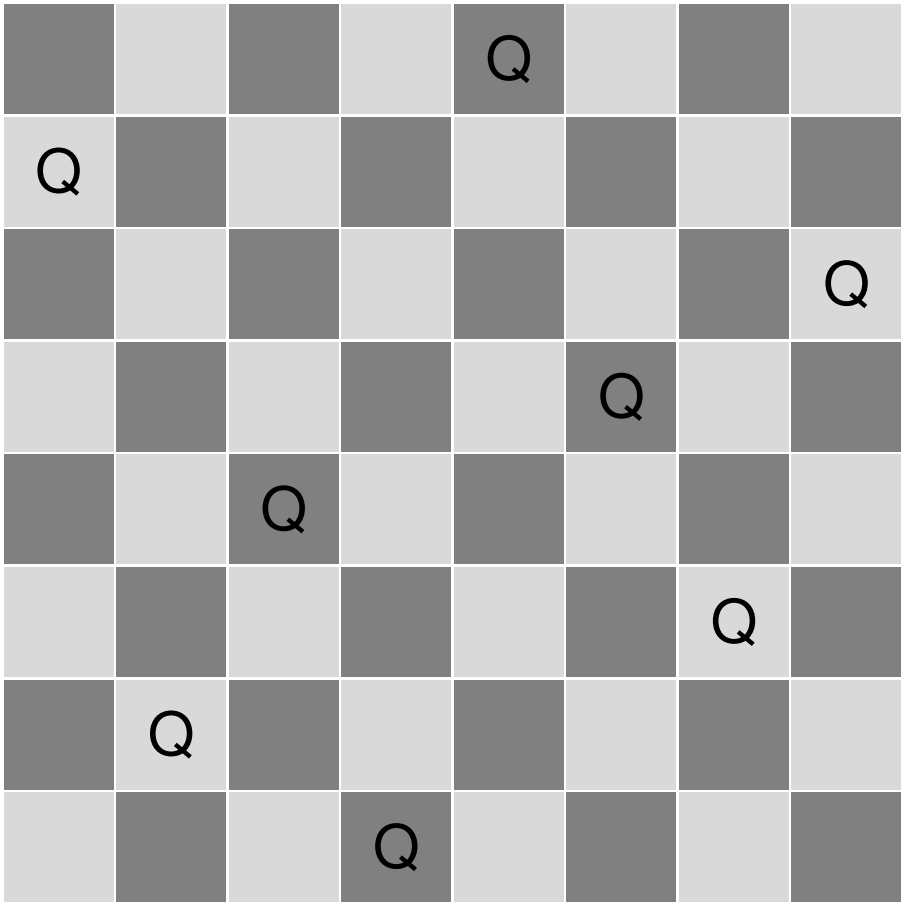
Ocho reinas, todas las soluciones



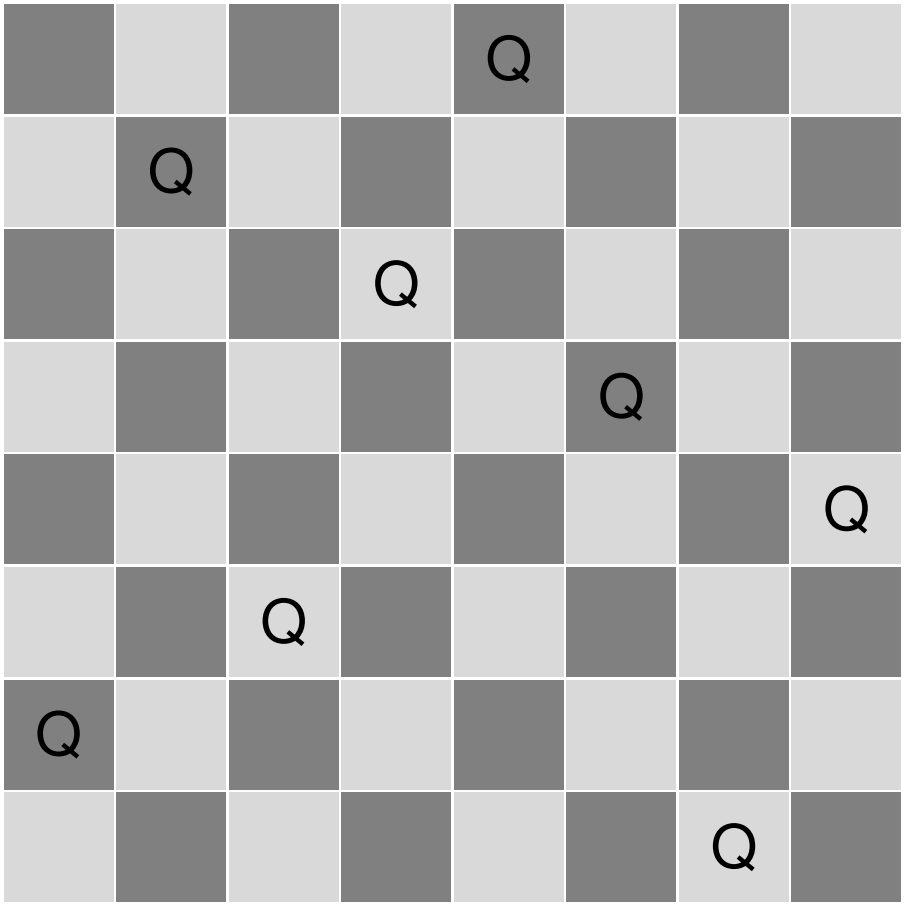
Ocho reinas, todas las soluciones



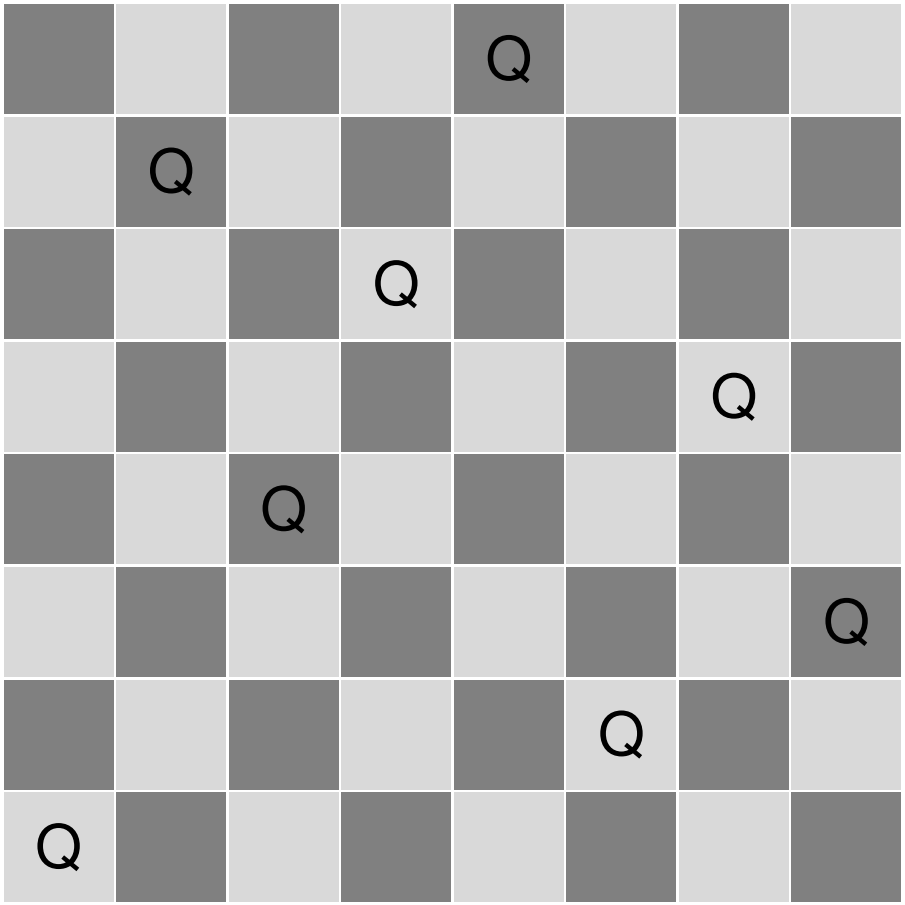
Ocho reinas, todas las soluciones



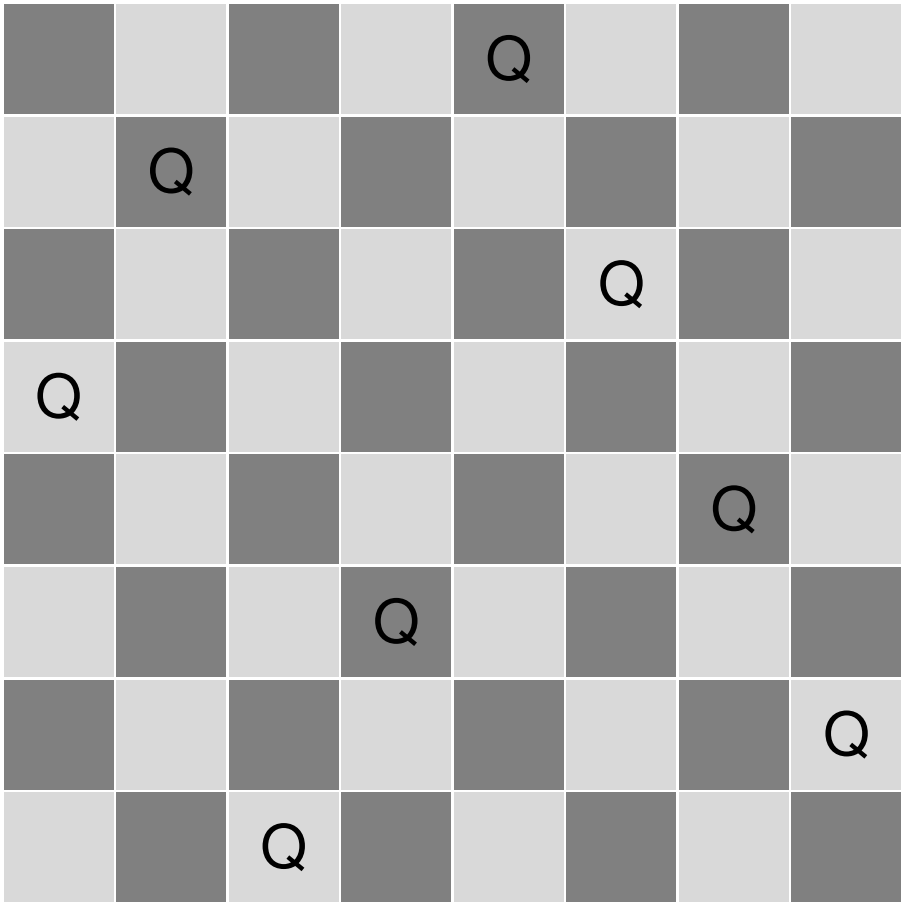
Ocho reinas, todas las soluciones



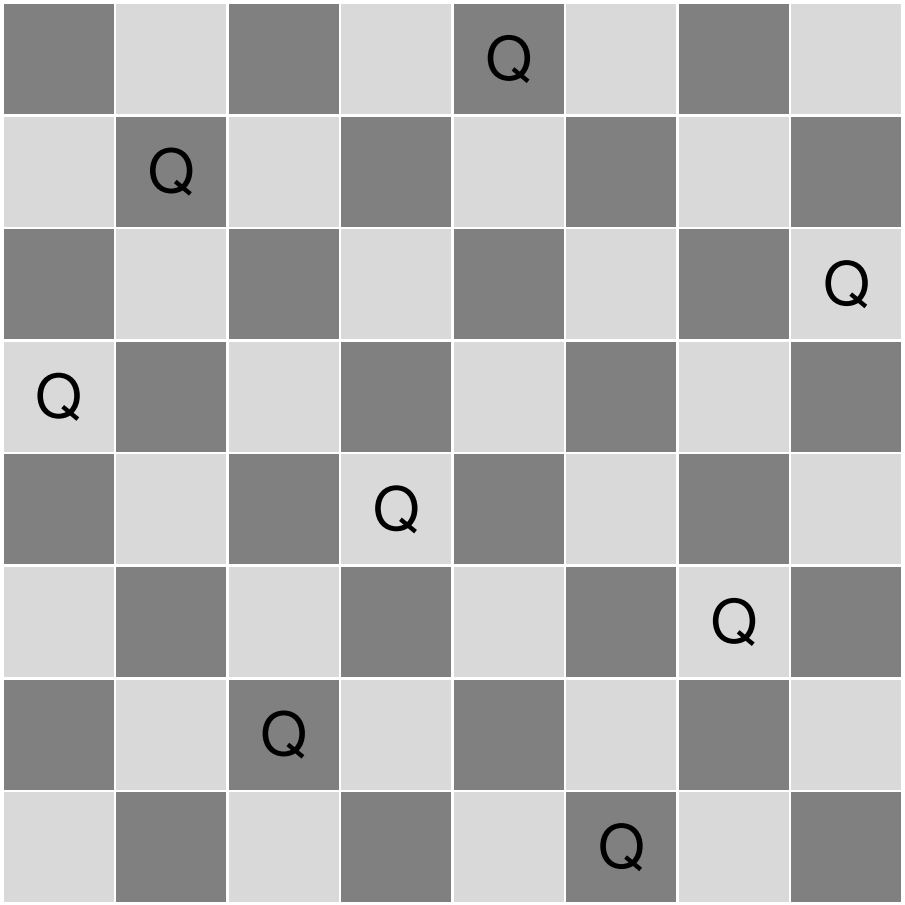
Ocho reinas, todas las soluciones



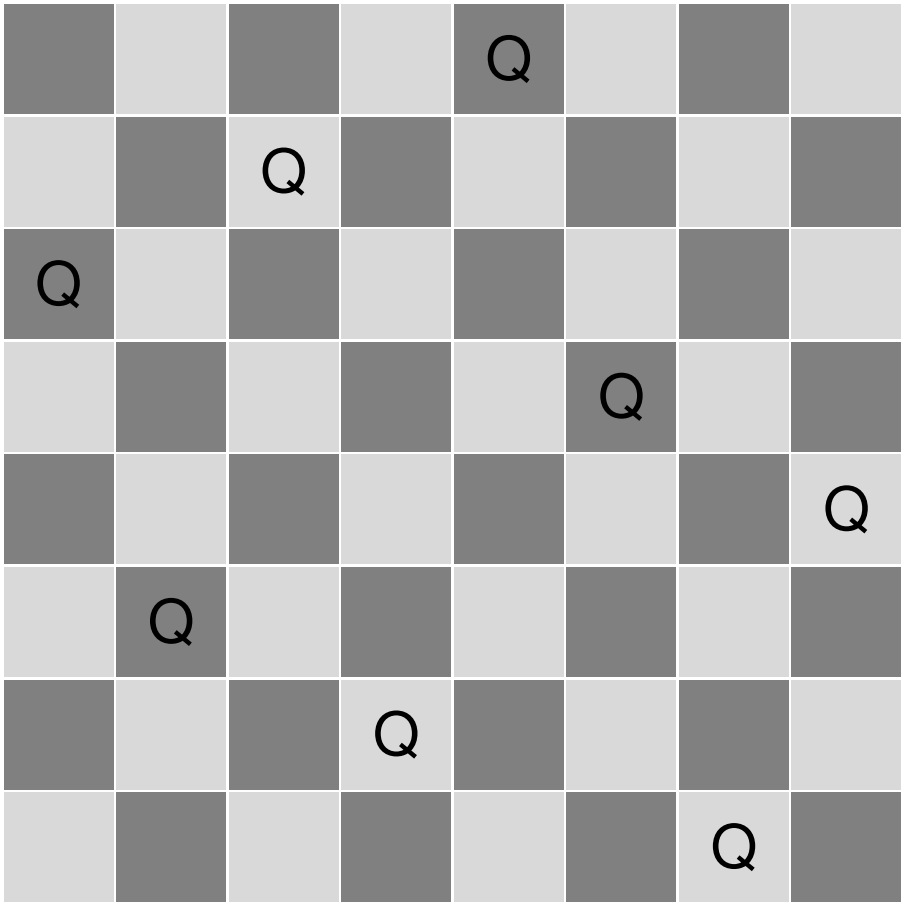
Ocho reinas, todas las soluciones



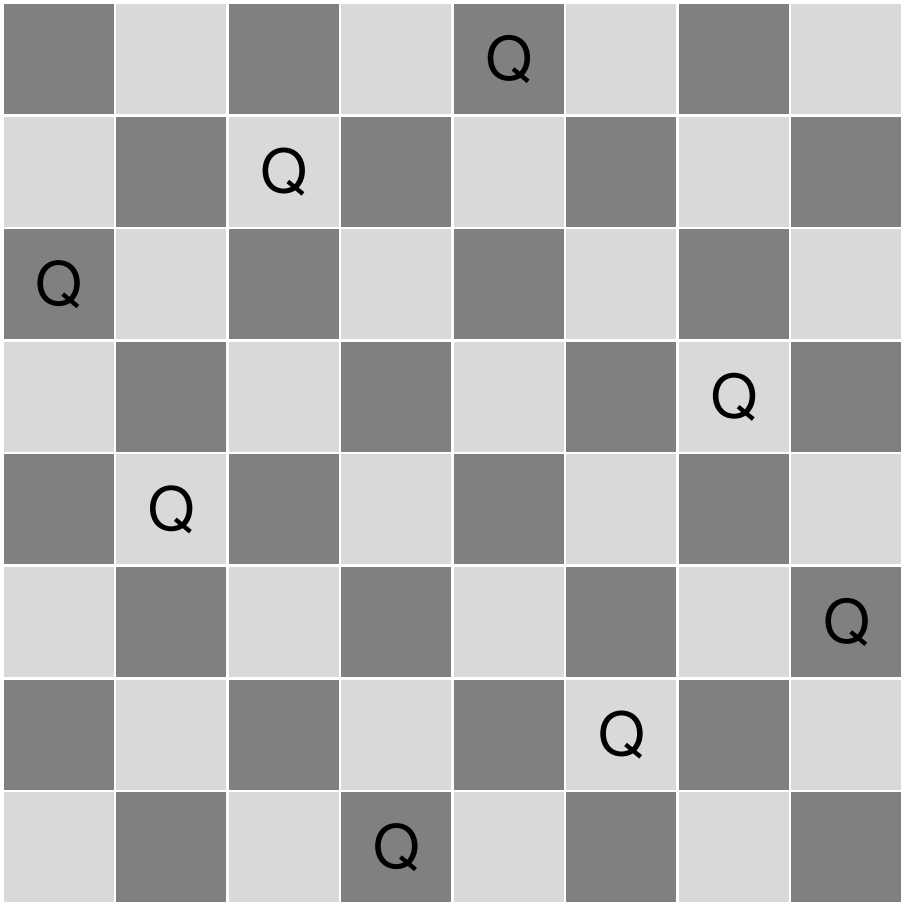
Ocho reinas, todas las soluciones



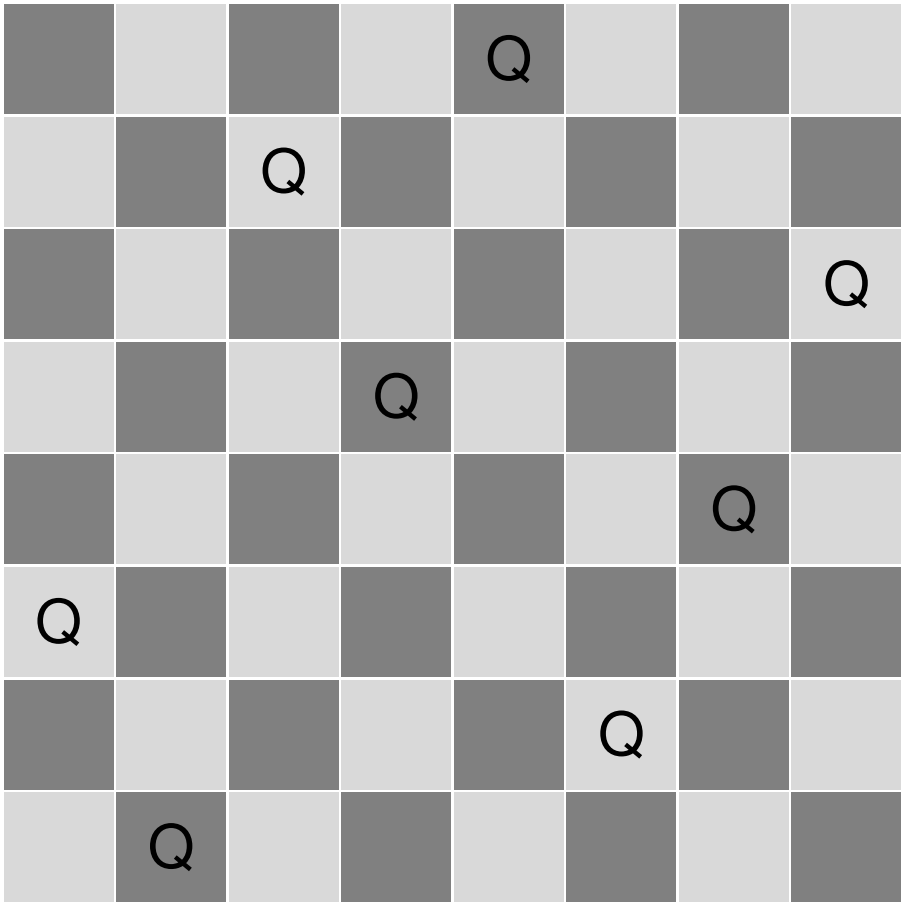
Ocho reinas, todas las soluciones



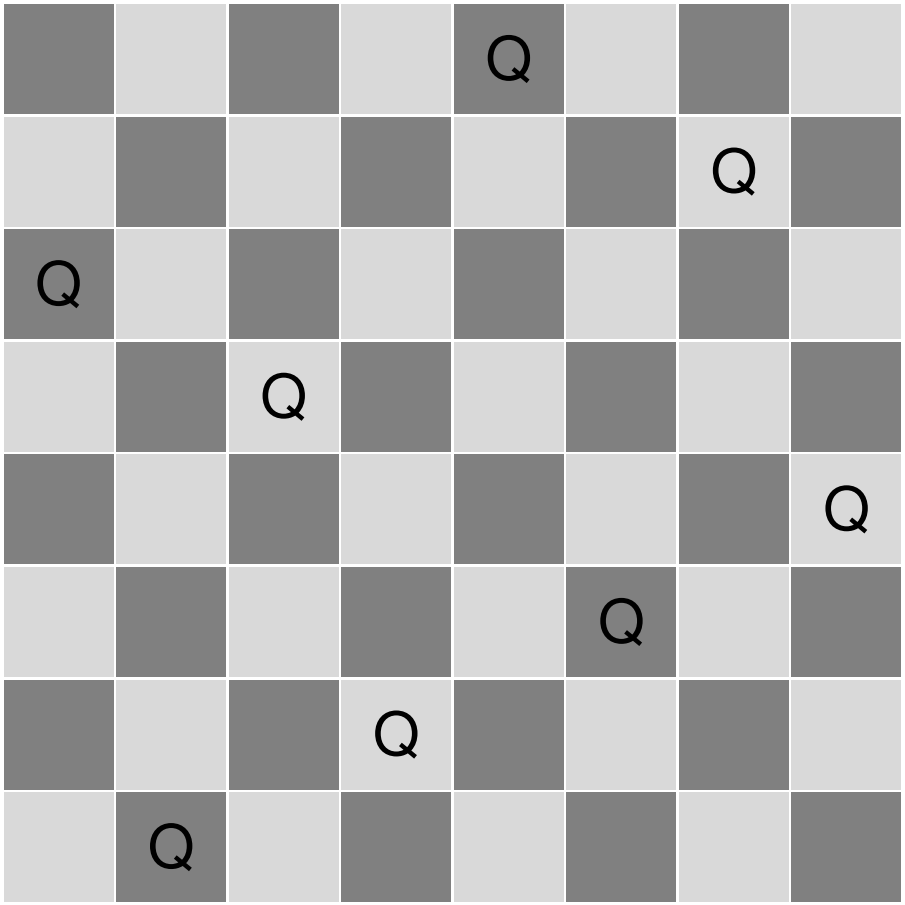
Ocho reinas, todas las soluciones



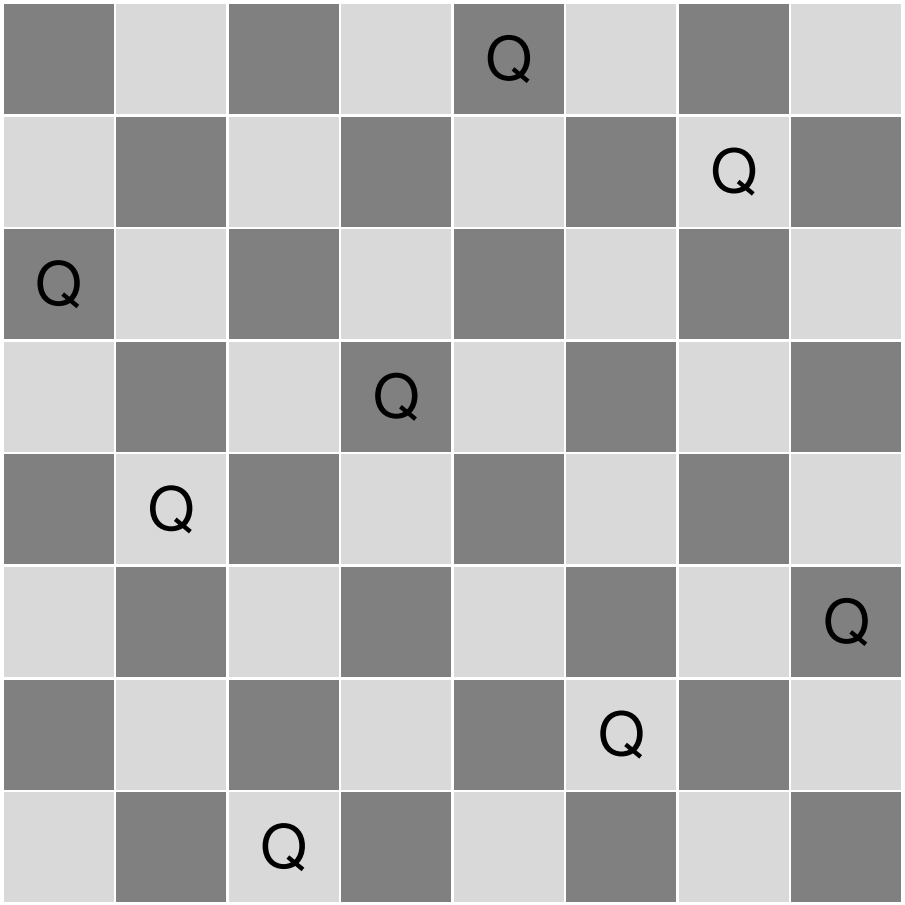
Ocho reinas, todas las soluciones



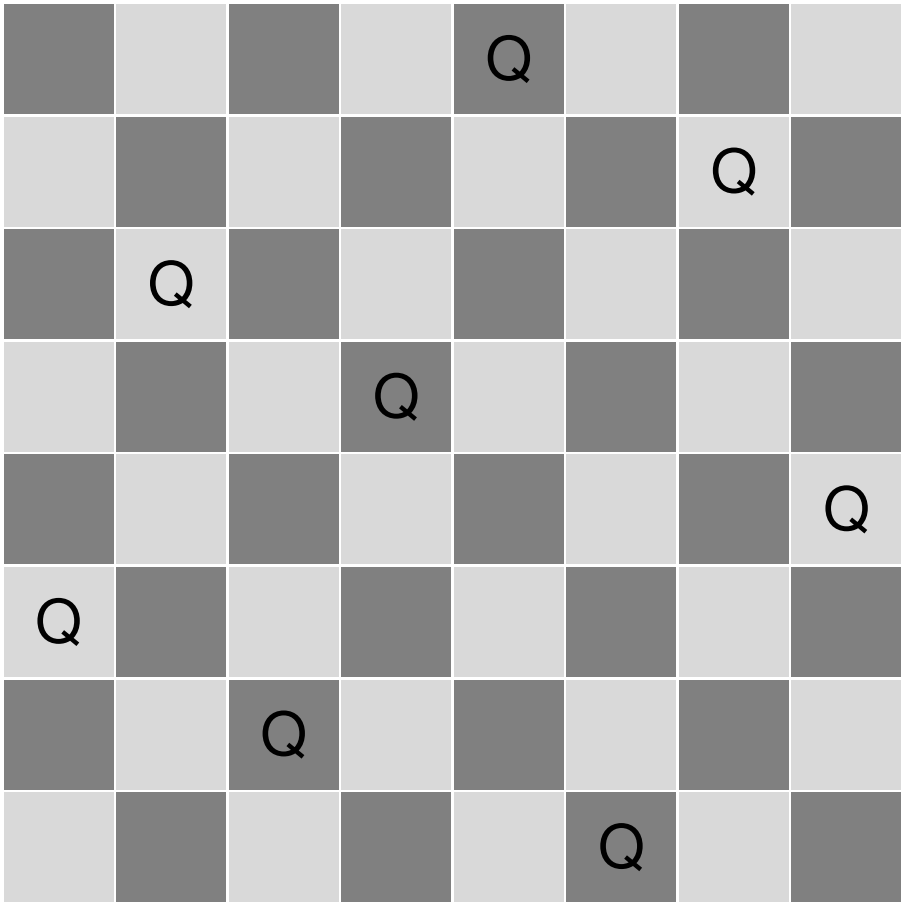
Ocho reinas, todas las soluciones



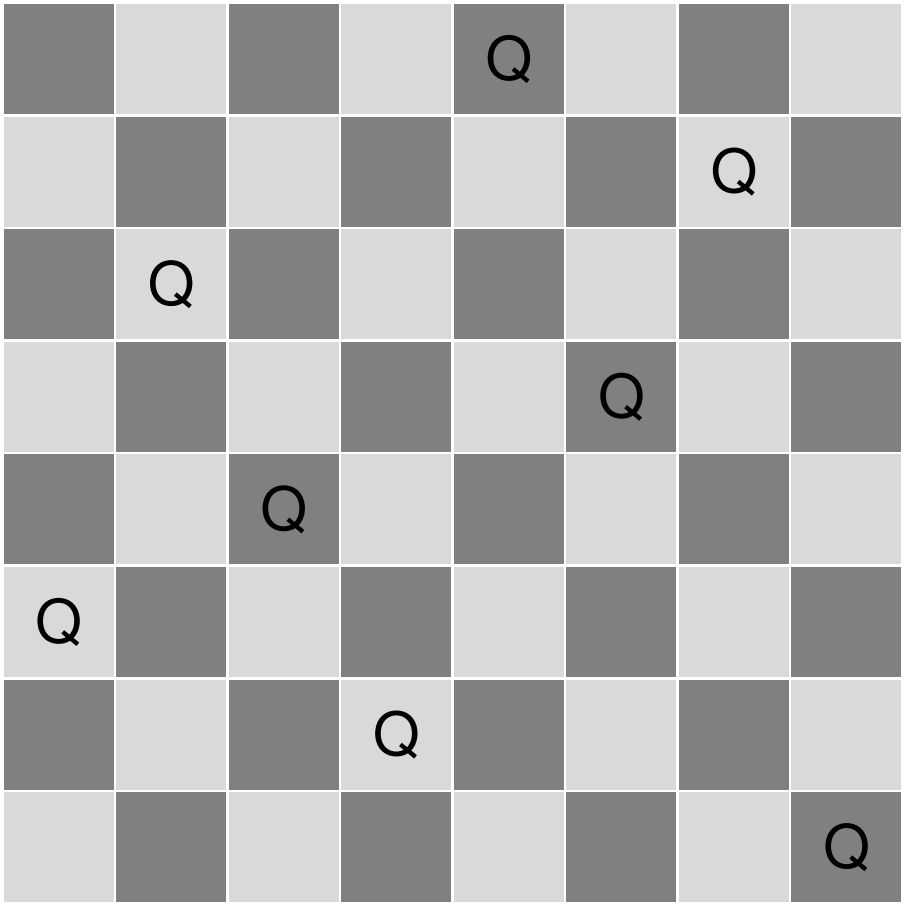
Ocho reinas, todas las soluciones



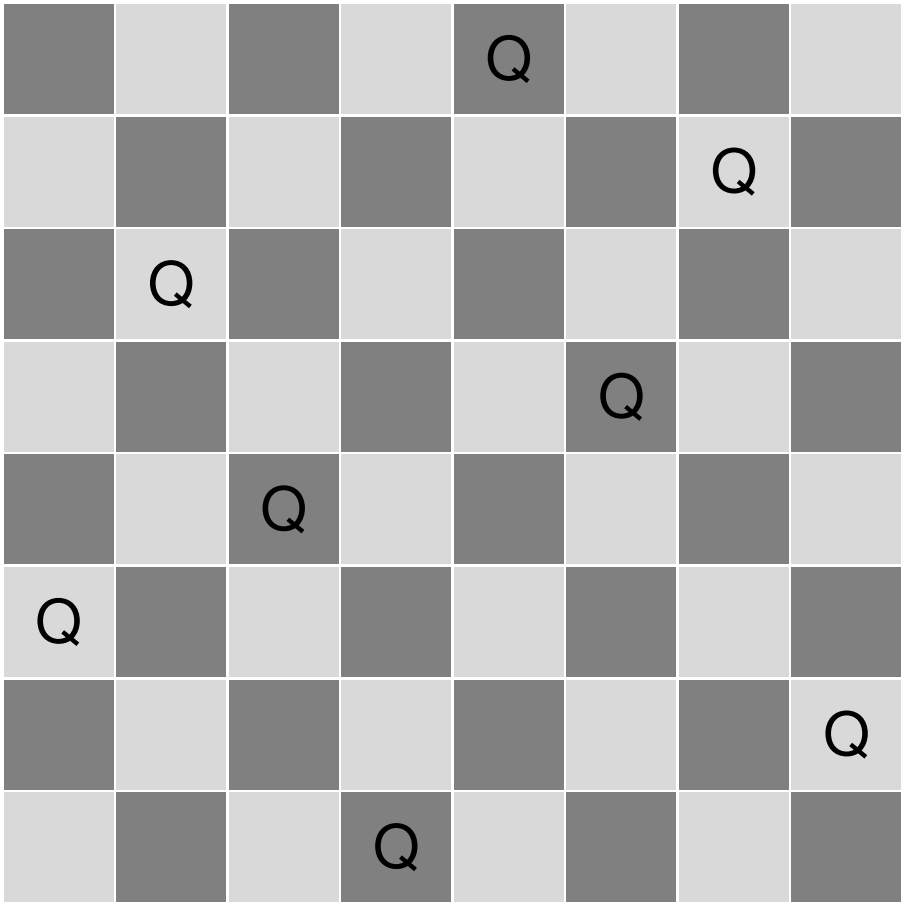
Ocho reinas, todas las soluciones



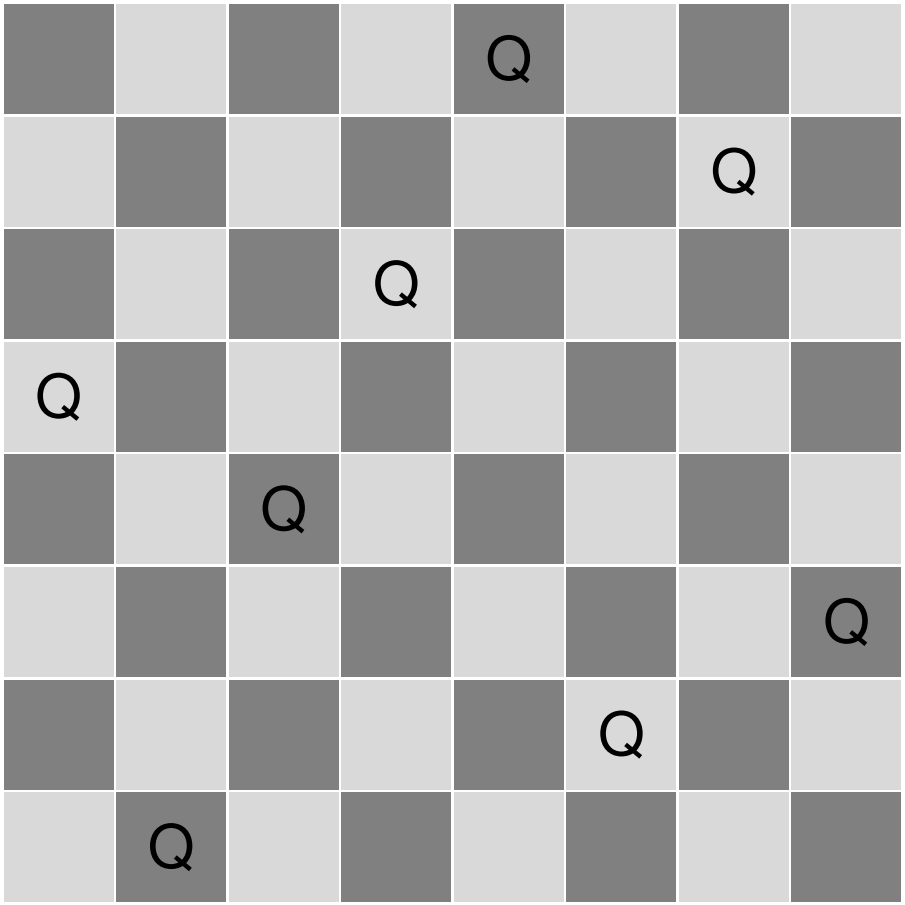
Ocho reinas, todas las soluciones



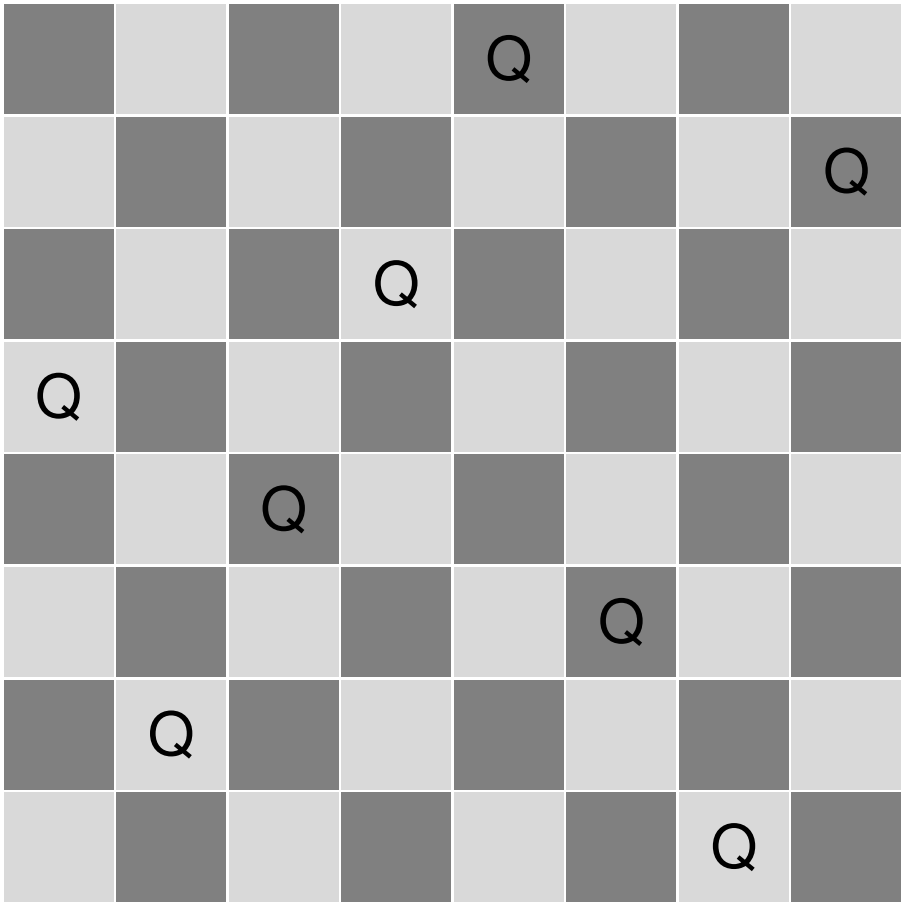
Ocho reinas, todas las soluciones



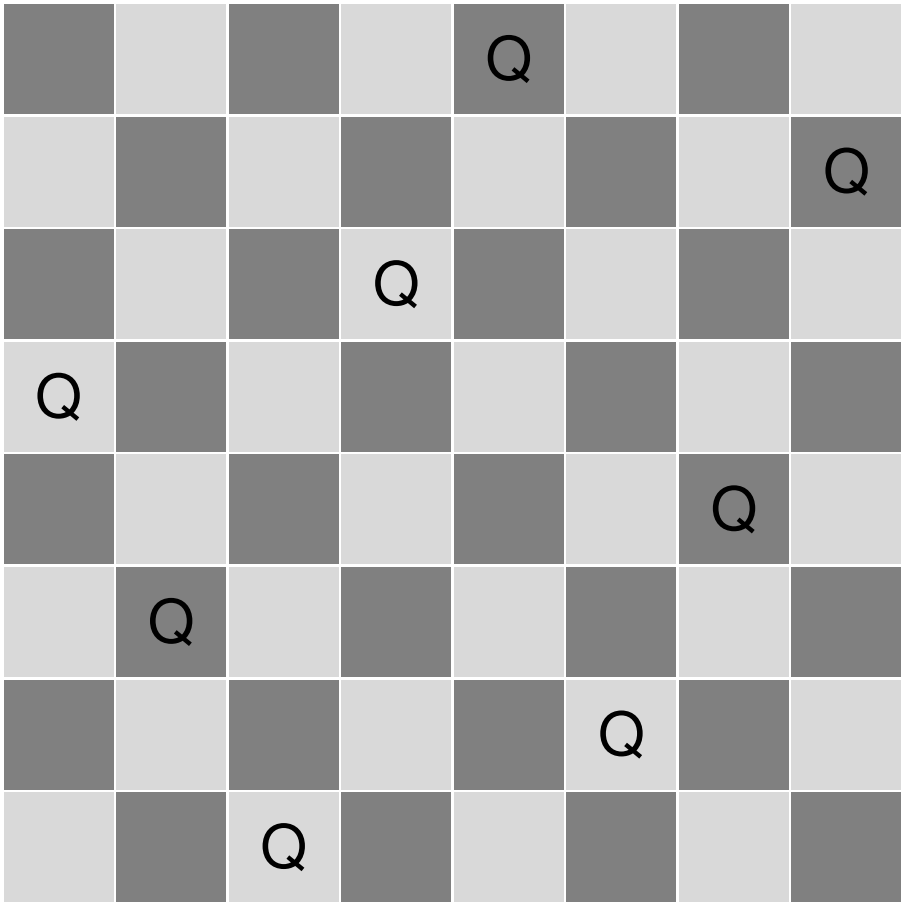
Ocho reinas, todas las soluciones



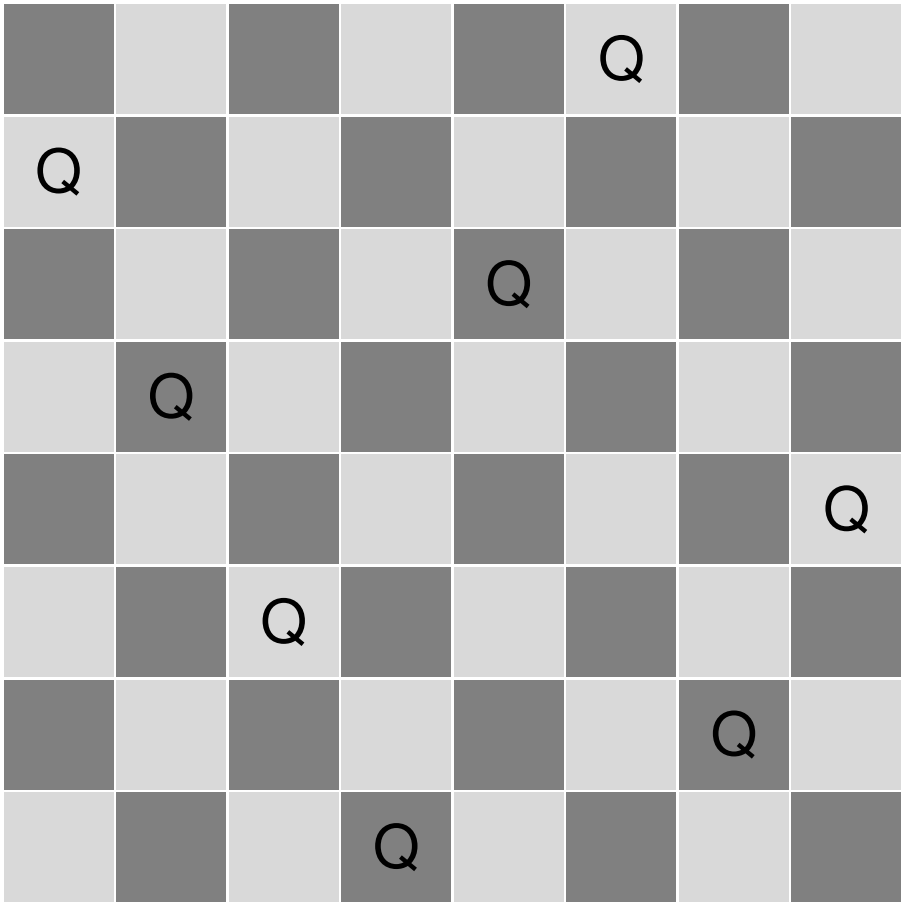
Ocho reinas, todas las soluciones



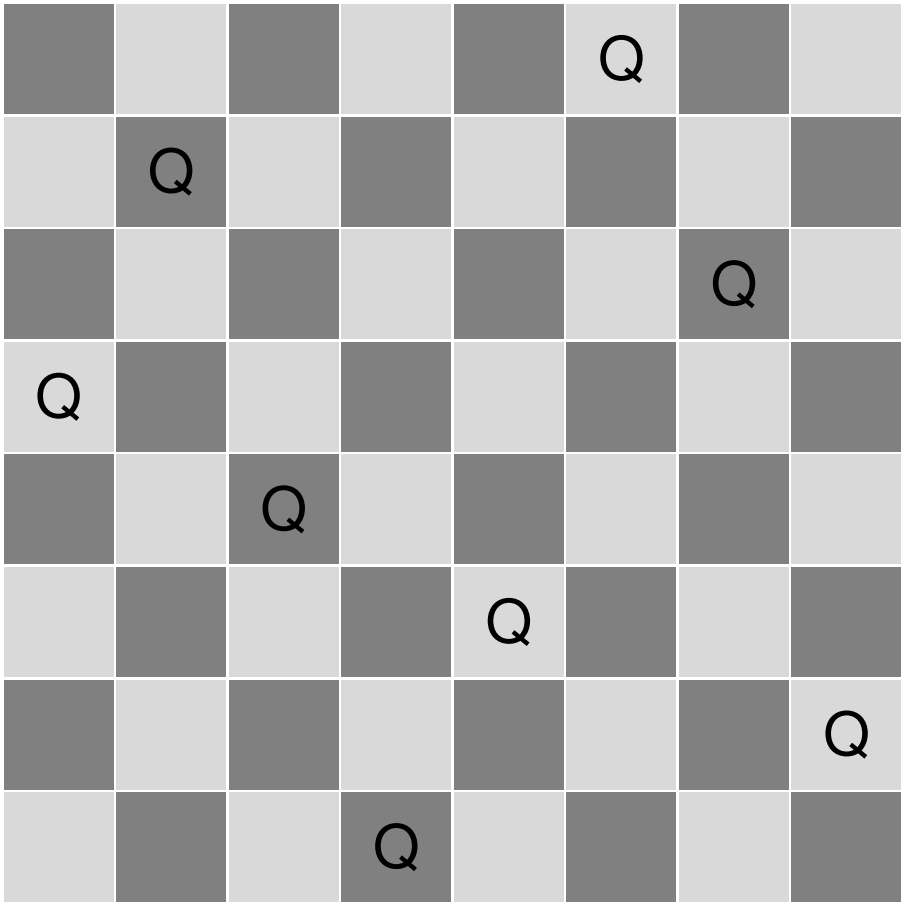
Ocho reinas, todas las soluciones



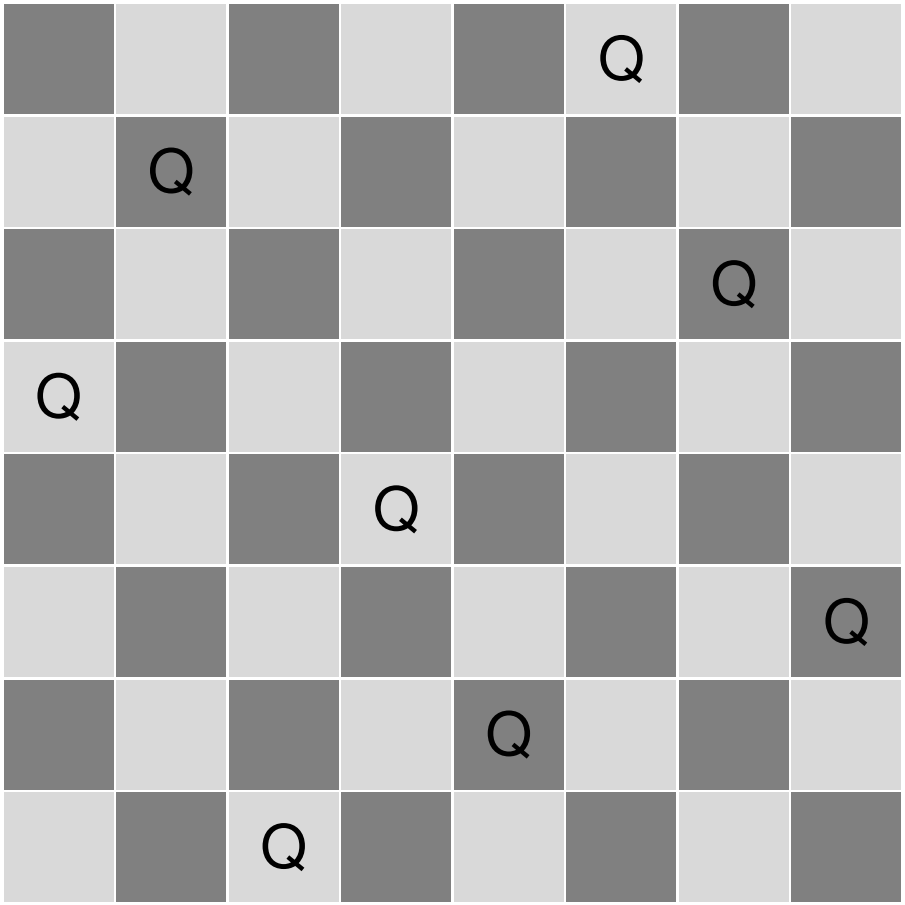
Ocho reinas, todas las soluciones



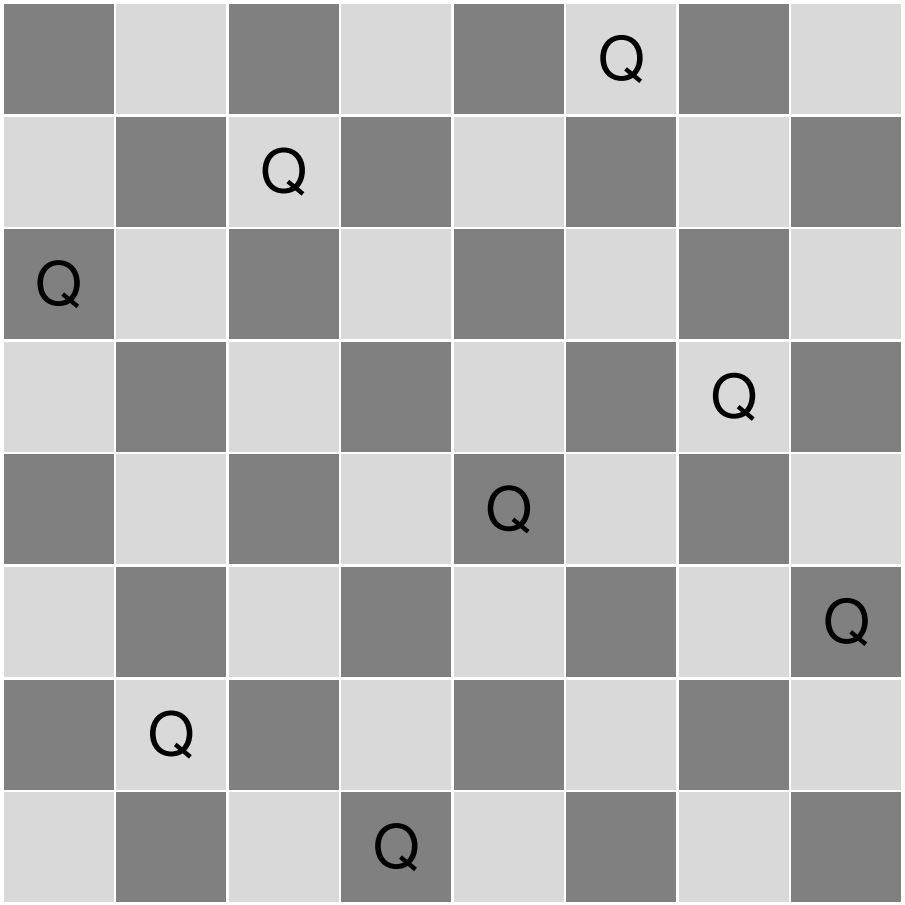
Ocho reinas, todas las soluciones



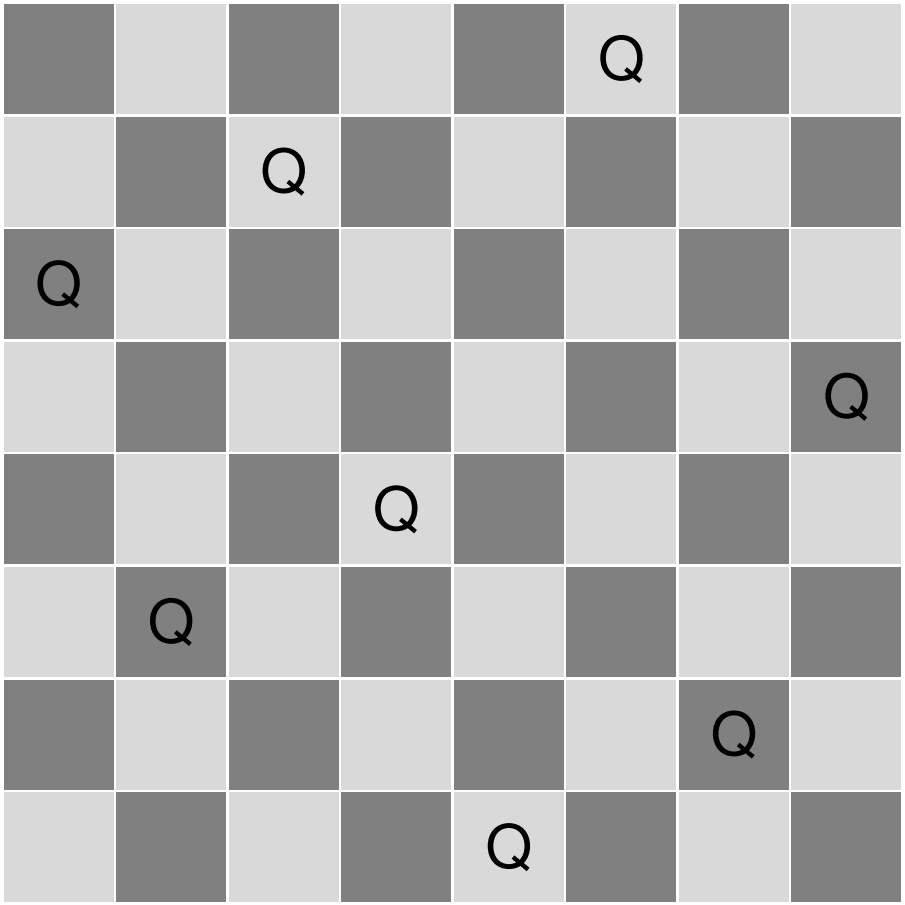
Ocho reinas, todas las soluciones



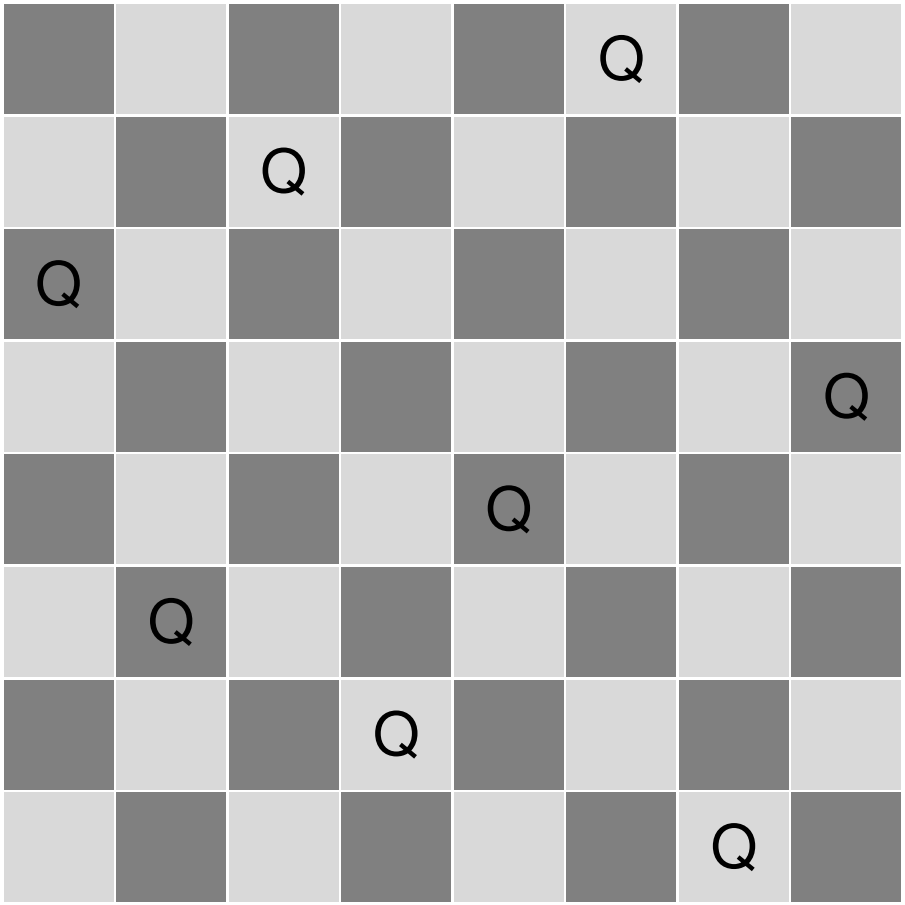
Ocho reinas, todas las soluciones



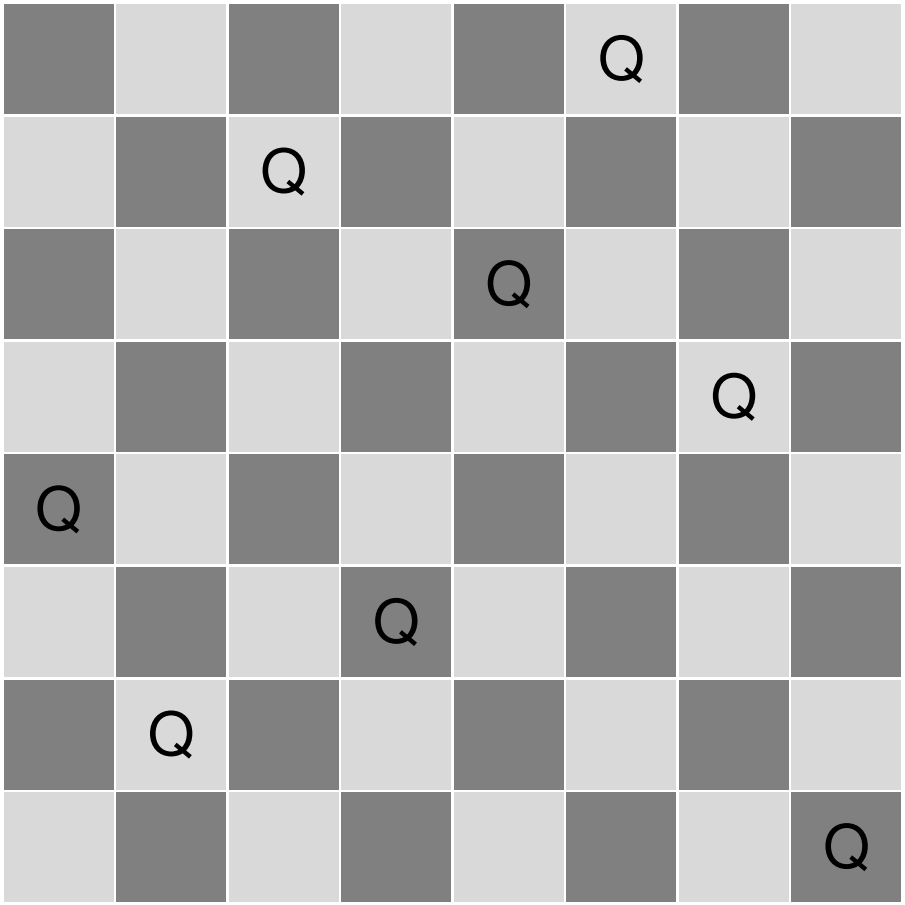
Ocho reinas, todas las soluciones



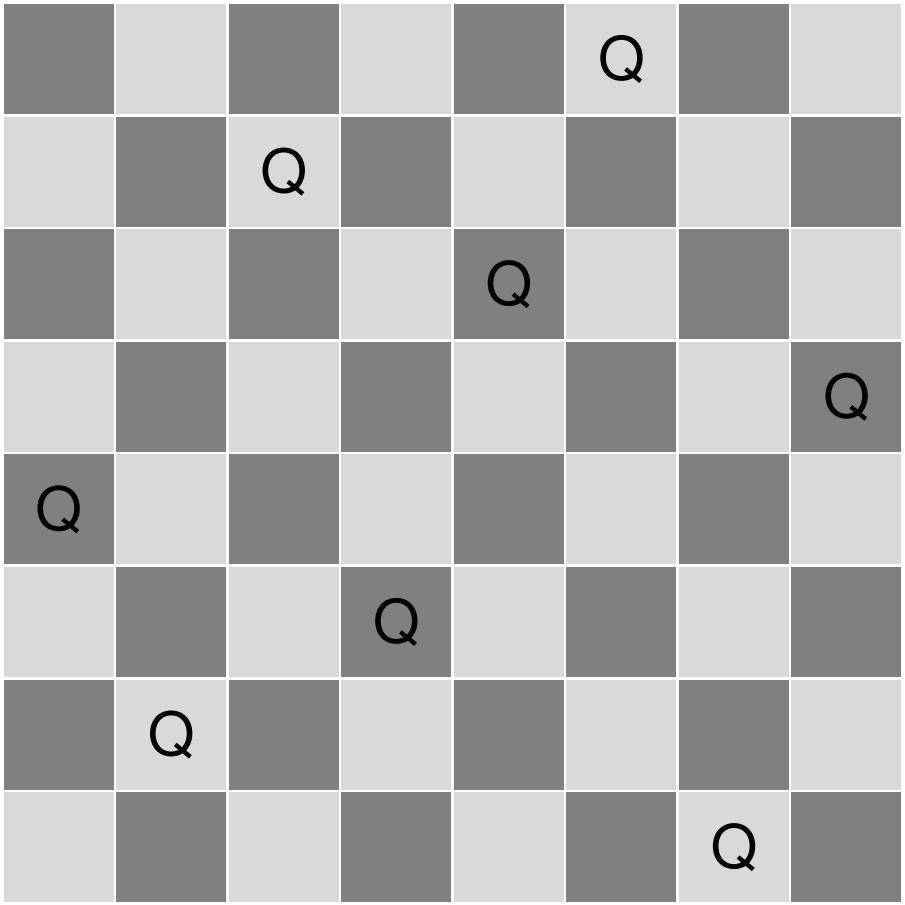
Ocho reinas, todas las soluciones



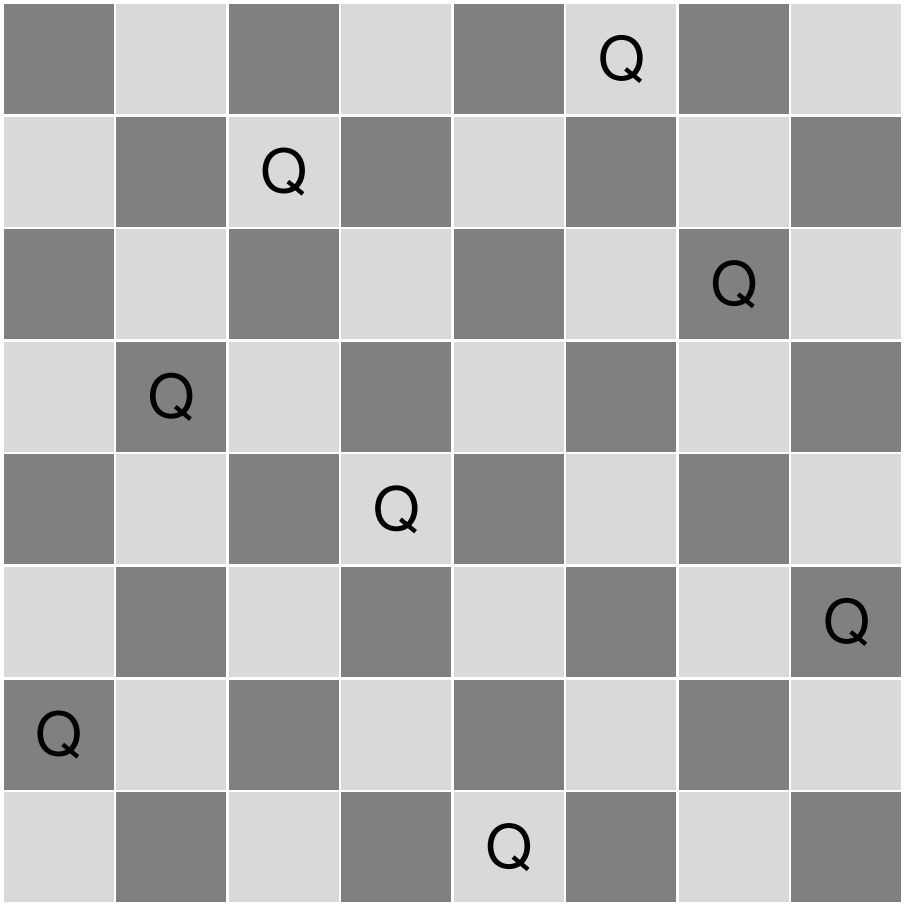
Ocho reinas, todas las soluciones



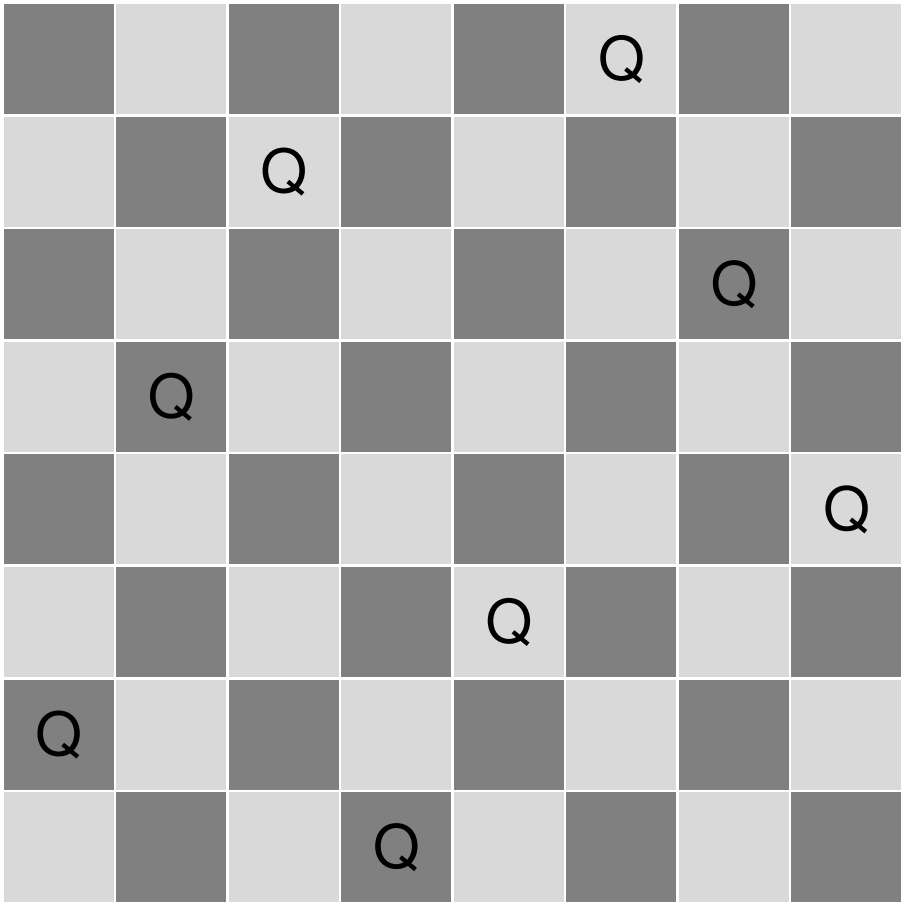
Ocho reinas, todas las soluciones



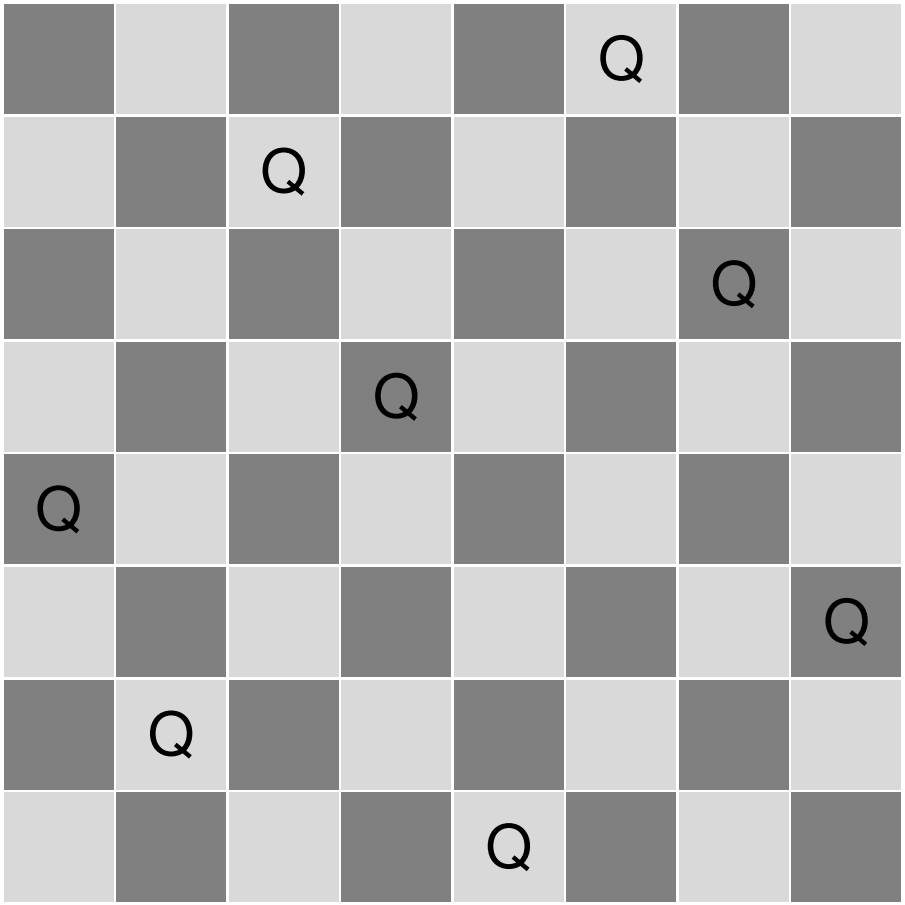
Ocho reinas, todas las soluciones



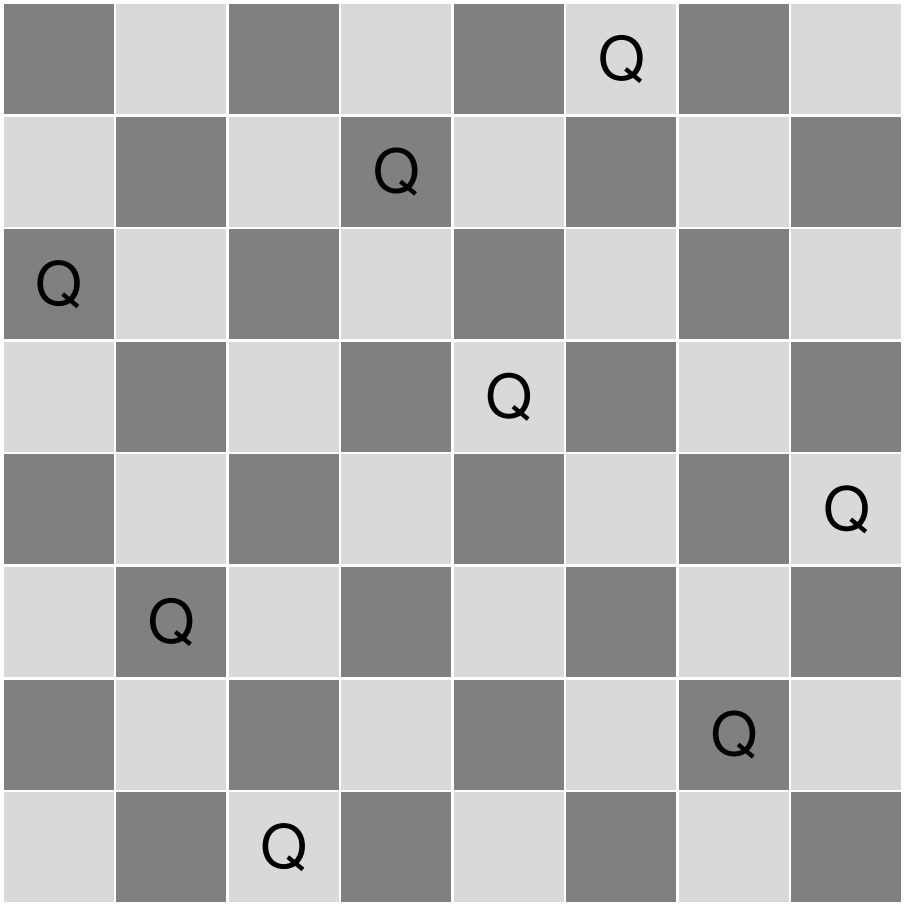
Ocho reinas, todas las soluciones



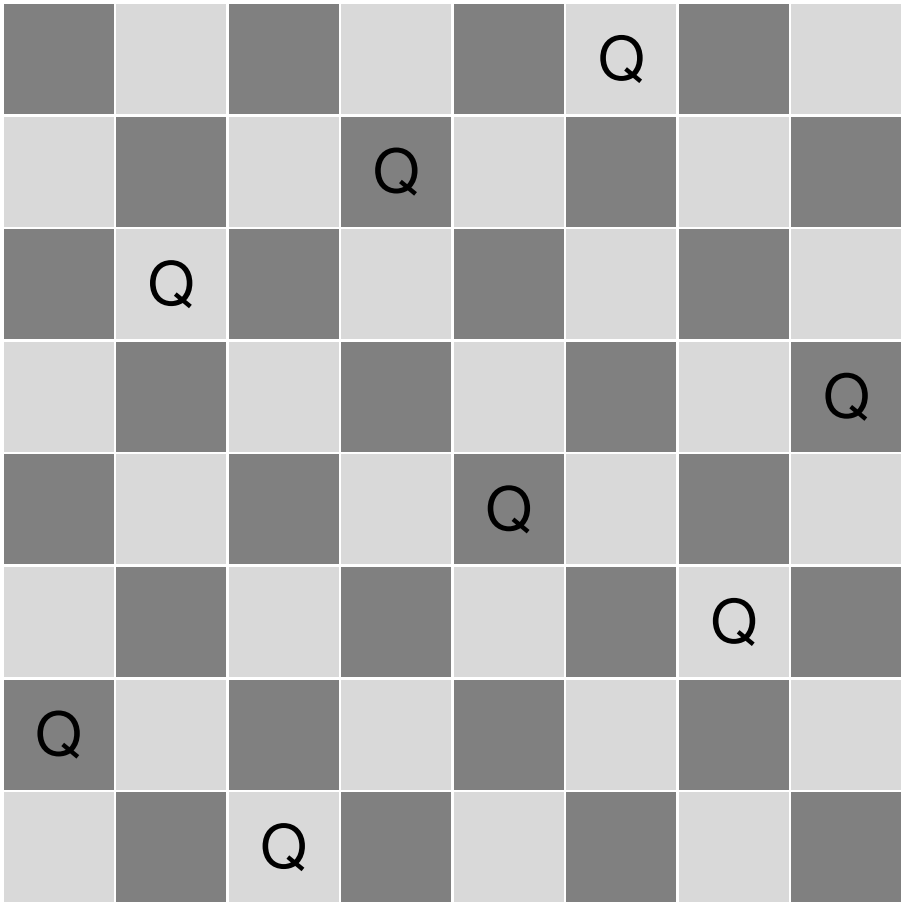
Ocho reinas, todas las soluciones



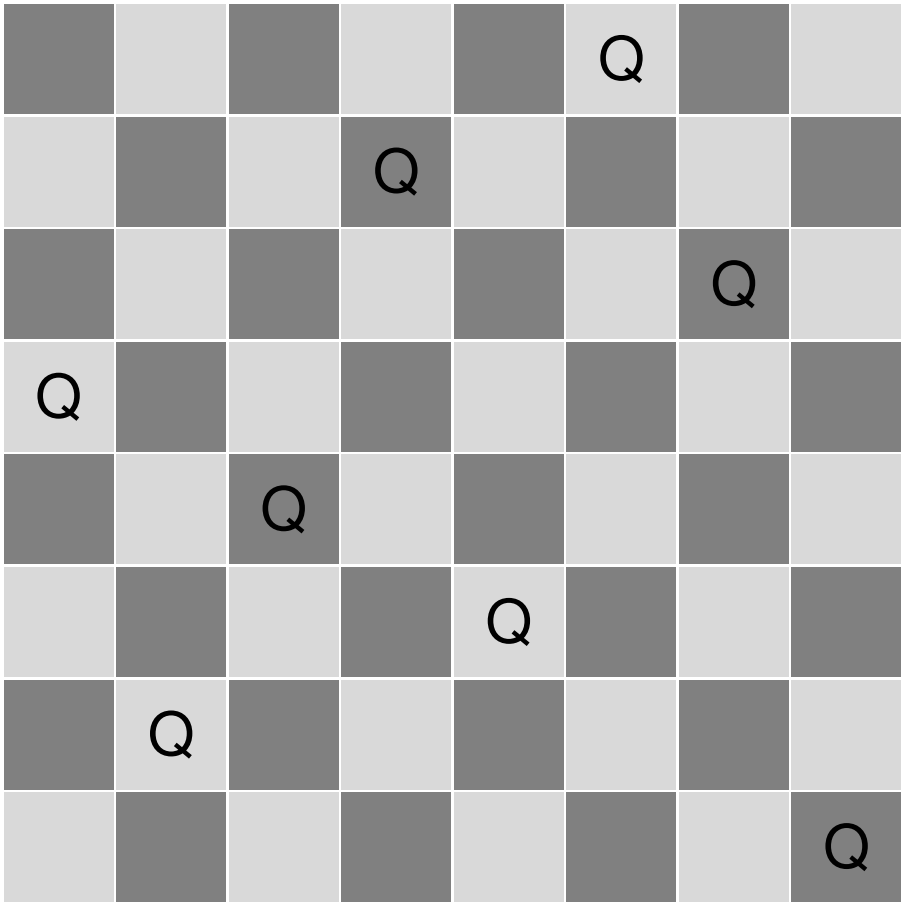
Ocho reinas, todas las soluciones



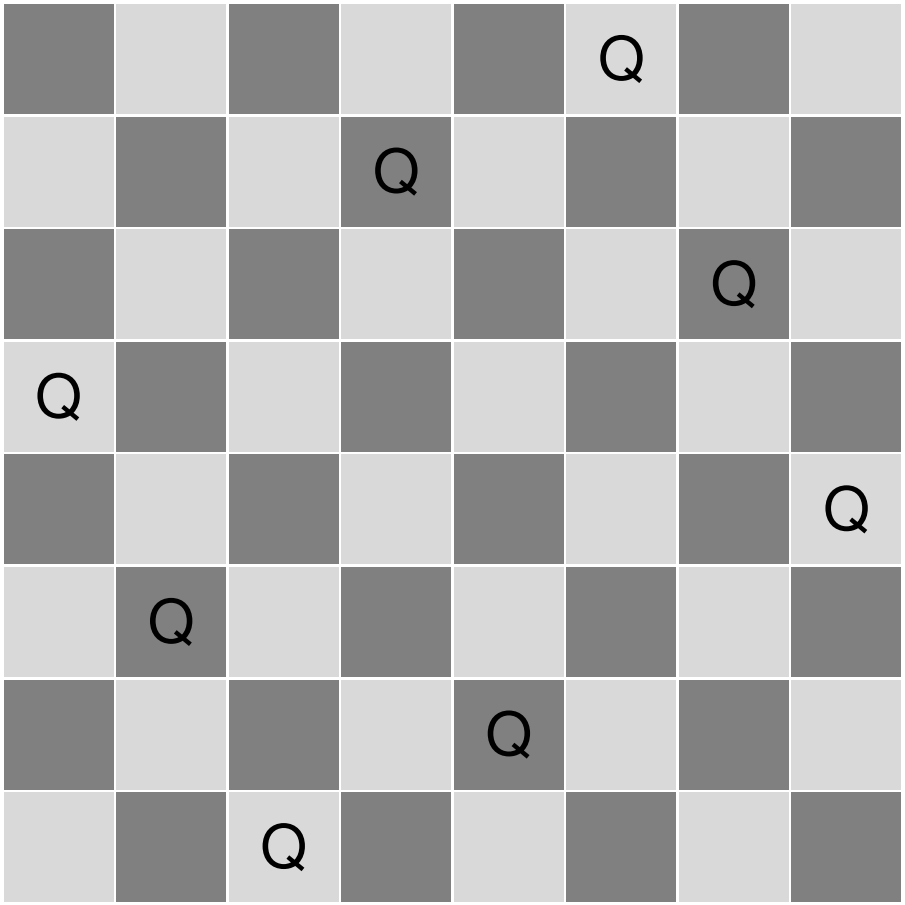
Ocho reinas, todas las soluciones



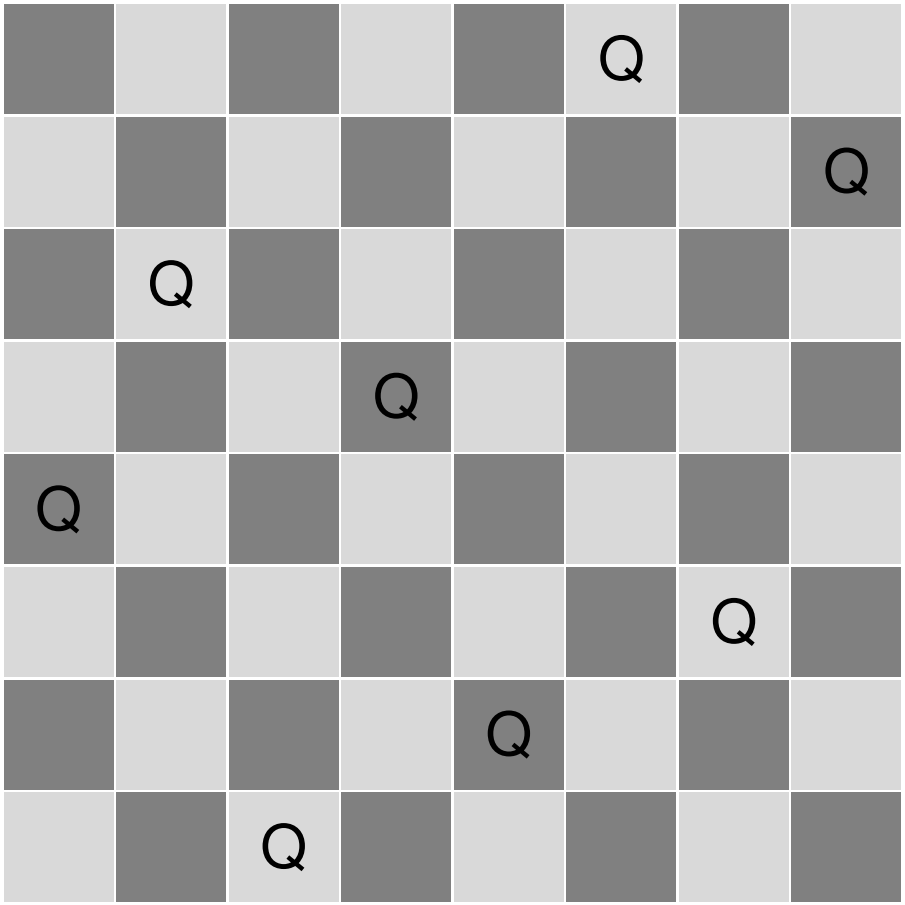
Ocho reinas, todas las soluciones



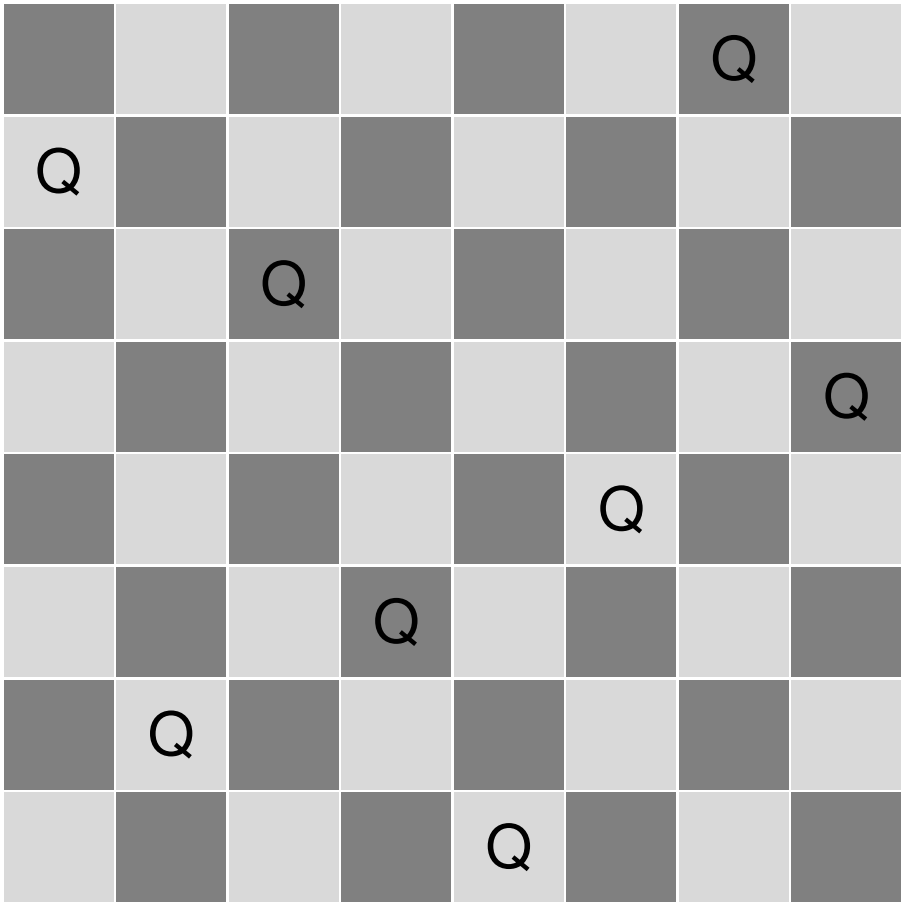
Ocho reinas, todas las soluciones



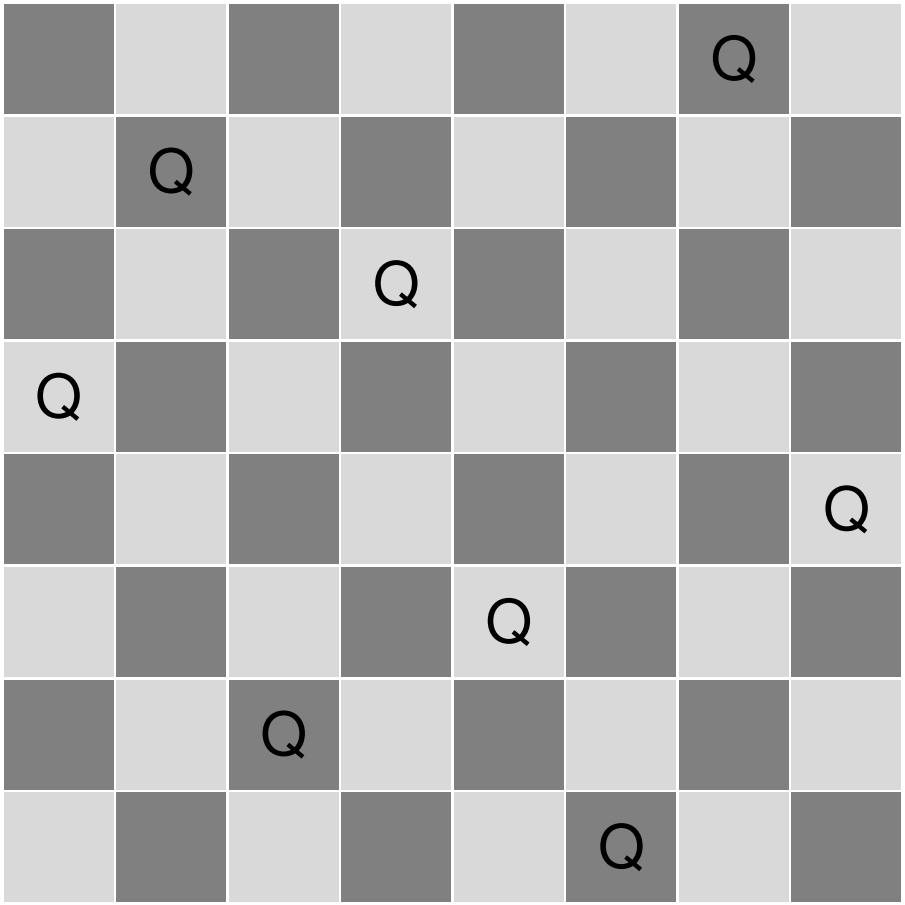
Ocho reinas, todas las soluciones



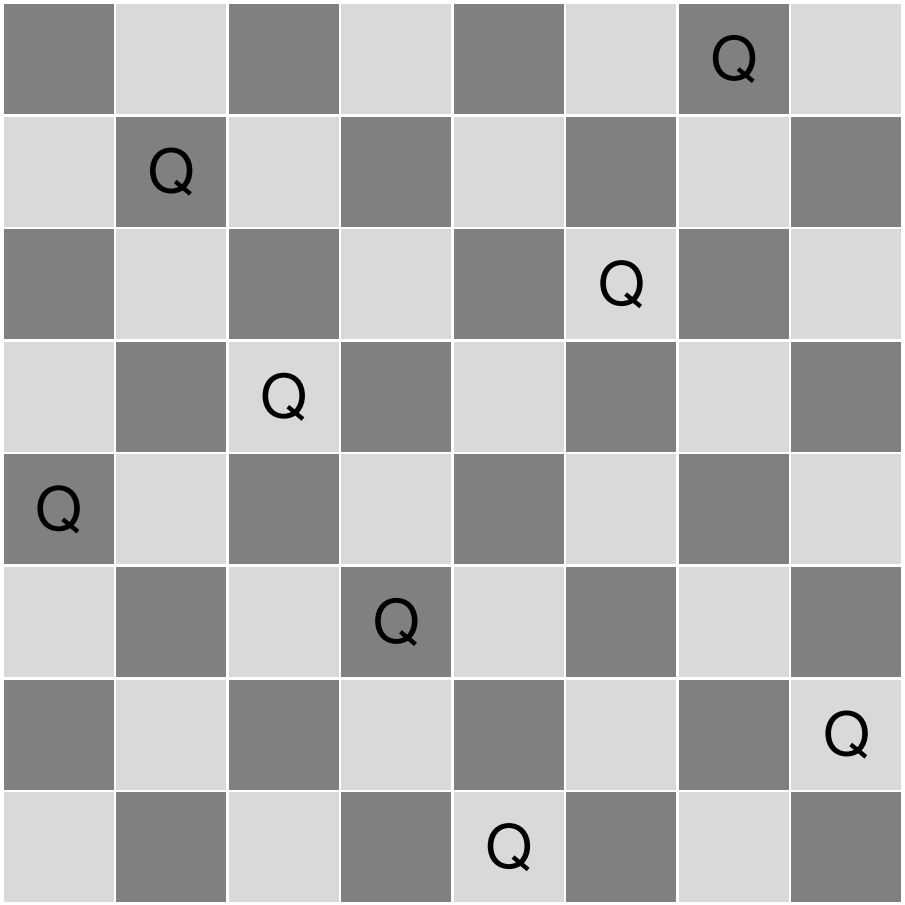
Ocho reinas, todas las soluciones



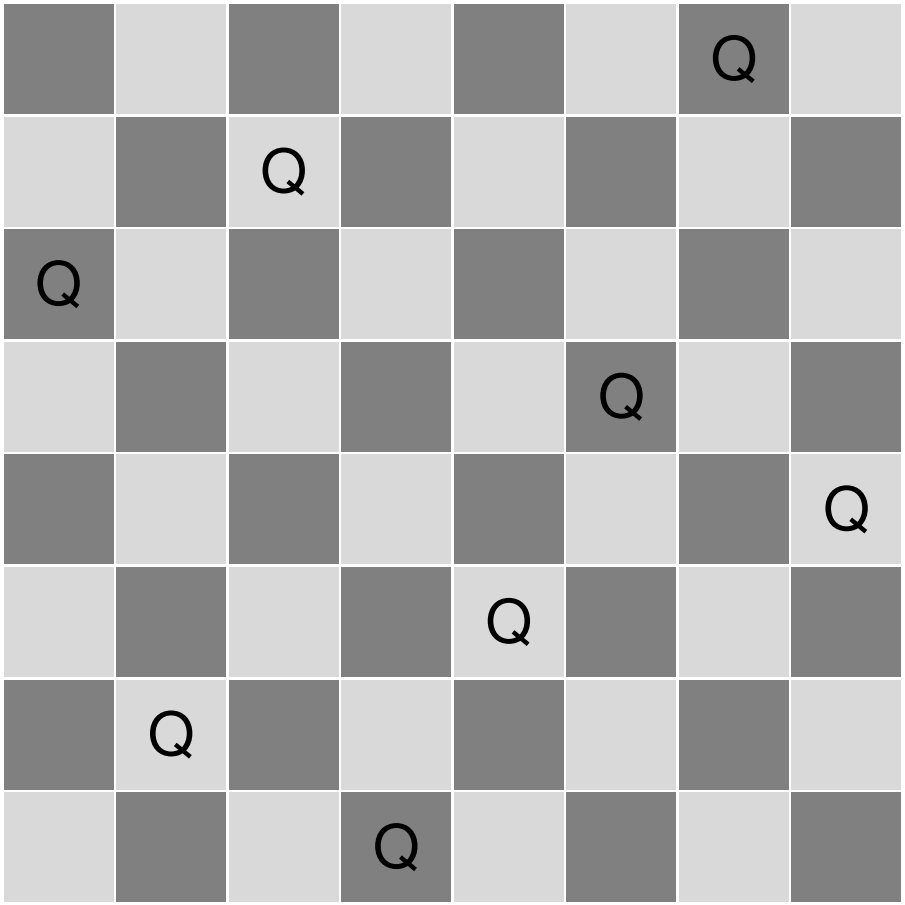
Ocho reinas, todas las soluciones



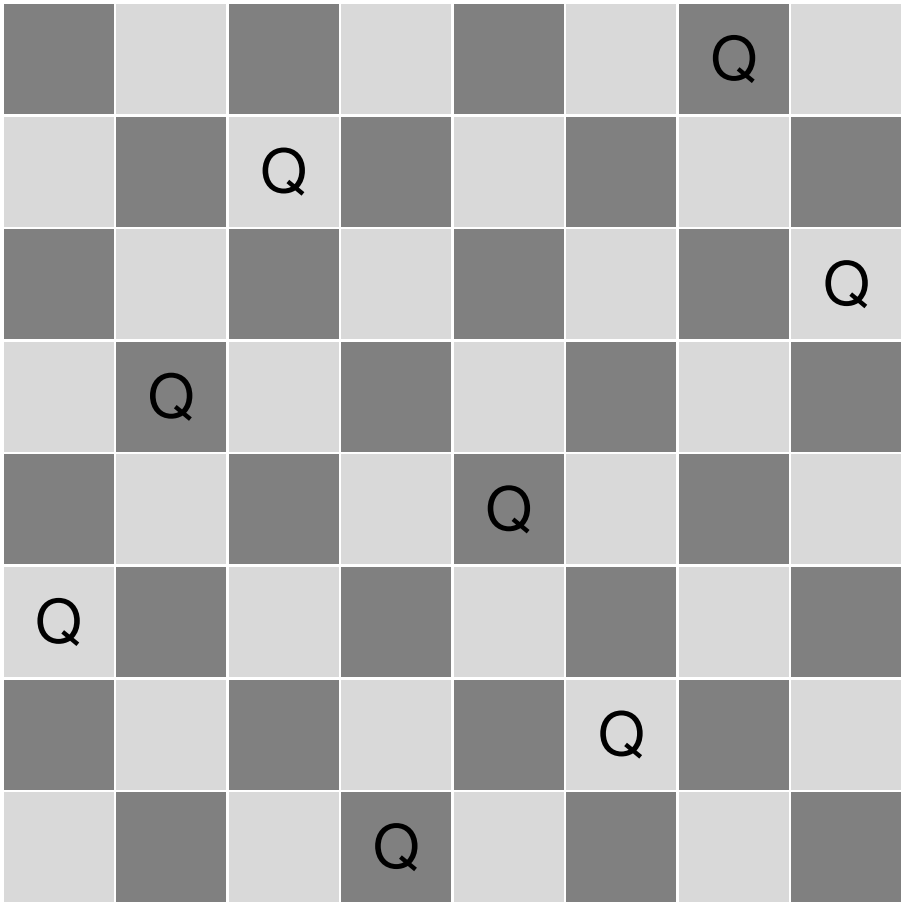
Ocho reinas, todas las soluciones



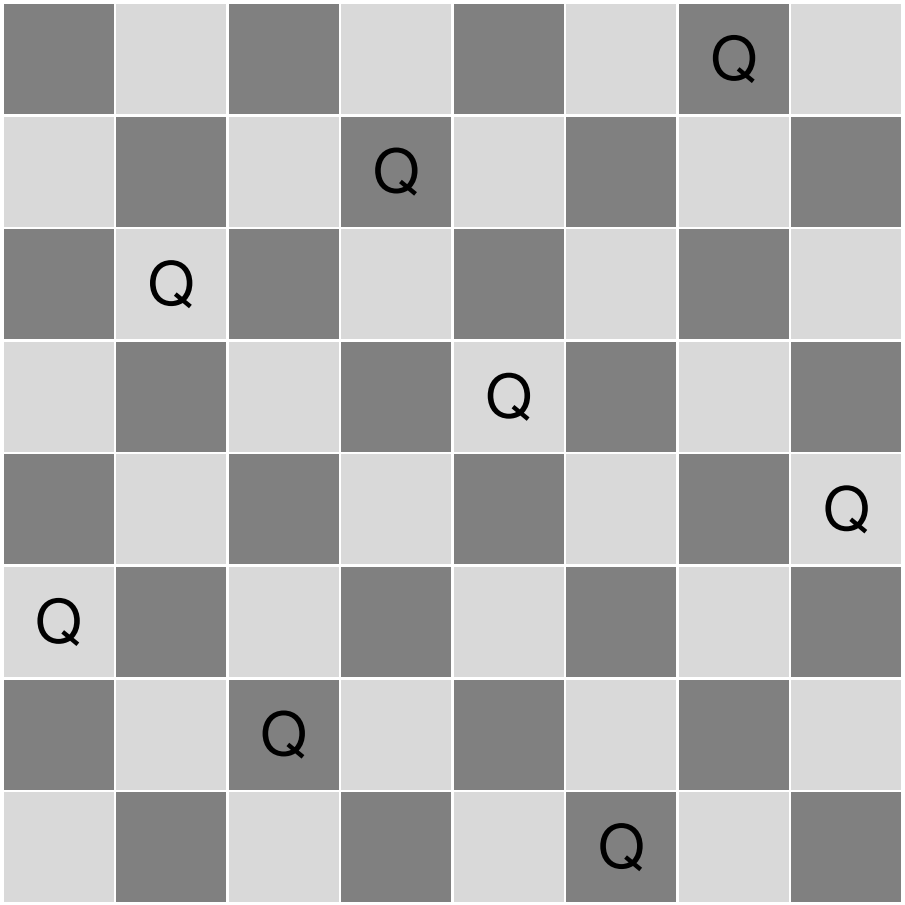
Ocho reinas, todas las soluciones



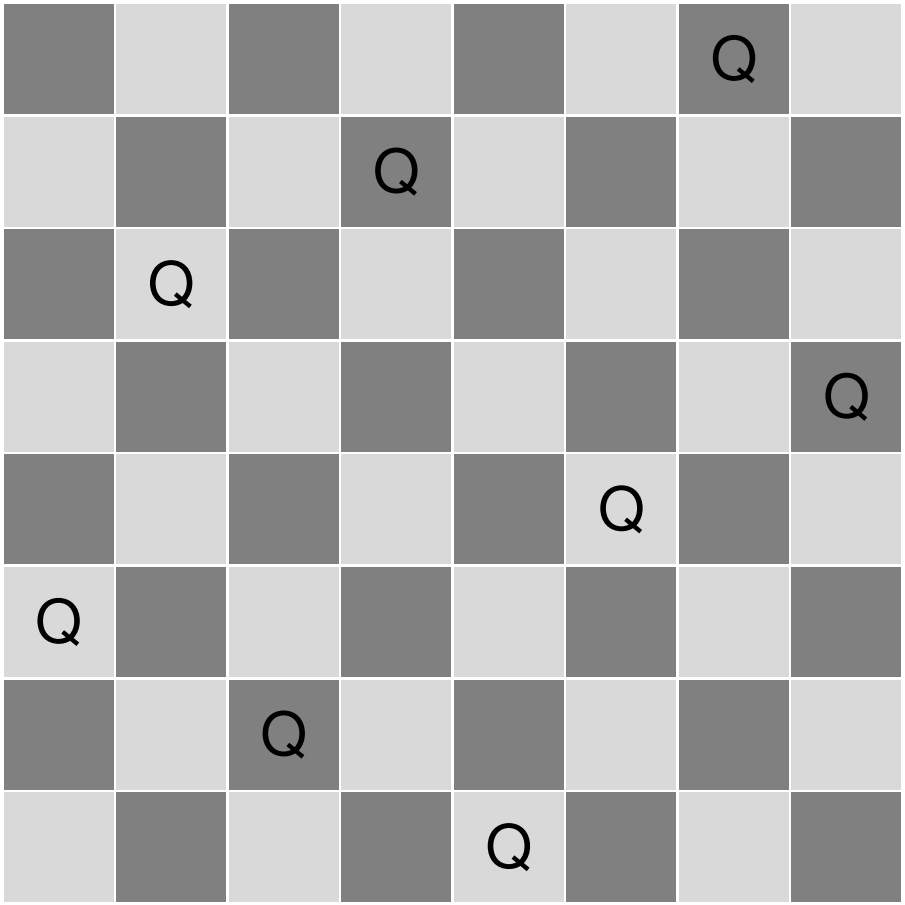
Ocho reinas, todas las soluciones



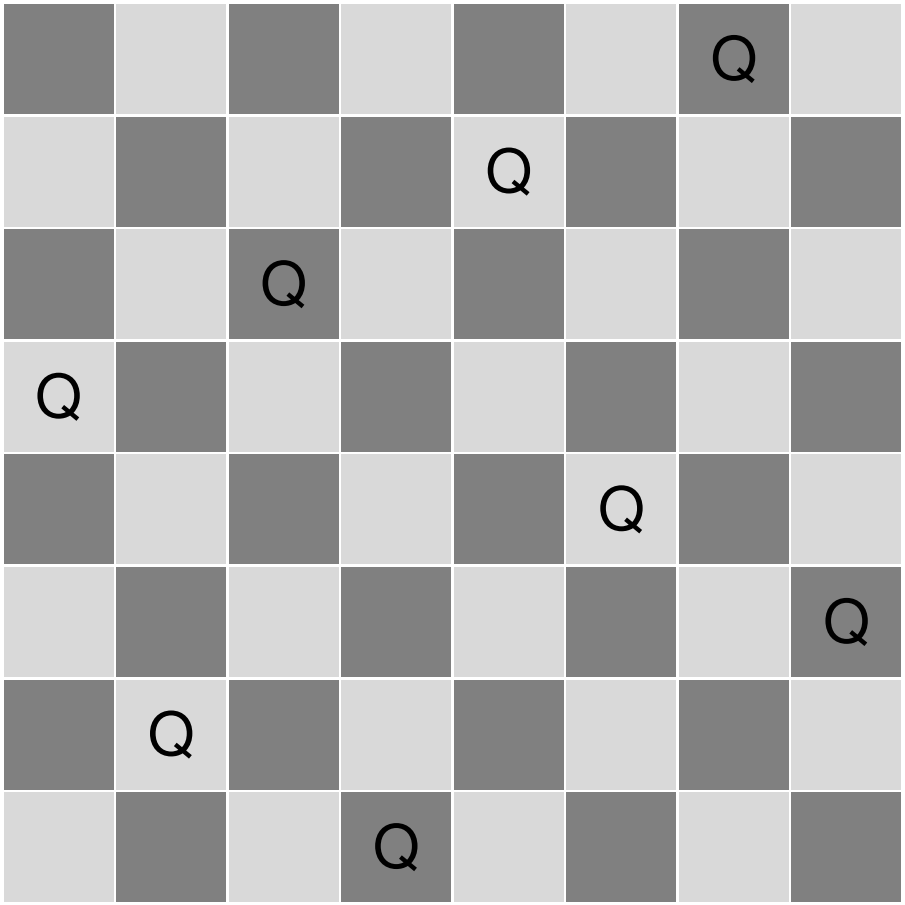
Ocho reinas, todas las soluciones



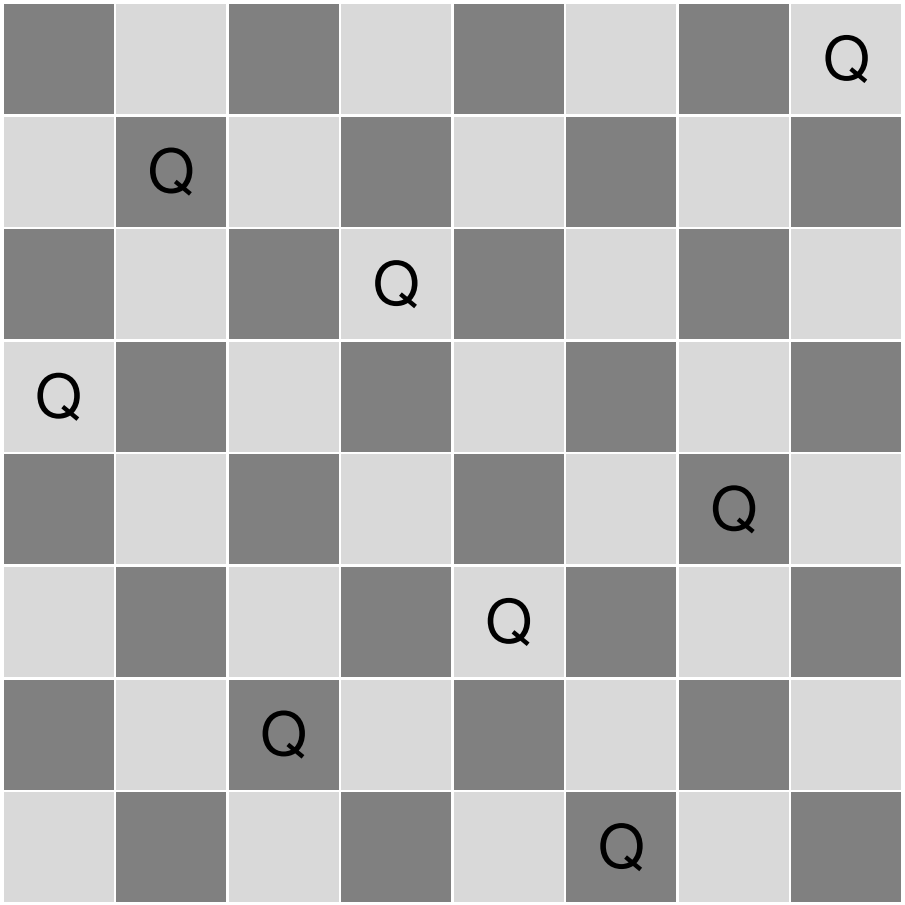
Ocho reinas, todas las soluciones



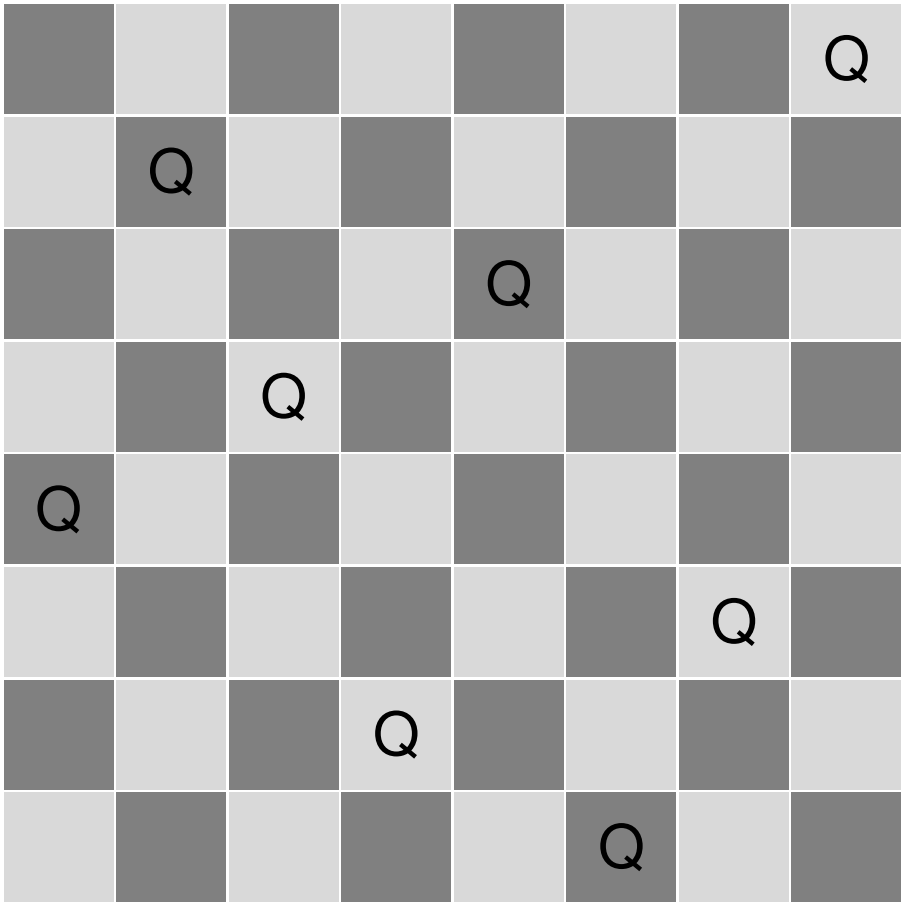
Ocho reinas, todas las soluciones



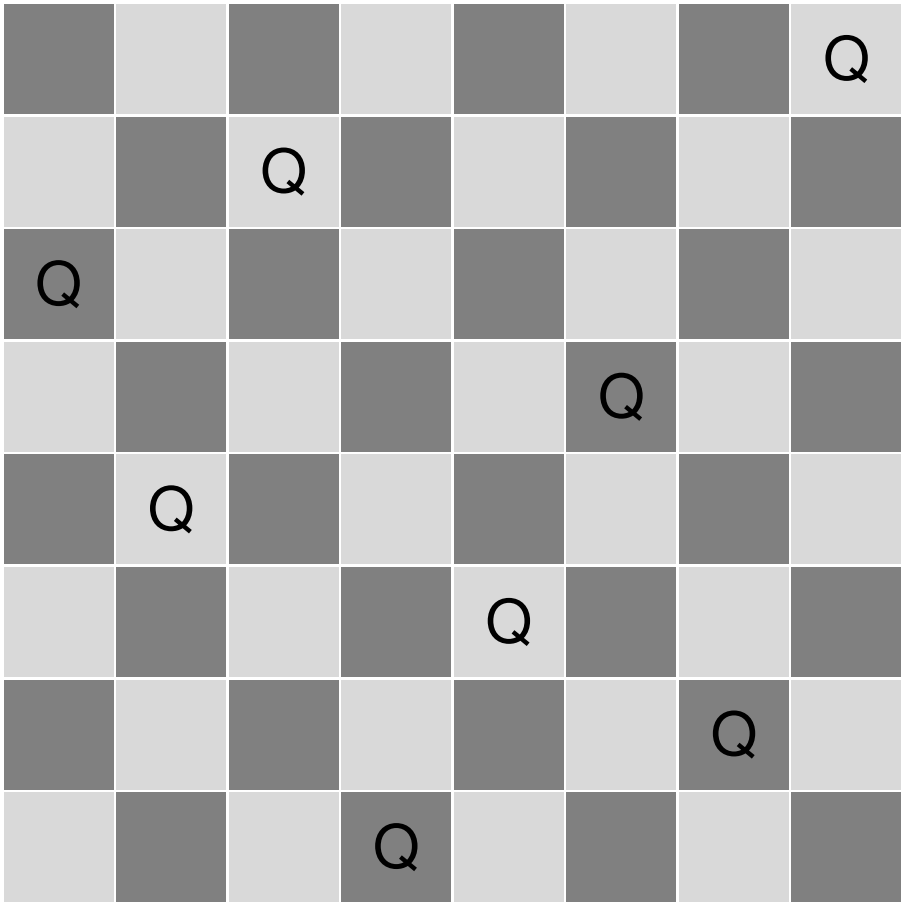
Ocho reinas, todas las soluciones



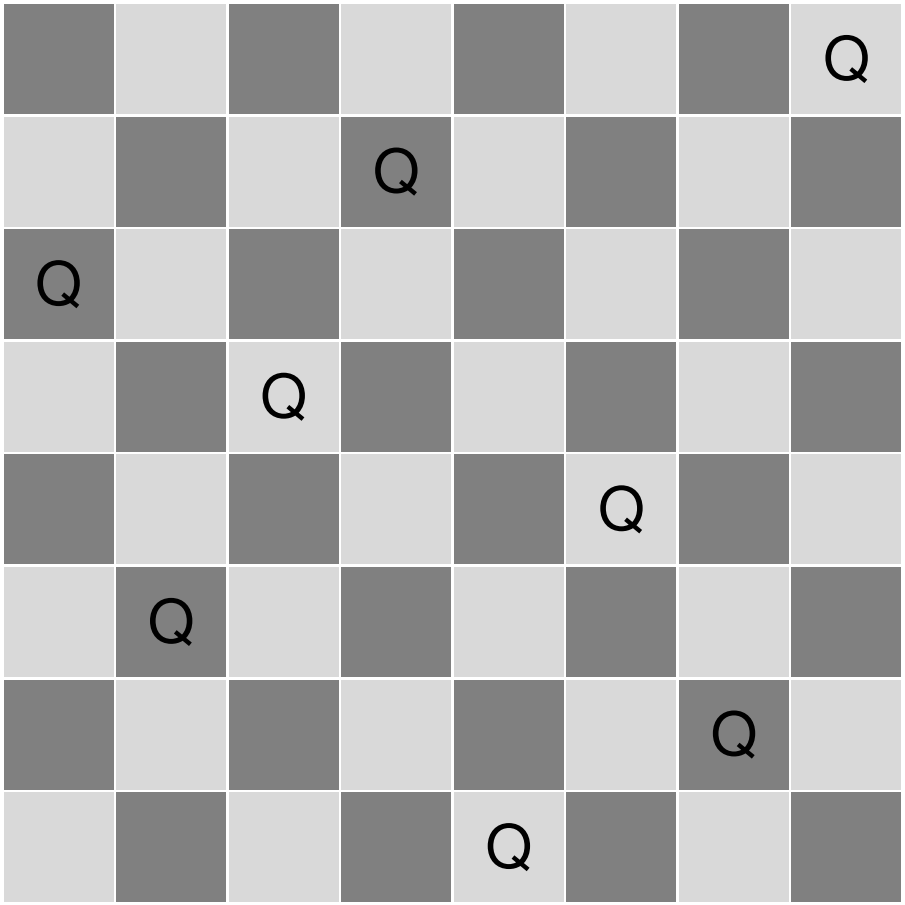
Ocho reinas, todas las soluciones



Ocho reinas, todas las soluciones



Ocho reinas, todas las soluciones



Ocho reinas, un algoritmo optimizado

El algoritmo

```
proc or_4(in sol, bajadas, subidas: list of nat, in/out r: nat)
                                  {calcula el número de maneras de extender sol}
                                {hasta ubicar en total 8 reinas sin que se amenacen}
                              {bajadas y subidas son las diagonales ya amenazadas}
    if |sol| = 8 then r:= r+1 fi
    else i:= |sol|+1
        for j:= 1 to 8 do
            if j ∉ sol ∧ bajada(i,j) ∉ bajadas ∧ subida(i,j) ∉ subidas
            then or_4(sol ◁ j, bajadas ◁ bajada(i,j), subidas ◁ subida(i,j), r)
            fi
        od
    fi
end
```

Ocho reinas, un algoritmo optimizado

El algoritmo principal

```
fun ocho_reinas_4() ret r: nat
    r:= 0
    or_4([ ], [ ], [ ], r)
end
```

Sobre bajadas y subidas

Observar que

- Todas las celdas de una bajada tienen en común que la diferencia entre la fila y la columna dan el mismo resultado.
- Todas las celdas de una subida tienen en común que la suma entre la fila y la columna dan el mismo resultado.

Esto sugiere la siguiente idea.

Ocho reinas, un algoritmo optimizado

Algoritmos auxiliares

```
fun bajada(i,j:nat) ret r: nat
    r:= i-j+7
end
fun subida(i,j:nat) ret r: nat
    r:= i+j
end
```

Ocho reinas, un algoritmo mejor

El grafo implícito

Ahora resulta más complicado explicitar el grafo implícito: V es el conjunto de listas $[p_1, \ldots, p_n] \in \{1, \ldots, 8\}^*$ tales que para todo $i \neq j$ las siguientes condiciones se cumplen:

1. $p_i \neq p_j$, es decir que no se repiten columnas,
2. $p_i - i \neq p_j - j$, es decir que no se repiten bajadas, y
3. $p_i + i \neq p_j + j$, es decir que no se repiten subidas.

Las aristas se establecen como en los intentos anteriores.