

# Algoritmos y Estructuras de Datos II

Programación dinámica

# Clase de hoy

- 1 Backtracking
- 2 Programación dinámica
  - Problema de la moneda
  - Problema de la mochila

# Backtracking

## Problema de la moneda

- Sean  $0 \leq i \leq n$  y  $0 \leq j \leq k$ ,
- definimos  $cambio(i, j) =$  “menor número de monedas necesarias para pagar exactamente el monto  $j$  con denominaciones  $d_1, d_2, \dots, d_i$ .”



$$cambio(i, j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ cambio(i - 1, j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(cambio(i - 1, j), 1 + cambio(i, j - d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

- Es exponencial.

# Backtracking

## Problema de la mochila

- Sean  $0 \leq i \leq n$  y  $0 \leq j \leq W$ ,
- definimos  $mochila(i, j) =$  “mayor valor alcanzable sin exceder la capacidad  $j$  con objetos  $1, 2, \dots, i$ .”



$$mochila(i, j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \wedge i = 0 \\ mochila(i-1, j) & w_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \max(mochila(i-1, j), v_i + mochila(i-1, j-w_i)) & j \geq w_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

- Es exponencial.

# Backtracking

Problema de los caminos de costo mínimo entre cada par de vértices

- Sean  $1 \leq i, j \leq n$  y  $0 \leq k \leq n$ ,
- definimos  $camino(k, i, j) =$  “menor costo posible para caminos de  $i$  a  $j$  cuyos vértices intermedios se encuentran en el conjunto  $\{1, \dots, k\}$ .”



$$camino(k, i, j) = \begin{cases} L[i, j] \\ \min(camino(k-1, i, j), camino(k-1, i, k) + camino(k-1, k, j)) \end{cases}$$

- Es exponencial ( $3^n$ ).

# Programación dinámica

- Método para transformar una definición recursiva en iterativa
- a través de la confección de una **tabla de valores**.
- Objetivo: evitar la reiteración de cálculos.
- Ejemplo: definición recursiva de la secuencia de Fibonacci.

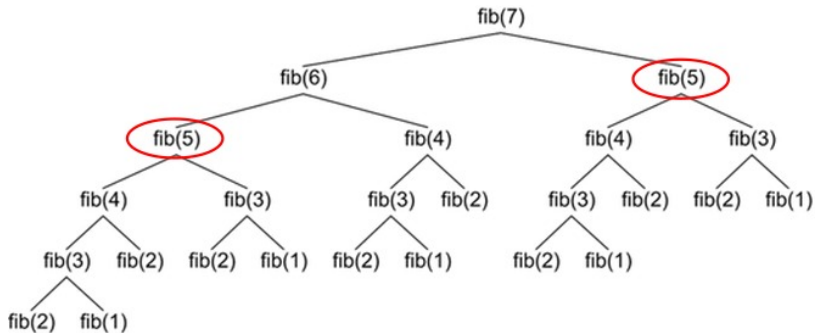
# Secuencia de Fibonacci



$$f_n = \begin{cases} n & n \leq 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

- Esta función recursiva es exponencial.
- La razón, el cálculo de  $f_n$  lleva a calcular
  - 2 veces  $f_{n-2}$ ,
  - 3 veces  $f_{n-3}$ ,
  - 5 veces  $f_{n-4}$ ,
  - etc.

# Secuencia de Fibonacci





## ¿Cómo podemos evitar tantos recálculos?

- Llevando una tabla de valores calculados.
- Comenzando desde los casos bases.
- Sea  $f$  un arreglo de 0 a  $n$ .
  - $f[0] := 0$
  - $f[1] := 1$
  - $f[2] := f[1] + f[0]$
  - $f[3] := f[2] + f[1]$
  - etc

# Fibonacci a través de una tabla

*{PRE:  $n > 1$ }*

```
fun fib(n: nat) ret r: nat
  var f: array[0..n] of nat
  f[0]:= 0
  f[1]:= 1
  for i:= 2 to n do f[i]:= f[i-1] + f[i-2] od
  r:= f[n]
end fun
```

¡Este algoritmo es lineal!

# Problema de la moneda

## Backtracking

Vimos la definición

$$\text{cambio}(i, j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \infty & j > 0 \wedge i = 0 \\ \text{cambio}(i - 1, j) & d_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \min(\text{cambio}(i - 1, j), 1 + \text{cambio}(i, j - d_i)) & j \geq d_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

que puede ser exponencial debido a que tiene dos llamadas recursivas en el último caso.

# Problema de la moneda

## Confección de una tabla

- Habiendo dos parámetros, la tabla será una matriz en vez de un vector como en el caso de Fibonacci.
- Los casos base corresponden al llenado de la primera columna y primera fila de la matriz.
- Como todas las llamadas recursivas se realizan decrementando el “parámetro  $i$ ” o manteniendolo igual pero en ese caso decrementando el “parámetro  $j$ ”, se propone el siguiente método de llenado de la matriz:
  - fila por fila, desde la primera a la última, de modo de que el valor correspondiente a  $cambio(i - 1, j)$  ya esté computado al calcular el valor correspondiente a  $cambio(i, j)$
  - dentro de cada fila, desde la primer columna hasta la última, de modo de que el valor correspondiente a  $cambio(i, j - d_i)$  ya esté computado al calcular  $cambio(i, j)$

# Problema de la moneda

## Programación dinámica

```

fun cambio(d:array[1..n] of nat, k: nat) ret r: nat
  var cam: array[0..n,0..k] of nat
  for i:= 0 to n do cam[i,0]:= 0 od
  for j:= 1 to k do cam[0,j]:=  $\infty$  od
  for i:= 1 to n do
    for j:= 1 to k do
      if d[i] > j then cam[i,j]:= cam[i-1,j]
      else cam[i,j]:= min(cam[i-1,j], 1+cam[i,j-d[i]])
      fi
    od
  od
  r:= cam[n,k]
end fun

```

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0																	
1																	
2																	
3																	

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0																
1	0																
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0																
2	0																
3	0																



# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$													
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$													
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1												
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$											
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$										
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$									
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2								
2	0																
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0																
3	0																



# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$															
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$															
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1														
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	3	$\infty$	3	$\infty$	4	$\infty$	4
3	0																

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	3	$\infty$	3	$\infty$	4	$\infty$	4
3	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2										

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	3	$\infty$	3	$\infty$	4	$\infty$	4
3	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	1									

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	3	$\infty$	3	$\infty$	4	$\infty$	4
3	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	1	2								

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	3	$\infty$	3	$\infty$	4	$\infty$	4
3	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	1	2	2							



# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	3	$\infty$	3	$\infty$	4	$\infty$	4
3	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	1	2	2	3	2	3	3			

# Problema de la moneda

Ejemplo con denominaciones  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 2$  y  $d_3 = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
2	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	3	$\infty$	3	$\infty$	4	$\infty$	4
3	0	$\infty$	1	$\infty$	1	$\infty$	2	1	2	2	3	2	3	3	2	3	3

# Problema de la mochila

## Backtracking

Vimos la definición

$$mochila(i, j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \wedge i = 0 \\ mochila(i - 1, j) & w_i > j > 0 \wedge i > 0 \\ \max(mochila(i - 1, j), v_i + mochila(i - 1, j - w_i)) & j \geq w_i > 0 \wedge i > 0 \end{cases}$$

que puede ser exponencial debido a que tiene dos llamadas recursivas en el último caso.

# Problema de la mochila

## Confección de una tabla

- Habiendo dos parámetros, la tabla será nuevamente una matriz.
- Los casos base corresponden al llenado de la primera columna y primera fila de la matriz.
- Como todas las llamadas recursivas se realizan decrementando el “parámetro  $i$ ”, la única condición necesaria para el llenado de la tabla es proceder fila por fila, no importa el orden de llenado dentro de cada fila.

# Problema de la mochila

## Programación dinámica

```

fun mochila(v:array[1..n] of valor, w:array[1..n] of nat, W: nat)
                                                    ret r: valor

  var moch: array[0..n,0..W] of valor
  for i:= 0 to n do moch[i,0]:= 0 od
  for j:= 1 to W do moch[0,j]:= 0 od
  for i:= 1 to n do
    for j:= 1 to W do
      if w[i] > j then moch[i,j]:= moch[i-1,j]
      else moch[i,j]:= max(moch[i-1,j],v[i]+moch[i-1,j-w[i]])
      fi
    od
  od
  r:= moch[n,W]
end fun

```

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0																	
1																	
2																	
3																	
4																	

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																
2	0																
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0									
2	0																
3	0																
4	0																



# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3								
2	0																
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3							
2	0																
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0																
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0												
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2									
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3								
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3				
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5			
3	0																
4	0																



# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0																
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5
3	0	0	0	0	0	0	2	2									
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3									
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3					
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5		
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	6	
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	6	6
4	0																

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	6	6
4	0	0	0														



# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	6	6
4	0	0	0	2	2	2	2										

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	6	6
4	0	0	0	2	2	2	2	3	4	4							

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	6	6
4	0	0	0	2	2	2	2	3	4	4	5	5	5	5	5		

# Problema de la mochila

Ejemplo con valores  $v_1 = 3$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 3$ ,  $v_4 = 2$ ,  $w_1 = 8$ ,  $w_2 = 5$ ,  $w_3 = 7$  y  $w_4 = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	5
3	0	0	0	0	0	2	2	3	3	3	3	3	5	5	5	6	6
4	0	0	0	2	2	2	2	3	4	4	5	5	5	5	5	7	7