

# Algoritmos y Estructuras de Datos II

Recurrencias Divide y Vencerás  
Jerarquía de Funciones

25 y 27 de marzo de 2019

# Contenidos

- 1 Recurrencias
  - Algoritmos divide y vencerás
  - Recurrencias divide y vencerás
  - Demostración de la recurrencia DyV
- 2 Ejemplo
- 3 Funciones según su crecimiento
- 4 Jerarquía de funciones

# Recurrencias

- Surgen al analizar algoritmos recursivos, como la ordenación por intercalación.
- El conteo de operaciones “copia” la recursión del algoritmo y se vuelve recursivo también.
- Ejemplo: máximo de comparaciones de la ordenación por intercalación.
- Es un ejemplo de algoritmo divide y vencerás.
- Es un ejemplo de recurrencia divide y vencerás:

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ t(\lceil n/2 \rceil) + t(\lfloor n/2 \rfloor) + n - 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

# Algoritmo divide y vencerás

## Características

- hay una solución para los casos sencillos,
- para los complejos, se **divide** o **descompone** el problema en subproblemas:
  - cada subproblema es de igual naturaleza que el original,
  - el tamaño del subproblema es una **fracción** del original,
  - se resuelven los subproblemas apelando al mismo algoritmo,
- se **combinan** esas soluciones para obtener una solución del original.

# Algoritmo divide y vencerás

## Forma general

```

fun DyV(x) ret y
  if x suficientemente pequeño o simple then y:= ad_hoc(x)
  else descomponer x en  $x_1, x_2, \dots, x_a$ 
    for i:= 1 to a do  $y_i := \text{DyV}(x_i)$  od
    combinar  $y_1, y_2, \dots, y_a$  para obtener la solución y de x
  fi
end fun
  
```

Normalmente los  $x_i$  son **fracciones** de  $x$ :

$$|x_i| = \frac{|x|}{b}$$

para algún  $b$  fijo mayor que 1.

# Algoritmo divide y vencerás

## Ejemplos

- Ordenación por intercalación:
  - “x simple” = fragmento de arreglo de longitud 0 ó 1
  - “descomponer” = partir al medio ( $b = 2$ )
  - $a = 2$
  - “combinar” = intercalar
- Ordenación rápida:
  - “x simple” = fragmento de arreglo de longitud 0 ó 1
  - “descomponer” = separar los menores de los mayores ( $b = 2$ )
  - $a = 2$
  - “combinar” = yuxtaponer

# Algoritmo divide y vencerás

## Forma general

```

fun DyV(x) ret y
  if x suficientemente pequeño o simple then y:= ad_hoc(x)
  else descomponer x en  $x_1, x_2, \dots, x_a$ 
    for i:= 1 to a do  $y_i := \text{DyV}(x_i)$  od
    combinar  $y_1, y_2, \dots, y_a$  para obtener la solución y de x
  fi
end fun
  
```

- a: número de llamadas recursivas a DyV.
- b: relación entre el tamaño de x y el de  $x_i$ , satisface  $|x_i| = \frac{|x|}{b}$ .
- k: el orden de descomponer y combinar es  $n^k$ .

# Algoritmo divide y vencerás

## Conteo

Si queremos contar el costo computacional (número de operaciones)  $t(n)$  de la función *DyV* obtenemos:

$$t(n) = \begin{cases} c & \text{si la entrada es pequeña o simple} \\ a * t(n/b) + g(n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

si  $c$  es una constante que representa el costo computacional de la función *ad\_hoc* y  $g(n)$  es el costo computacional de los procesos de descomposición y de combinación.

Esta definición de  $t(n)$  es recursiva (como el algoritmo *DyV*), se llama **recurrencia**. Existen distintos tipos de recurrencia. Ésta se llama **recurrencia divide y vencerás**.



# Recurrencias divide y vencerás

- Si

$$t(n) = \begin{cases} c & \text{si la entrada es pequeña o simple} \\ a * t(n/b) + g(n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

si  $t(n)$  es no decreciente, y  $g(n)$  es del orden de  $n^k$ , entonces

- 

$$t(n) \text{ es del orden de } \begin{cases} n^{\log_b a} & \text{si } a > b^k \\ n^k \log n & \text{si } a = b^k \\ n^k & \text{si } a < b^k \end{cases}$$

# Demostración

Por la forma de la recurrencia

$$t(n) = \begin{cases} c & \text{si la entrada es pequeña o simple} \\ a * t(n/b) + g(n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

resulta más sencillo calcular  $t(n)$  cuando  $n$  es potencia de  $b$ .

Se organiza la tarea en dos partes

- calcular el orden de  $t(n)$  cuando  $n$  es potencia de  $b$ ,
- extender el cálculo para los demás  $n$ .

# Calculando para $n$ potencia de $b$

- Supongamos que



$$t(n) = \begin{cases} c & \text{si la entrada es pequeña o simple} \\ a * t(n/b) + g(n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- y  $g(n)$  es del orden de  $n^k$ , es decir  $g(n) \leq dn^k$  para casi todo  $n \in \mathbb{N}$
- $n$  potencia de  $b$ ,  $n = b^m$



$$\begin{aligned} t(n) &= t(b^m) \\ &= a * t(b^m/b) + g(b^m) \\ &\leq a * t(b^{m-1}) + d(b^m)^k \\ &\leq a * t(b^{m-1}) + d(b^k)^m \end{aligned}$$

## Iterando

$$\begin{aligned}
 t(b^m) &\leq at(b^{m-1}) + d(b^k)^m \\
 &\leq a(at(b^{m-2}) + d(b^k)^{m-1}) + d(b^k)^m \\
 &\leq a^2t(b^{m-2}) + ad(b^k)^{m-1} + d(b^k)^m \\
 &\leq a^3t(b^{m-3}) + a^2d(b^k)^{m-2} + ad(b^k)^{m-1} + d(b^k)^m \\
 &\leq \dots \\
 &\leq a^m t(1) + a^{m-1} db^k + \dots + ad(b^k)^{m-1} + d(b^k)^m \\
 &= a^m c + d(b^k)^m ((a/b^k)^{m-1} + \dots + a/b^k + 1) \\
 &= a^m c + d(b^m)^k (r^{m-1} + \dots + r + 1)
 \end{aligned}$$

donde  $r = a/b^k$  y recordemos  $n = b^m$  y entonces  $m = \log_b n$

$$\begin{aligned}
 t(n) &\leq a^{\log_b n} c + dn^k (r^{m-1} + \dots + r + 1) \\
 &= n^{\log_b a} c + dn^k (r^{m-1} + \dots + r + 1)
 \end{aligned}$$

## Propiedad del logaritmo

En el último paso hemos usado que  $x^{\log_y z}$  es igual a  $z^{\log_y x}$ .

- En efecto, si aplicamos  $\log_y$  a ambos, obtenemos
- $\log_y(x^{\log_y z})$  y  $\log_y(z^{\log_y x})$ , que luego de simplificar quedan
- $(\log_y x)(\log_y z)$  y  $(\log_y z)(\log_y x)$  que son iguales.
- Como  $\log_y$  es inyectiva,  $x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$  vale.

Volvamos a los cálculos.

## Finalizando

$$t(n) \leq n^{\log_b a} c + dn^k (r^{m-1} + \dots + r + 1)$$

donde  $r = a/b^k$

- si  $r = 1$ , entonces  $a = b^k$  y  $\log_b a = k$  y además

$$t(n) \leq n^k c + dn^k \log_b n$$

es del orden de  $n^k \log n$  para  $n$  potencia de  $b$

- si  $r \neq 1$ , entonces

$$t(n) \leq n^{\log_b a} c + dn^k \left( \frac{r^m - 1}{r - 1} \right)$$

## Finalizando

caso  $r > 1$ 

- si  $r > 1$ , como  $r = a/b^k$  entonces  $a > b^k$  y  $\log_b a > k$  y además

$$\begin{aligned}
 t(n) &\leq n^{\log_b a} c + dn^k \left( \frac{r^m - 1}{r - 1} \right) \\
 &\leq n^{\log_b a} c + \frac{d}{r - 1} n^k r^m \\
 &= n^{\log_b a} c + \frac{d}{r - 1} n^k \frac{a^m}{(b^k)^m} \\
 &= n^{\log_b a} c + \frac{d}{r - 1} n^k \frac{a^m}{(b^m)^k} \\
 &= n^{\log_b a} c + \frac{d}{r - 1} n^k \frac{a^m}{n^k} \\
 &= n^{\log_b a} c + \frac{d}{r - 1} a^m \\
 &= n^{\log_b a} c + \frac{d}{r - 1} a^{\log_b n} \\
 &= n^{\log_b a} c + \frac{d}{r - 1} n^{\log_b a}
 \end{aligned}$$

es del orden de  $n^{\log_b a}$  para  $n$  potencia de  $b$

## Finalizando

caso  $r < 1$ 

- si  $r < 1$ , como  $r = a/b^k$  entonces  $a < b^k$  y  $\log_b a < k$ . Además,  $r - 1$  y  $r^m - 1$  son negativos, para evitar confusión escribimos  $\frac{1-r^m}{1-r}$  en vez de  $\frac{r^m-1}{r-1}$ .

$$\begin{aligned}
 t(n) &\leq n^{\log_b a} c + dn^k \left( \frac{1-r^m}{1-r} \right) \\
 &= n^{\log_b a} c + \frac{d}{1-r} n^k (1-r^m) \\
 &\leq n^{\log_b a} c + \frac{d}{1-r} n^k
 \end{aligned}$$

es del orden de  $n^k$  para  $n$  potencia de  $b$



# Conclusión

- Si

$$t(n) = \begin{cases} c \\ a * t(n/b) + g(n) \end{cases}$$

si la entrada es pequeña o simple  
en caso contrario

- con  $g(n)$  del orden de  $n^k$ ,
- demostramos

$$t(n) \text{ es del orden de } \begin{cases} n^{\log_b a} & \text{si } a > b^k \\ n^k \log n & \text{si } a = b^k \\ n^k & \text{si } a < b^k \end{cases}$$

- para  $n$  potencia de  $b$ .

## Extendiendo el resultado a todo $n$

- Hemos calculado el orden de cualquier algoritmo divide y vencerás, para  $n$  potencia de  $b$ .
- Queremos calcular el orden para todo  $n$ .
- Se puede comprobar que si
  - $t(n)$  es no decreciente, y
  - $t(n)$  es del orden de  $h(n)$  para potencias de  $b$  para cualquiera de las tres funciones  $h(n)$  que acabamos de considerar,entonces  $t(n)$  es del orden de  $h(n)$  (para  $n$  arbitrario, no solamente las potencias de  $b$ ).
- es decir, el resultado puede extenderse para  $n$  arbitrario.

## Ejemplo: búsqueda binaria

{Pre:  $1 \leq \text{lft} \leq n+1 \wedge 0 \leq \text{rgt} \leq n \wedge a$  ordenado}

**fun** binary\_search\_rec (a: **array**[1..n] **of** T, x:T, lft, rgt : **nat**) **ret** i:**nat**

**var** mid: **nat**

**if** lft > rgt  $\rightarrow$  i = 0

    lft  $\leq$  rgt  $\rightarrow$  mid := (lft+rgt)  $\div$  2

**if** x < a[mid]  $\rightarrow$  i := binary\_search\_rec(a, x, lft, mid-1)

      x = a[mid]  $\rightarrow$  i := mid

      x > a[mid]  $\rightarrow$  i := binary\_search\_rec(a, x, mid+1, rgt)

**fi**

**fi**

**end fun**

{Post: (i = 0  $\Rightarrow$  x no está en a[lft,rgt])  $\wedge$  (i  $\neq$  0  $\Rightarrow$  x = a[i])}

# Búsqueda binaria

Función principal

{Pre:  $n \geq 0$ }

**fun** binary\_search (a: **array**[1..n] **of** T, x:T) **ret** i:nat

  i:= binary\_search\_rec(a, x, 1, n)

**end fun**

{Post:  $(i = 0 \Rightarrow x \text{ no está en } a) \wedge (i \neq 0 \Rightarrow x = a[i])$ }

# Búsqueda binaria

## Análisis

- Sea  $t(n)$  = número de comparaciones que hace en el peor caso cuando el arreglo tiene  $n$  celdas.



$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ t(n/2) + 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $k = 0$ .
- $a = b^k$ .
- $t(n)$  es del orden de  $n^k \log n$ , es decir, del orden de  $\log n$ .

# Análisis de algunos algoritmos

- Ordenación por selección es del orden de  $n^2$ .
- Ordenación por inserción es del orden de  $n^2$  (peor caso y caso medio).
- Ordenación por intercalación es del orden de  $n \log_2 n$ .
- Ordenación rápida es del orden de  $n \log_2 n$  (caso medio).
- Búsqueda lineal es del orden de  $n$ .
- Búsqueda binaria es del orden de  $\log_2 n$ .

## ¿Cómo comparar los órdenes de los algoritmos?

- Hay funciones que crecen más rápido que otras (cuando  $n$  tiende a  $+\infty$ ).
- Escribiremos  $f(n) \sqsubset g(n)$  para decir que  $g(n)$  crece más rápido que  $f(n)$ . Por ejemplo:
  - $n \log_2 n \sqsubset n^2$ .
  - $\log_2 n \sqsubset n$ .
- Escribiremos  $f(n) \approx g(n)$  para decir que  $f(n)$  y  $g(n)$  crecen al mismo ritmo. Por ejemplo:
  - $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \approx n^2$ .
  - $45n^2 \approx n^2$ .

# Algunas condiciones

- No nos interesan las constantes multiplicativas:
  - $\frac{1}{4}n^2 \approx n^2$
  - $4n^3 \approx n^3$
  - $1000 \log n \approx \log n$
  - $\pi n \approx n$
- No nos interesan los términos menos significativos, que crecen más lento:
  - $n^2 + n \approx n^2$
  - $n^3 + n^2 \log_2 n \approx n^3$
  - $\log n + 3456 \approx \log n$
  - $n + \sqrt{n} \approx n$



# ¿Cómo comparar funciones según su crecimiento?

- Regla del límite. Sean  $f(n)$  y  $g(n)$  tales que
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \infty$ , y
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  existe.

Entonces

- si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ , entonces  $f(n) \sqsubset g(n)$ .
- si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ , entonces  $g(n) \sqsubset f(n)$ .
- caso contrario (el límite es un número real positivo),  
 $f(n) \approx g(n)$ .

# Jerarquía

$$\begin{aligned} 1 \sqsubset \log_2 n \approx \log_3 n \sqsubset n^{0.001} \sqsubset n^{1.5} \sqsubset n^2 \sqsubset \\ \sqsubset n^5 \sqsubset n^{100} \sqsubset 1.01^n \sqsubset 2^n \sqsubset 100^n \sqsubset \\ \sqsubset 10000^n \sqsubset n! \sqsubset n^n \end{aligned}$$

# Propiedades

- Constantes multiplicativas no afectan.
- Términos de crecimiento despreciable no afectan.
- Sean  $a, b > 1$ ,  $\log_a n \approx \log_b n$ .
- Sea  $f(n) > 0$  para “casi todo  $n \in \mathbb{N}$ ”. Entonces:
  - $g(n) \sqsubset h(n) \iff f(n)g(n) \sqsubset f(n)h(n)$ .
  - $g(n) \approx h(n) \iff f(n)g(n) \approx f(n)h(n)$ .
- Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty$ . Entonces:
  - $f(n) \sqsubset g(n) \implies f(h(n)) \sqsubset g(h(n))$ .
  - $f(n) \approx g(n) \implies f(h(n)) \approx g(h(n))$ .

# Jerarquía

$$\begin{aligned}
 1 &\ll \log(\log(\log n)) \ll \log(\log n) \ll \log n \ll n^{0.001} \ll \\
 &\ll n \ll n \log n \ll n^{1.001} \ll n^{100} \ll 1.01^n \ll \\
 &\ll n^{100} * 1.01^n \ll 1.02^n \ll 100^n \ll 10000^n \ll \\
 &\ll (n-1)! \ll n! \ll (n+1)! \ll n^n
 \end{aligned}$$