Algoritmos y Estructuras de Datos II

Recorriendo grafos

1 de junio de 2015

Clase de hoy

1. Repaso
   - Divide y vencerás
   - Algoritmos voraces
   - Backtracking
   - Programación dinámica
   - Conclusión
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
  1. análisis de algoritmos
  2. tipos de datos
  3. técnicas de resolución de problemas
     - divide y vencerás
     - algoritmos voraces
     - backtracking
     - programación dinámica: problema de la moneda, problema de la mochila, algoritmo de Floyd
     - recorrida de grafos

Clase de hoy

Divide y vencerás

- Ordenación por intercalación, $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Ordenación rápida, $\mathcal{O}(n \log n)$ en la práctica.
- Búsqueda binaria, $\mathcal{O}(\log n)$.
- Exponenciación, $\mathcal{O}(\log n)$ número de multiplicaciones (n es el exponente).
- Multiplicación de grandes números, $\mathcal{O}(n^{\log_2 3})$ donde n es el número de dígitos.

Clase de hoy

1. Repaso
   - Divide y vencerás
   - Algoritmos voraces
   - Backtracking
   - Programación dinámica
   - Conclusión
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

Algoritmos voraces

- Problema de la moneda
  - $\mathcal{O}(n)$ donde n es el número de denominaciones si están ordenadas.
  - no anda para cualquier conjunto de denominaciones
- Problema de la mochila
  - $\mathcal{O}(n)$ donde n es el número de objetos si están ordenados según sus cocientes v_i/w_i.
  - sólo anda para objetos fraccionables
- Problema del árbol generador de costo mínimo
  - Prim es $\mathcal{O}(|V|^2)$ donde V es el conjunto de vértices. Se puede mejorar con implementaciones ingeniosas.
  - Kruskal es $\mathcal{O}(|A| \log |V|)$ donde A es el conjunto de aristas.
  - Boruvka es $\mathcal{O}(|A| \log |V|)$.
- Problema del camino de costo mínimo
  - Dijkstra es $\mathcal{O}(|V|^2)$.

Clase de hoy

1. Repaso
   - Divide y vencerás
   - Algoritmos voraces
   - Backtracking
   - Programación dinámica
   - Conclusión
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

Backtracking

- Problema de la moneda,
  - para cualquier conjunto de denominaciones (positivas),
  - puede ser exponencial.
- Problema de la mochila,
  - para objetos no fragmentables
  - puede ser exponencial.
- Problema del camino de costo mínimo entre todo par de vértices,
  - calcula el camino de costo mínimo entre todo par de vértices,
  - puede ser exponencial

Clase de hoy

Programación dinámica

- Problema de la moneda
- Problema de la mochila
- Algoritmo de Floyd
- En los tres casos se obtienen cotas buenas de la performance en el peor caso
- En los tres casos se puede resolver el problema del cálculo del costo o valor óptimo, y también la obtención de la solución que realiza dicho costo o valor óptimo.

Clase de hoy

1. Repaso
   - Divide y vencerás
   - Algoritmos voraces
   - Backtracking
   - Programación dinámica
   - Conclusión
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

Conclusión

- Algoritmos voraces
  - Cuando tenemos un criterio de selección que garantiza optimalidad
- Backtracking
  - Cuando no tenemos un criterio así
  - solución top-down
  - en general es exponencial
- Programación dinámica
  - construye una tabla bottom-up
  - evita repetir cálculos
  - pero realiza algunos cálculos inútiles.

Clase de hoy

Recorrida de grafos

Recorrer un grafo, significa **procesar** los vértices del mismo, de forma organizada de modo de asegurarse:

- que todos los vértices sean **procesados**,
- que ninguno de ellos sea **procesado** más de una vez.

Se habla de **procesar** los vértices, pero también utilizaremos la palabra **visitar** los vértices. En este contexto, son sinónimos. Puede haber más de una forma natural de recorrer un cierto grafo.

Clase de hoy

1. Repaso
   - Divide y vencerás
   - Algoritmos voraces
   - Backtracking
   - Programación dinámica
   - Conclusión
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

Recorrida de árboles binarios

Un caso de grafo sencillo que ya han visto es el de árbol binario. Se han visto 3 maneras de **recorrerlo**:

pre-order
: Se **visita** primero el elemento que se encuentra en la raíz, luego se **recorre** el subárbol izquierdo y finalmente se **recorre** el subárbol derecho.

in-order
: Se **recorre** el subárbol izquierdo, luego se **visita** el elemento que se encuentra en la raíz y finalmente se **recorre** el subárbol derecho.

pos-order
: Se **recorre** el subárbol izquierdo, luego el derecho y finalmente se **visita** el elemento que se encuentra en la raíz.

Algoritmos

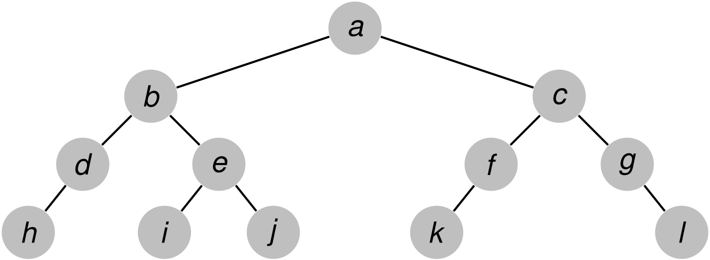
Los siguientes algoritmos reflejan estas distintas maneras de recorrer árboles binarios, generando listas con sus elementos. Los elementos aparecen en el orden en que se visitan.

$\text{pre\_order}(<>) = [\,]$
$\text{pre\_order}(< l, e, r >) = e \triangleright \text{pre\_order}(l) +\!\!+ \text{pre\_order}(r)$

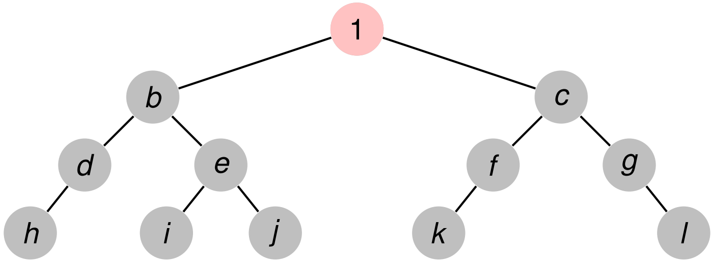
$\text{in\_order}(<>) = [\,]$
$\text{in\_order}(< l, e, r >) = \text{in\_order}(l) +\!\!+ (e \triangleright \text{in\_order}(r))$

$\text{pos\_order}(<>) = [\,]$
$\text{pos\_order}(< l, e, r >) = \text{pos\_order}(l) +\!\!+ \text{pos\_order}(r) \triangleleft e$

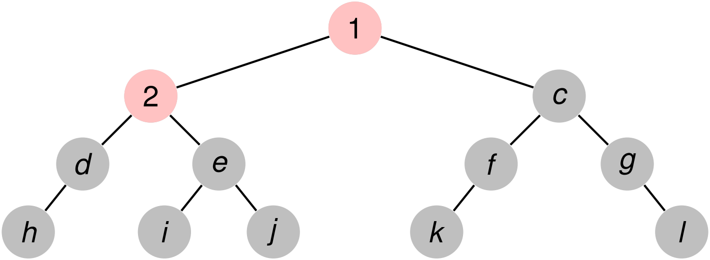
Ejemplo de árbol binario



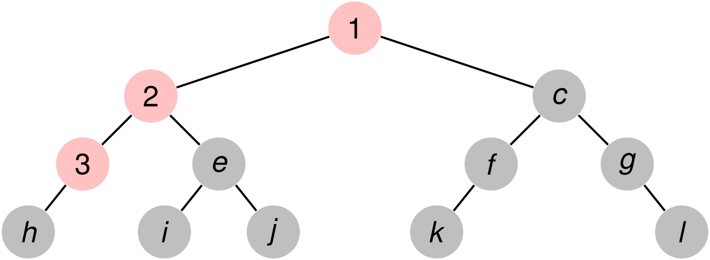
Ejemplo, recorrida pre-order



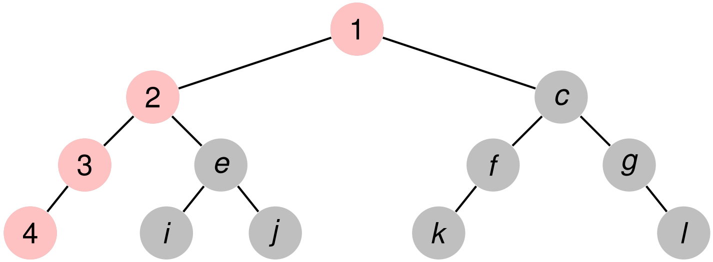
Ejemplo, recorrida pre-order



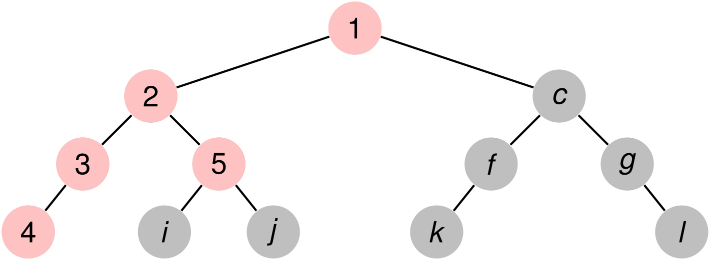
Ejemplo, recorrida pre-order



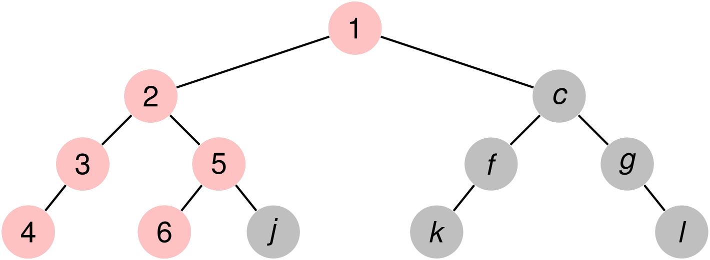
Ejemplo, recorrida pre-order



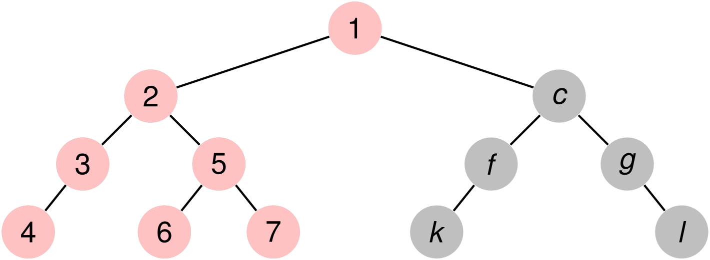
Ejemplo, recorrida pre-order



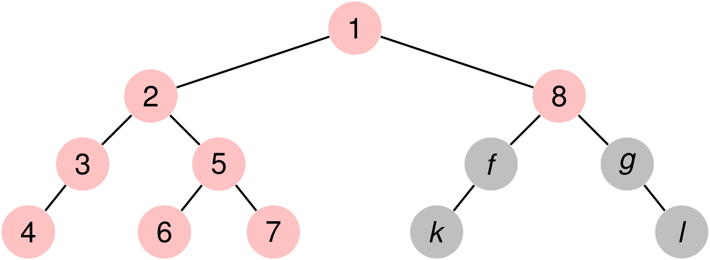
Ejemplo, recorrida pre-order



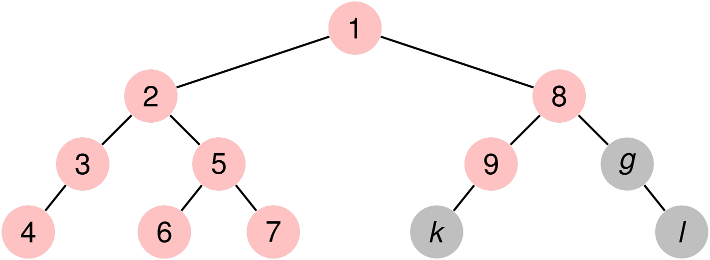
Ejemplo, recorrida pre-order



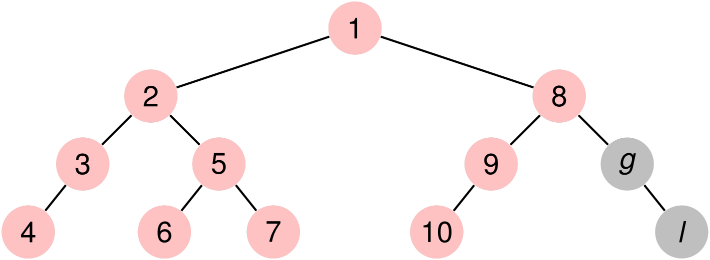
Ejemplo, recorrida pre-order



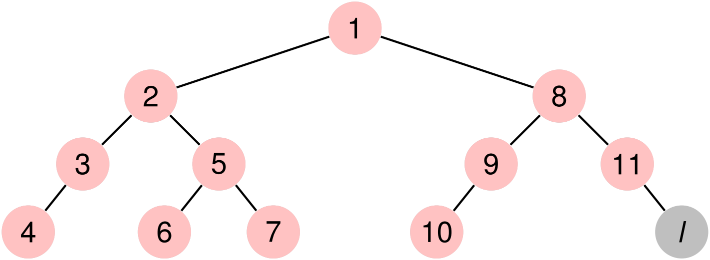
Ejemplo, recorrida pre-order



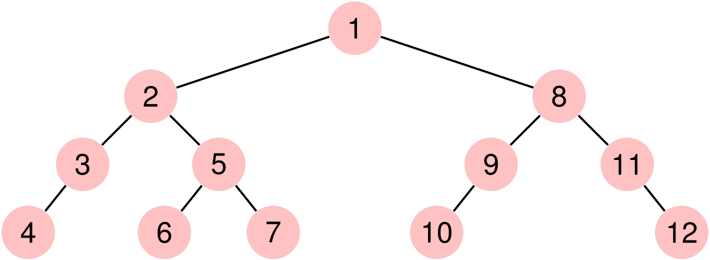
Ejemplo, recorrida pre-order



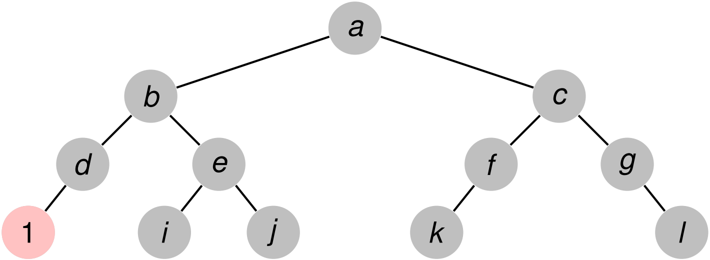
Ejemplo, recorrida pre-order



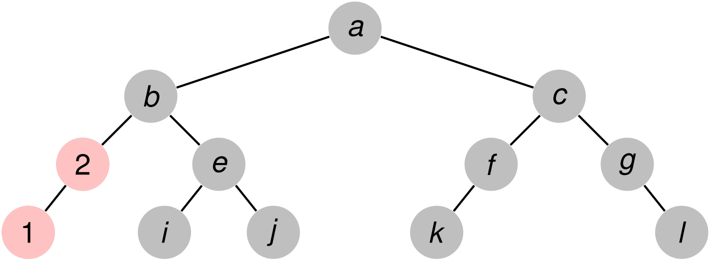
Ejemplo, recorrida pre-order



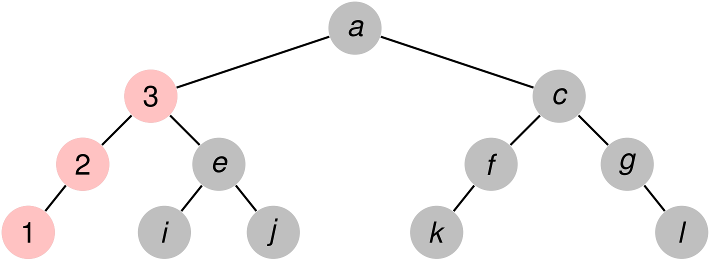
Ejemplo, recorrida in-order



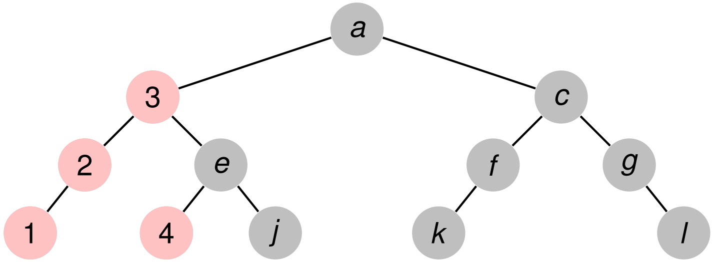
Ejemplo, recorrida in-order



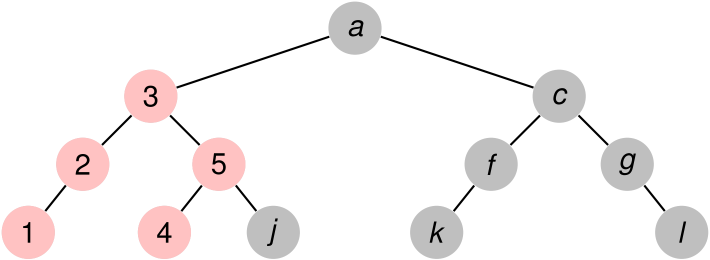
Ejemplo, recorrida in-order



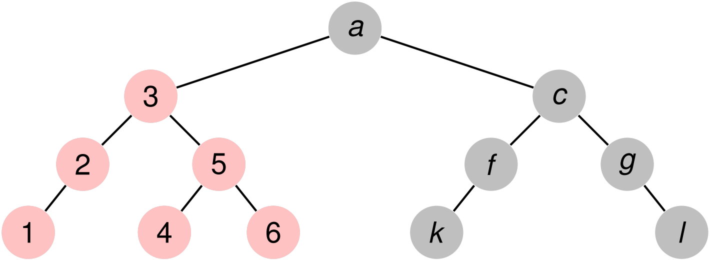
Ejemplo, recorrida in-order



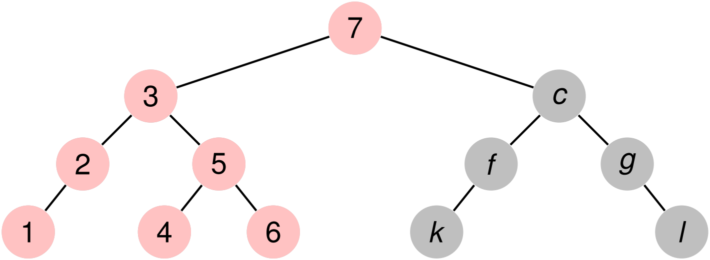
Ejemplo, recorrida in-order



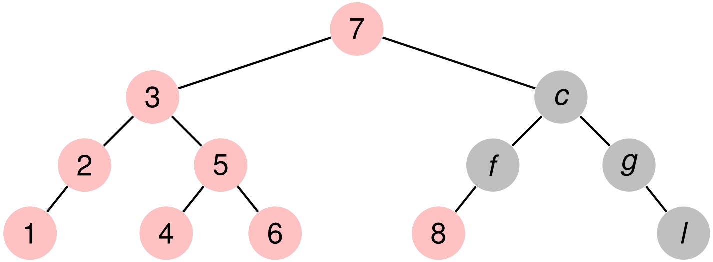
Ejemplo, recorrida in-order



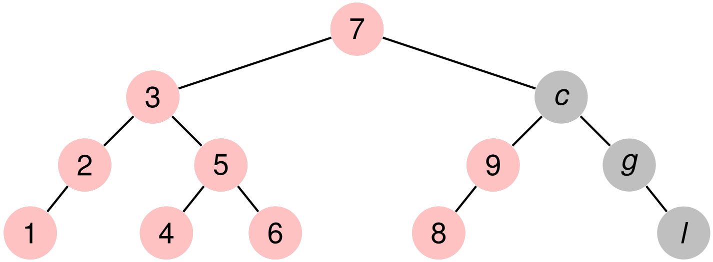
Ejemplo, recorrida in-order



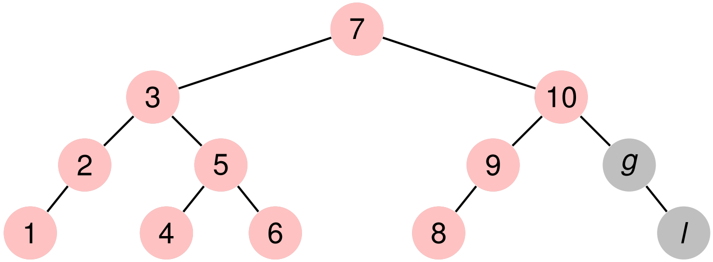
Ejemplo, recorrida in-order



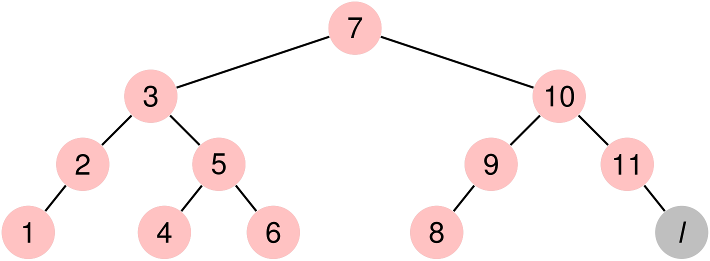
Ejemplo, recorrida in-order



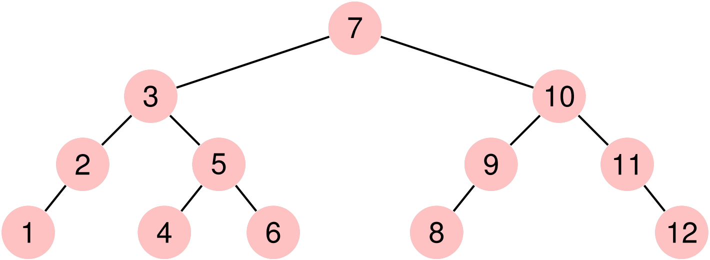
Ejemplo, recorrida in-order



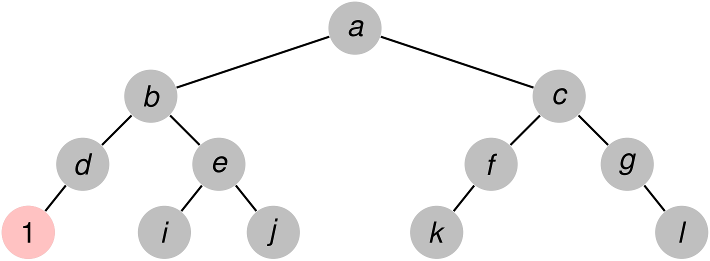
Ejemplo, recorrida in-order



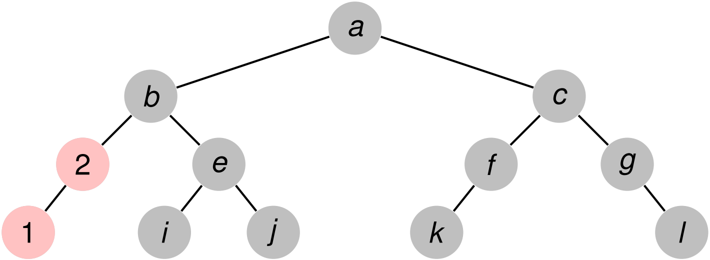
Ejemplo, recorrida in-order



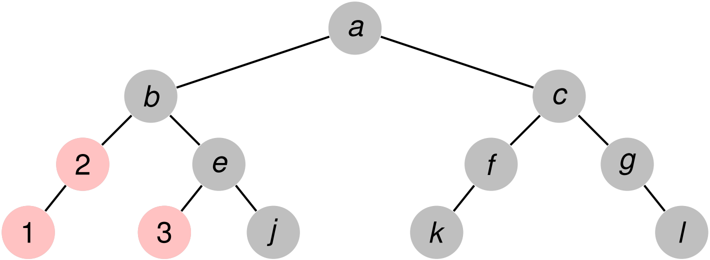
Ejemplo, recorrida pos-order



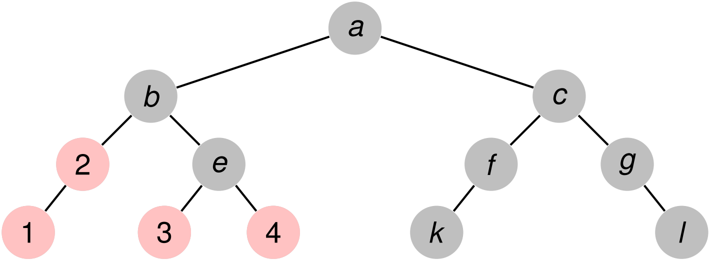
Ejemplo, recorrida pos-order



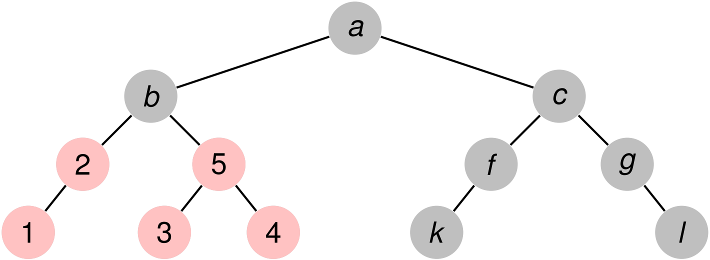
Ejemplo, recorrida pos-order



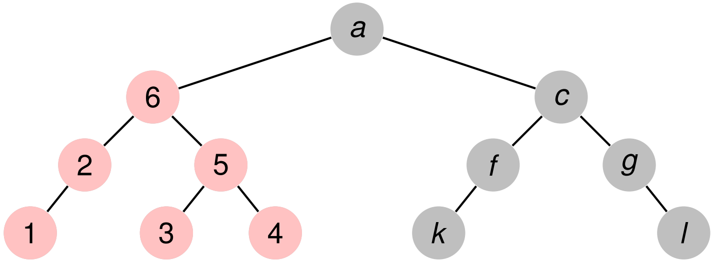
Ejemplo, recorrida pos-order



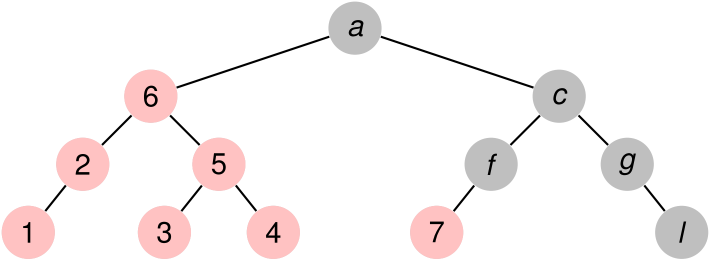
Ejemplo, recorrida pos-order



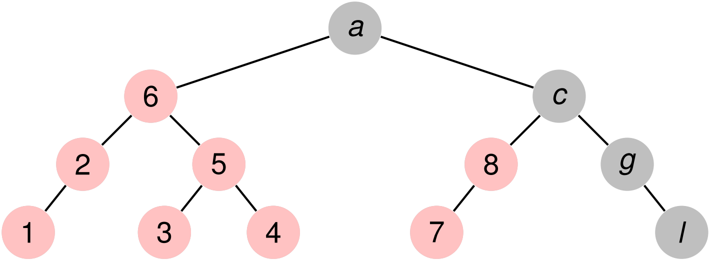
Ejemplo, recorrida pos-order



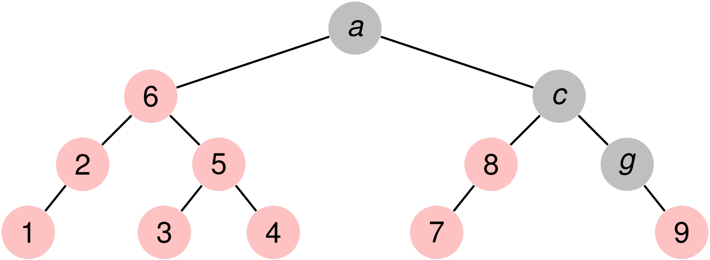
Ejemplo, recorrida pos-order



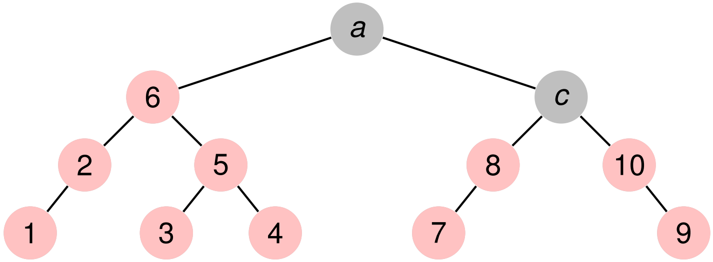
Ejemplo, recorrida pos-order



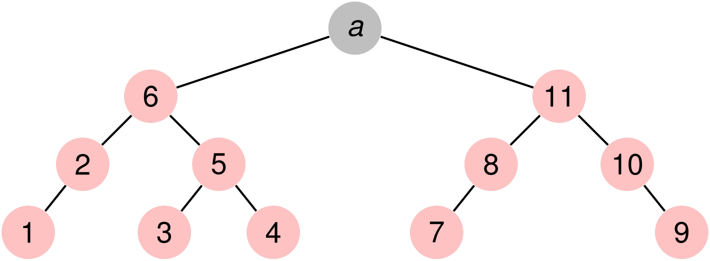
Ejemplo, recorrida pos-order



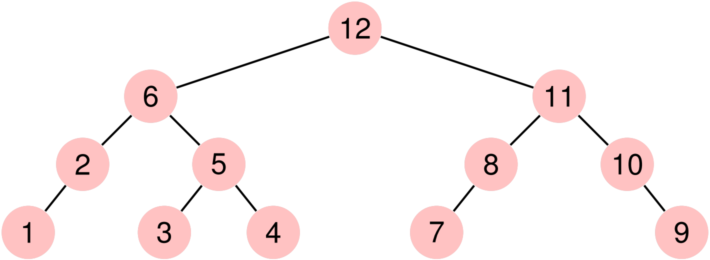
Ejemplo, recorrida pos-order



Ejemplo, recorrida pos-order



Ejemplo, recorrida pos-order

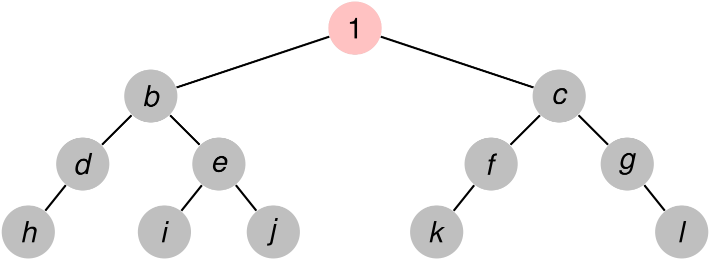


Otras 3 maneras de recorrer árboles binarios

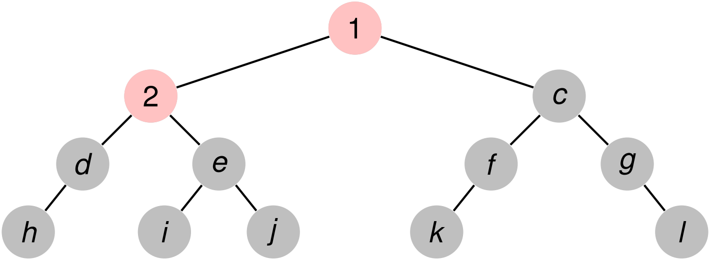
Hay otras tres maneras de recorrer: en cada una de las anteriores, intercambiar el orden entre las recorridas de los subárboles. Por ejemplo:

in_order_der_izq($<>$) = [ ]
in_order_der_izq($< l, e, r >$) =
    in_order_der_izq(r) ++ ($e \triangleright$ in_order_der_izq(l))

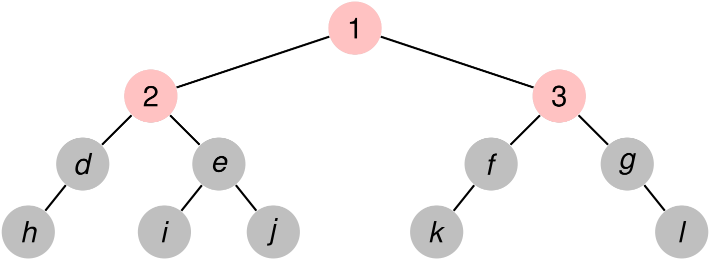
Otra manera más de recorrer árboles binarios



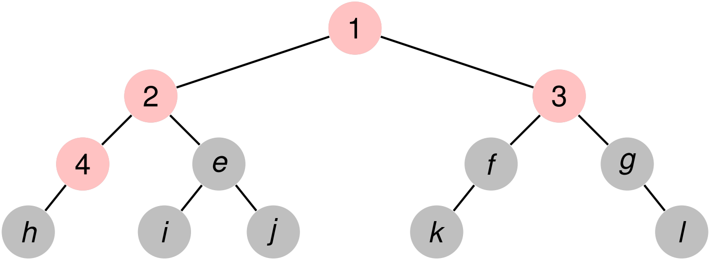
Otra manera más de recorrer árboles binarios



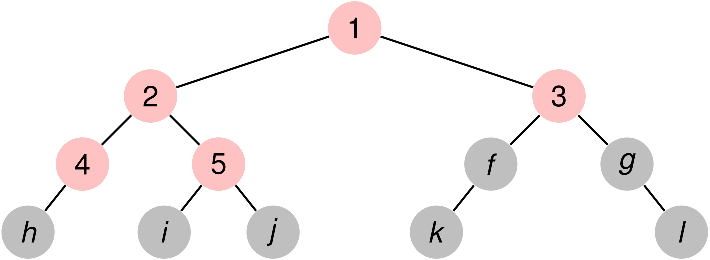
Otra manera más de recorrer árboles binarios



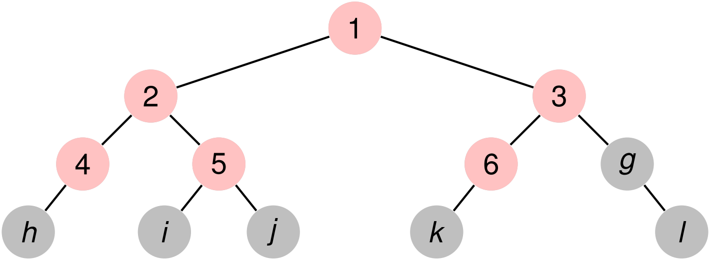
Otra manera más de recorrer árboles binarios



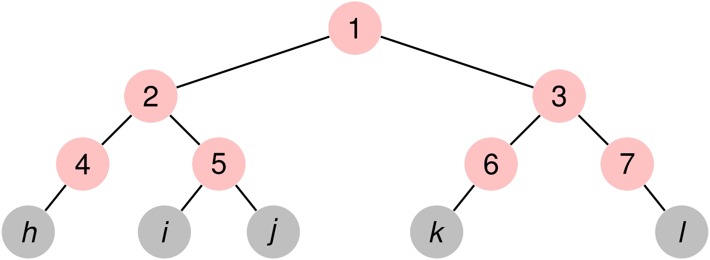
Otra manera más de recorrer árboles binarios



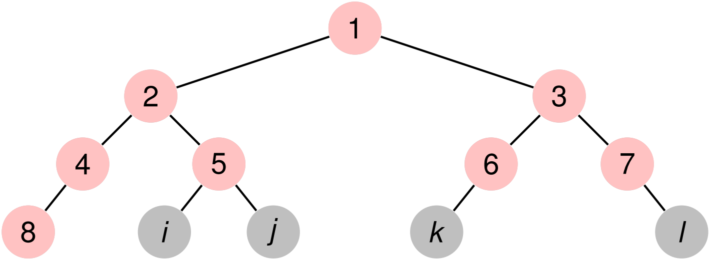
Otra manera más de recorrer árboles binarios



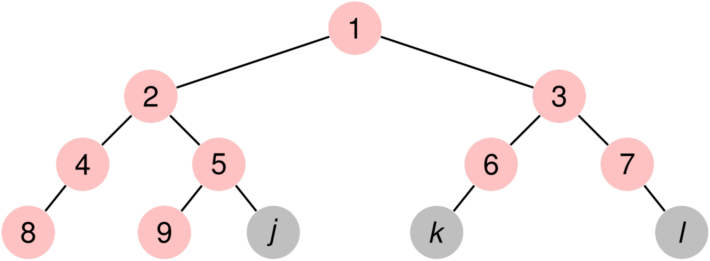
Otra manera más de recorrer árboles binarios



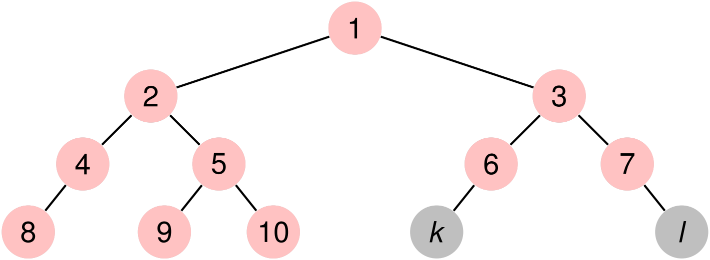
Otra manera más de recorrer árboles binarios



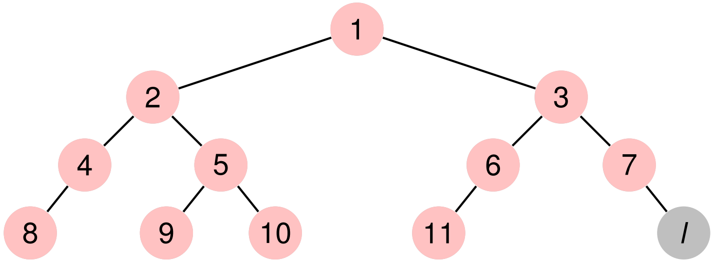
Otra manera más de recorrer árboles binarios



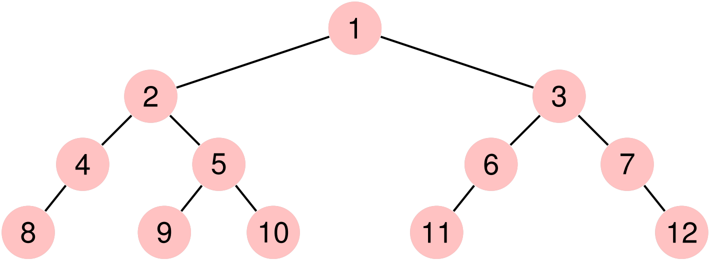
Otra manera más de recorrer árboles binarios



Otra manera más de recorrer árboles binarios



Otra manera más de recorrer árboles binarios



Otra manera más de recorrer árboles binarios

Algunas observaciones:

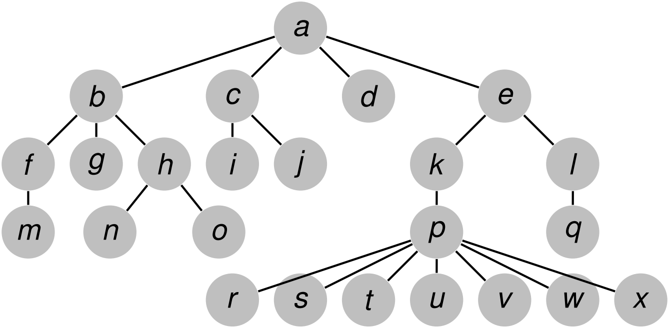
- todas las formas anteriores de recorrer, primero recorren **en profundidad**
- la última que presentamos, no,
- recorre **a lo ancho**.
- Todas las otras son ejemplo de DFS (Depth-first search).
- La última es ejemplo de BFS (Breadth-first search).
- Un programa que recorra en BFS es más difícil de escribir, se verá al final de la clase de hoy.

Clase de hoy

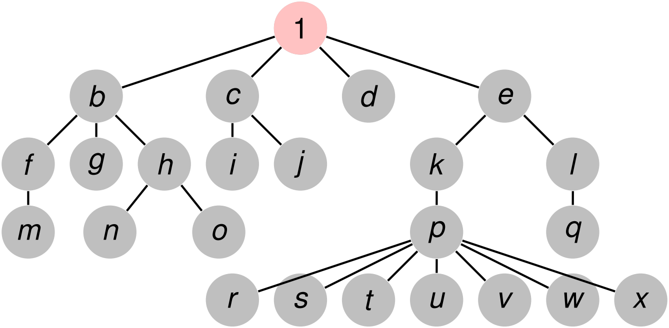
Recorrida de árboles finitarios

- Son árboles en los que cada vértice tiene una cantidad finita (pero puede ser variable) de hijos.
- La recorrida in-order deja de tener sentido (habiendo más de dos hijos, ¿en qué momento habría que visitar el elemento que se encuentra en la raíz?).
- Las recorridas pre-order y pos-order (DFS) y BFS siguen teniendo sentido.

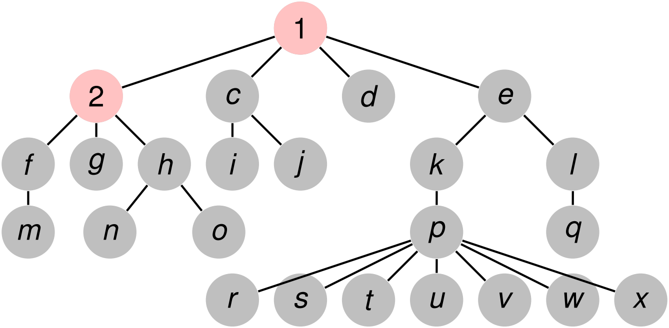
Ejemplo de árbol finitario



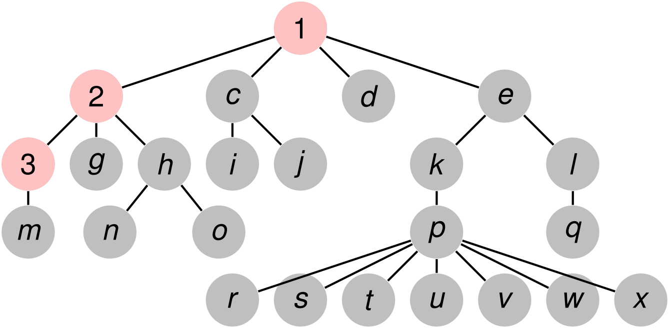
Ejemplo, recorrida pre-order



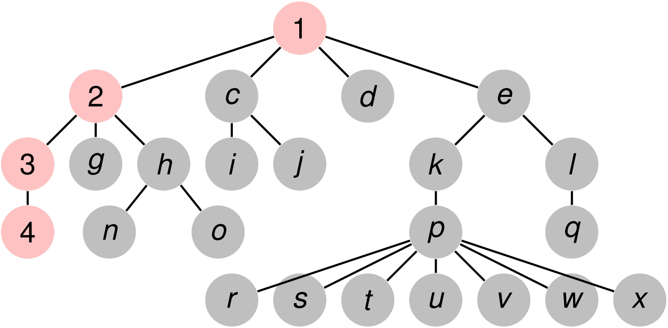
Ejemplo, recorrida pre-order



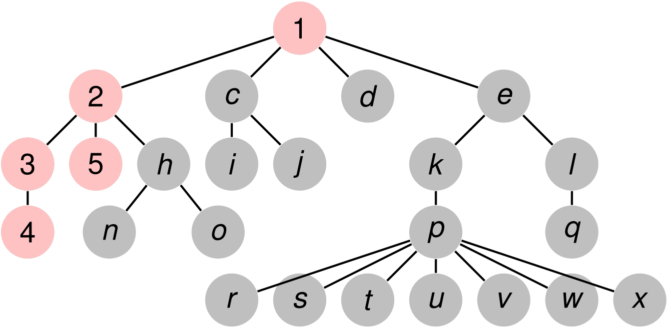
Ejemplo, recorrida pre-order



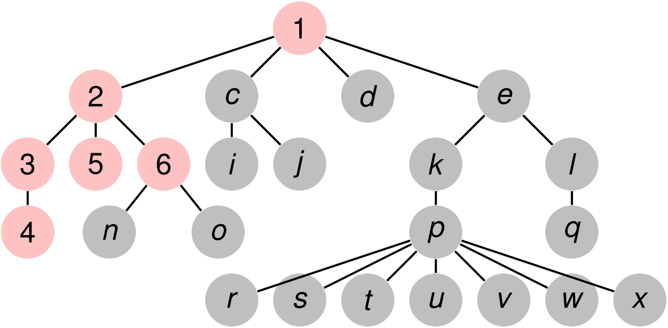
Ejemplo, recorrida pre-order



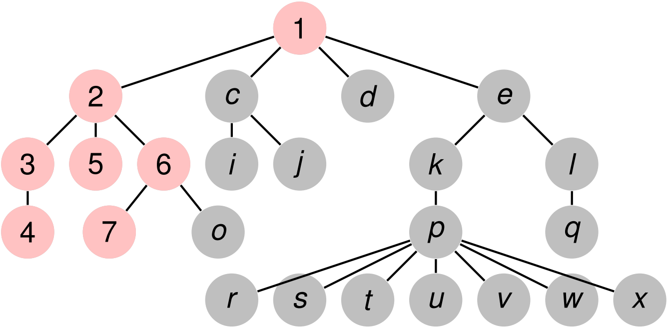
Ejemplo, recorrida pre-order



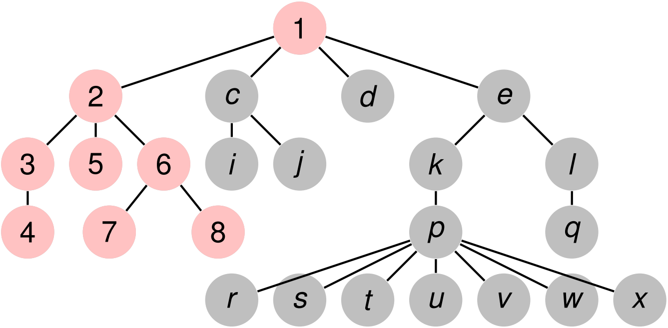
Ejemplo, recorrida pre-order



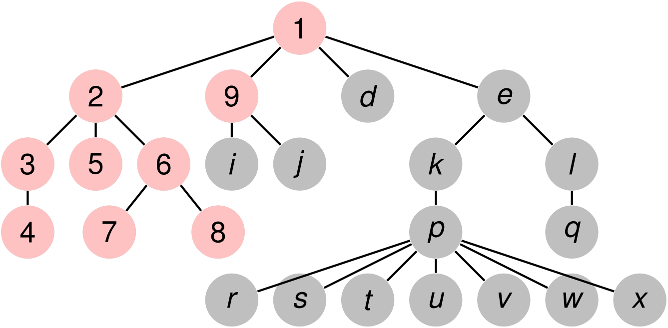
Ejemplo, recorrida pre-order



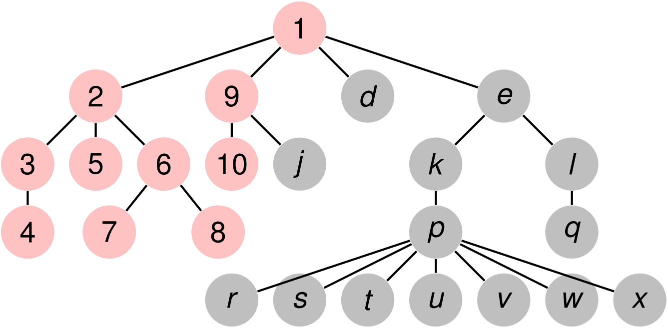
Ejemplo, recorrida pre-order



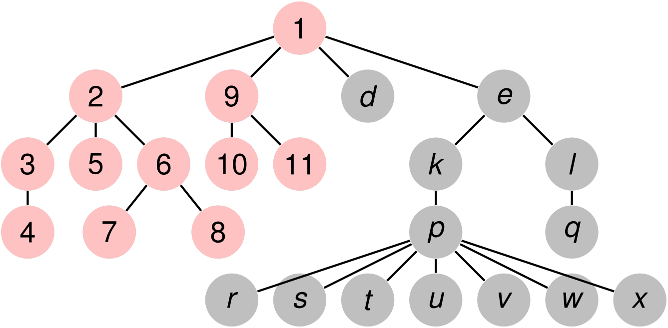
Ejemplo, recorrida pre-order



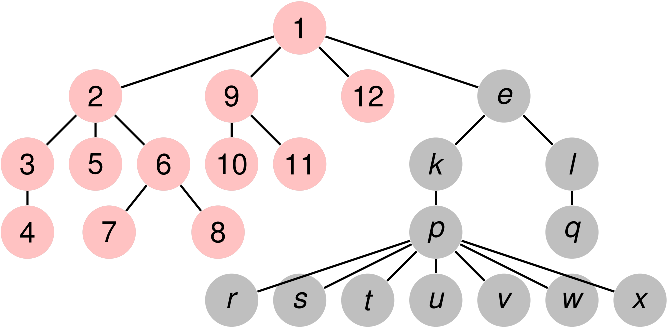
Ejemplo, recorrida pre-order



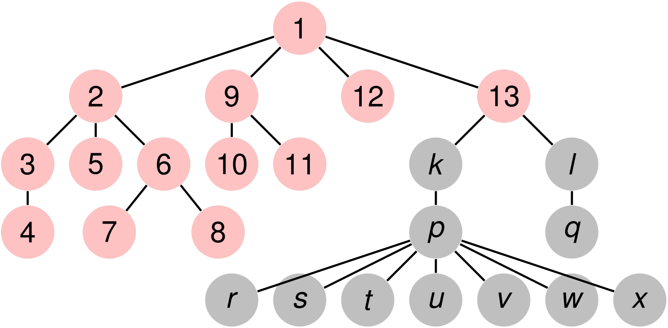
Ejemplo, recorrida pre-order



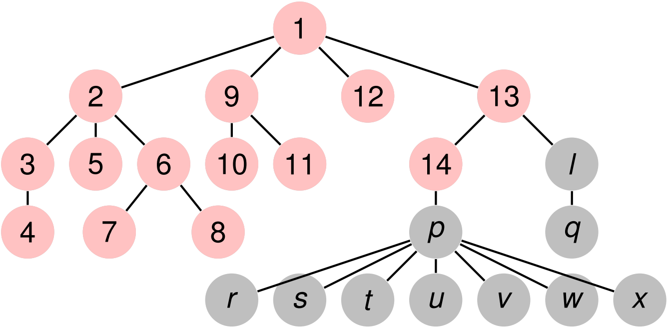
Ejemplo, recorrida pre-order



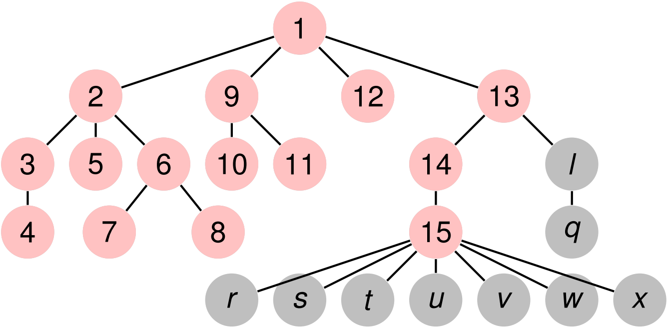
Ejemplo, recorrida pre-order



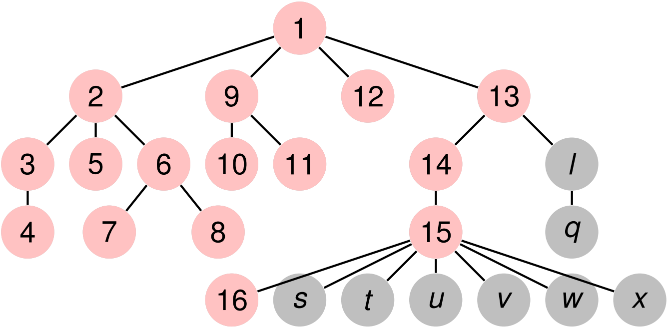
Ejemplo, recorrida pre-order



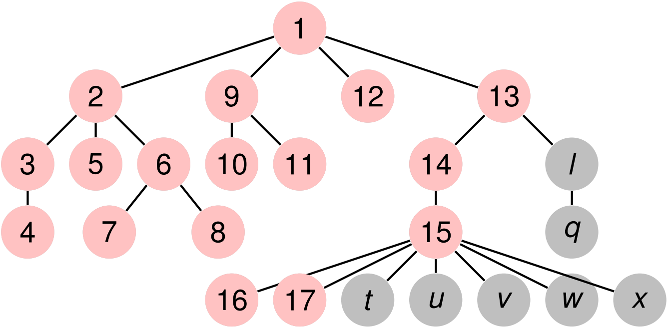
Ejemplo, recorrida pre-order



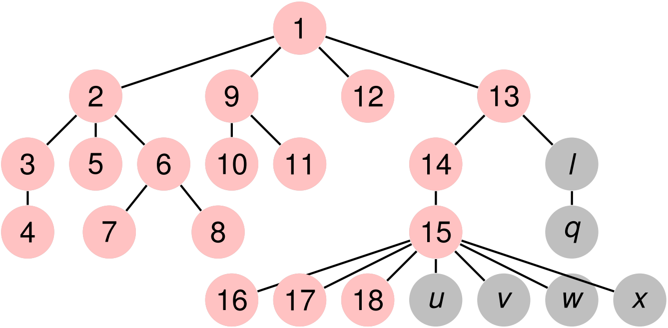
Ejemplo, recorrida pre-order



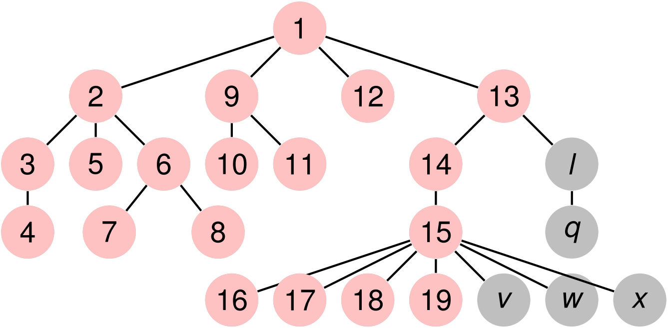
Ejemplo, recorrida pre-order



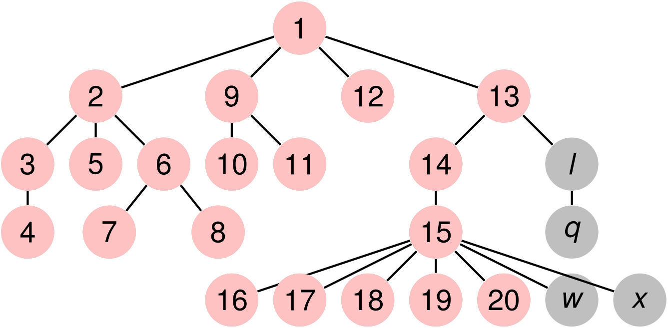
Ejemplo, recorrida pre-order



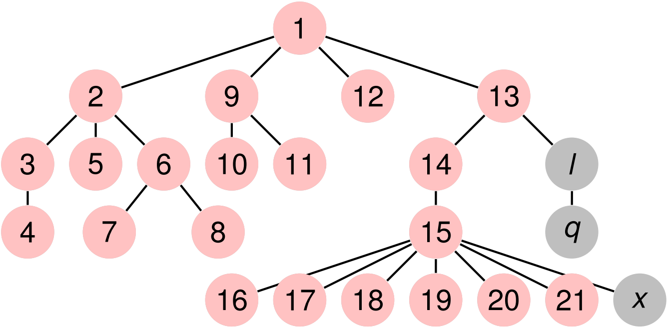
Ejemplo, recorrida pre-order



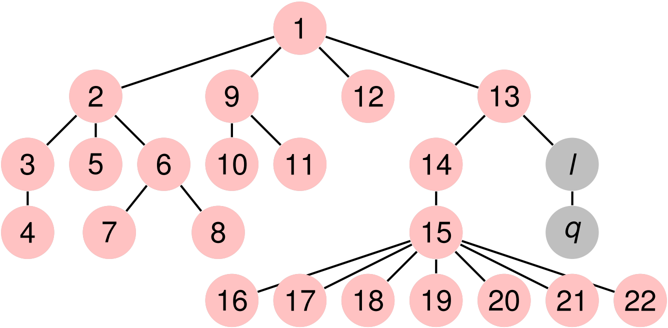
Ejemplo, recorrida pre-order



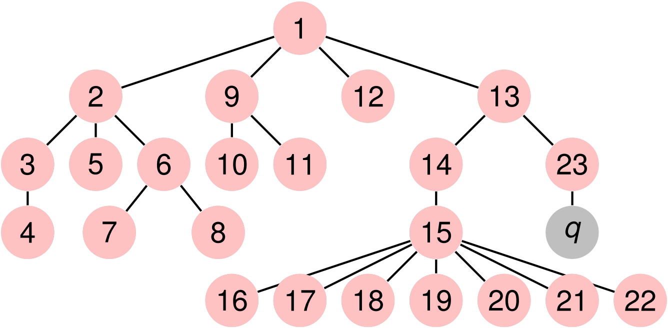
Ejemplo, recorrida pre-order



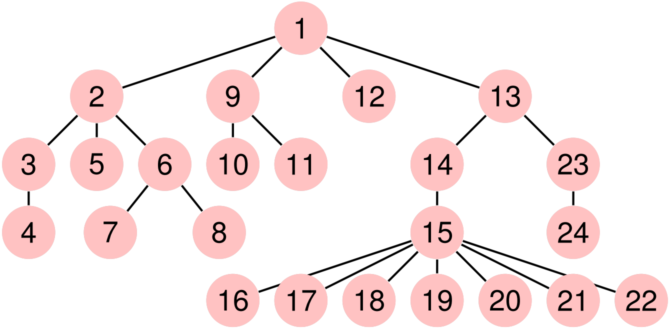
Ejemplo, recorrida pre-order



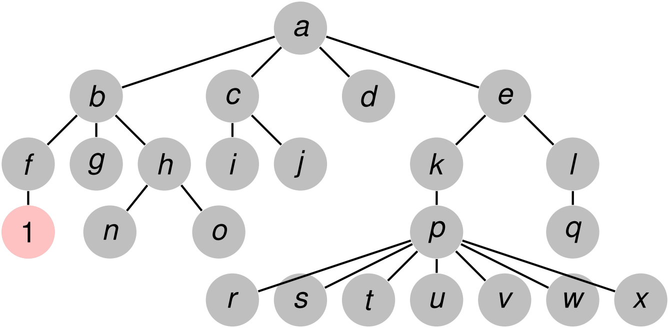
Ejemplo, recorrida pre-order



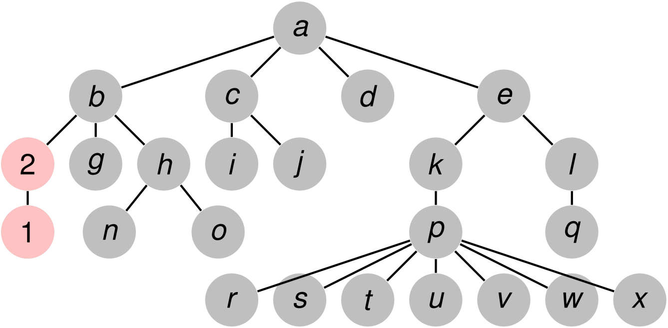
Ejemplo, recorrida pre-order



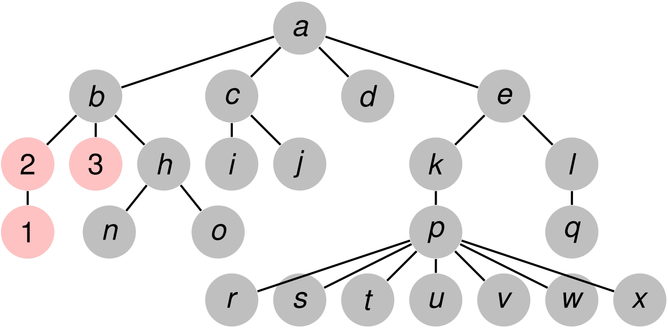
Ejemplo, recorrida pos-order



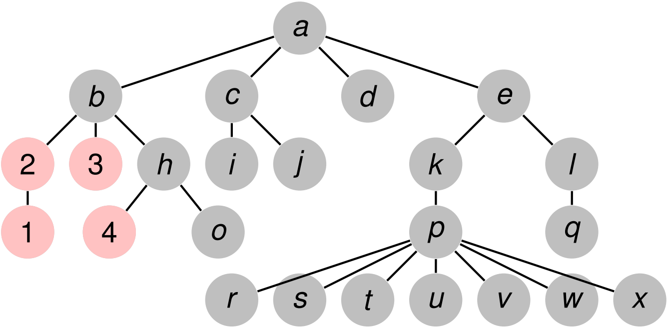
Ejemplo, recorrida pos-order



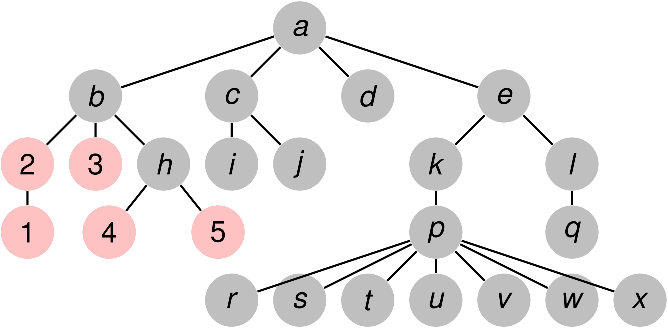
Ejemplo, recorrida pos-order



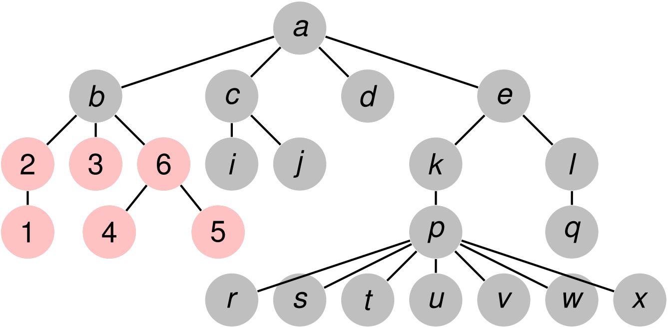
Ejemplo, recorrida pos-order



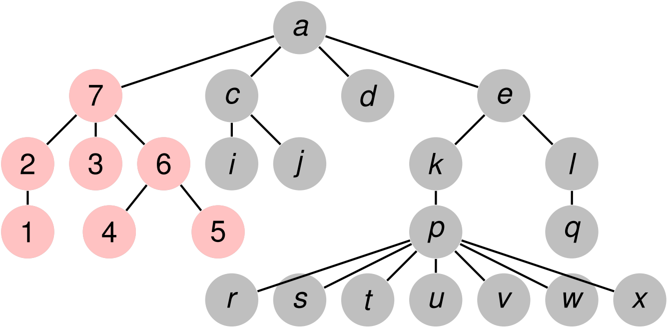
Ejemplo, recorrida pos-order



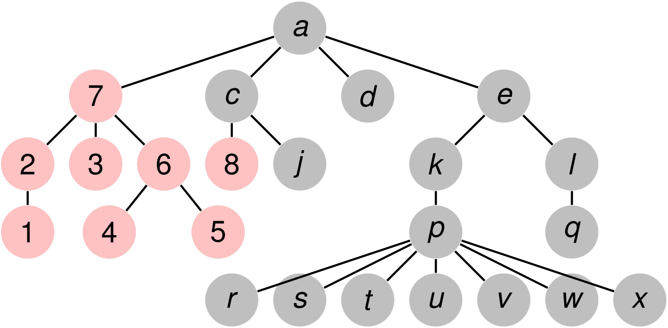
Ejemplo, recorrida pos-order



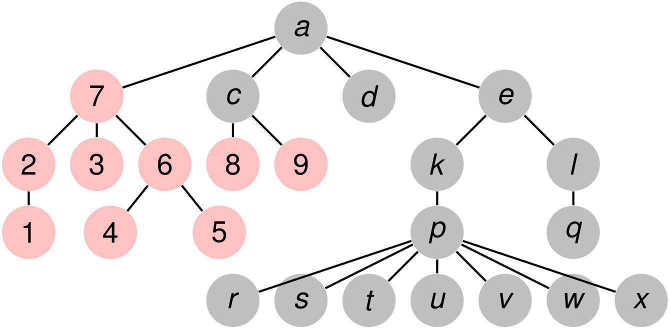
Ejemplo, recorrida pos-order



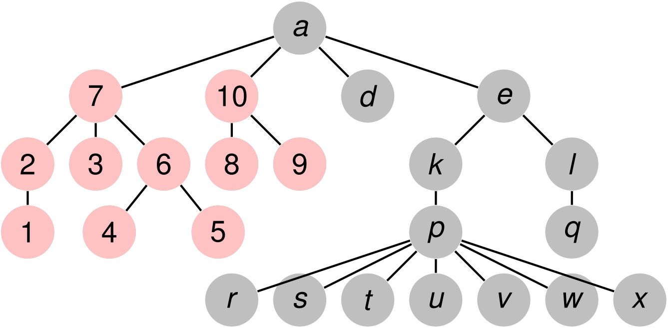
Ejemplo, recorrida pos-order



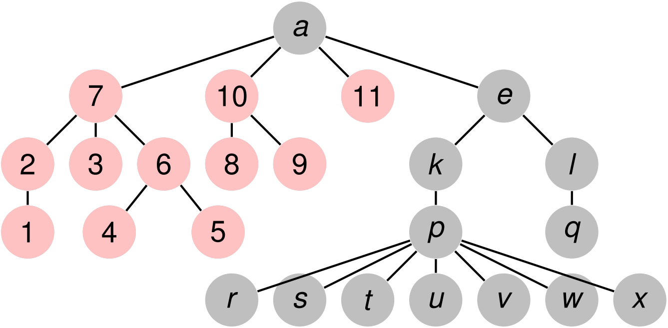
Ejemplo, recorrida pos-order



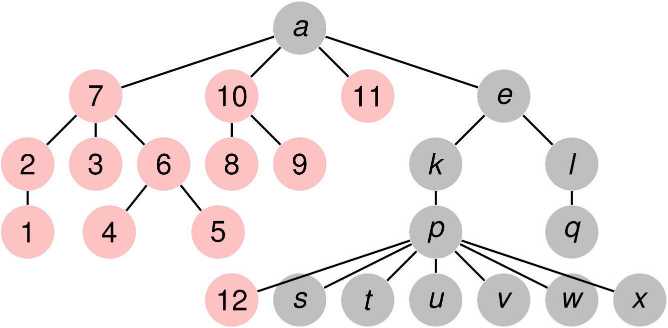
Ejemplo, recorrida pos-order



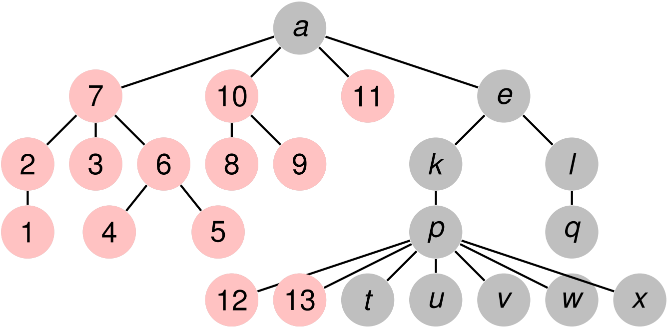
Ejemplo, recorrida pos-order



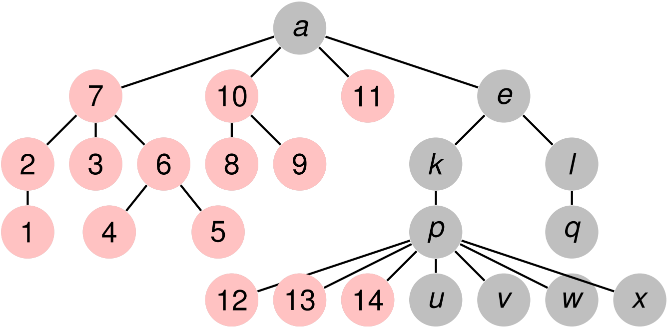
Ejemplo, recorrida pos-order



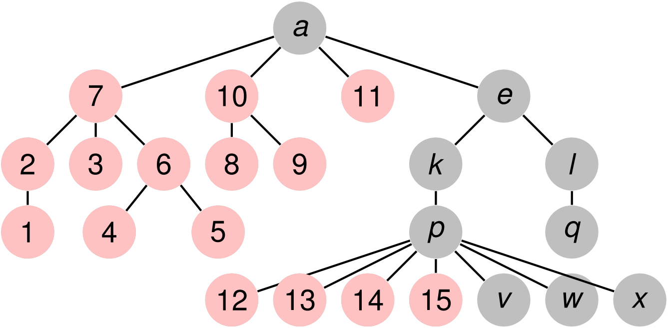
Ejemplo, recorrida pos-order



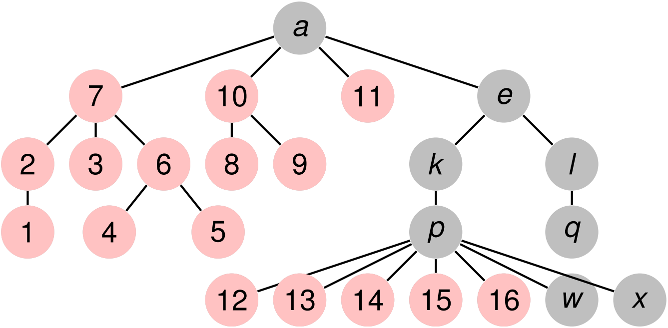
Ejemplo, recorrida pos-order



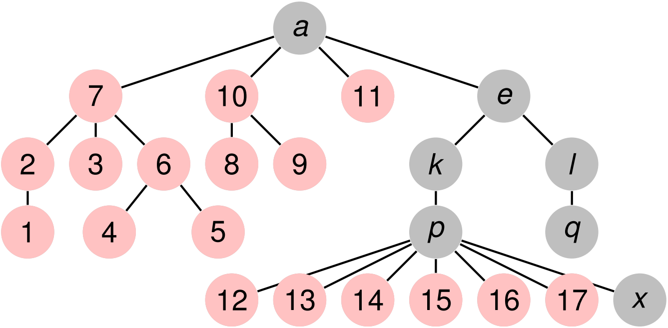
Ejemplo, recorrida pos-order



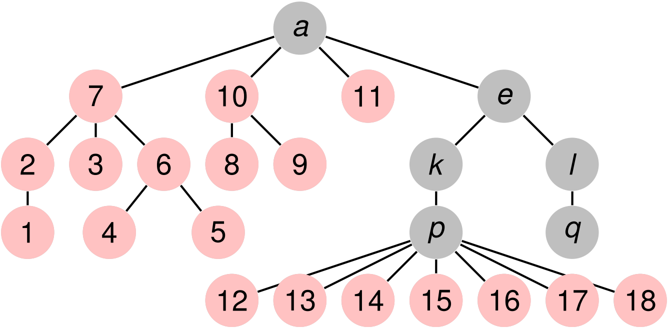
Ejemplo, recorrida pos-order



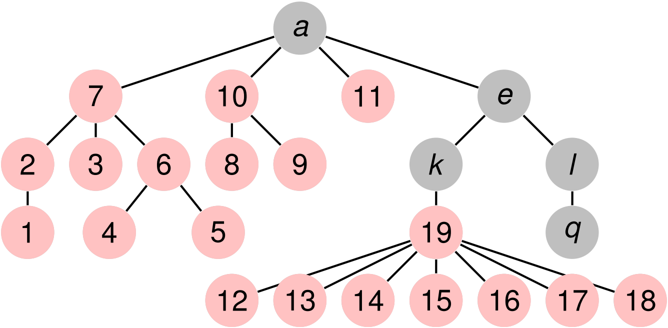
Ejemplo, recorrida pos-order



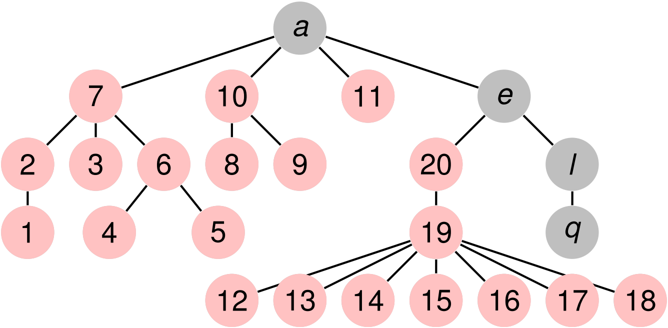
Ejemplo, recorrida pos-order



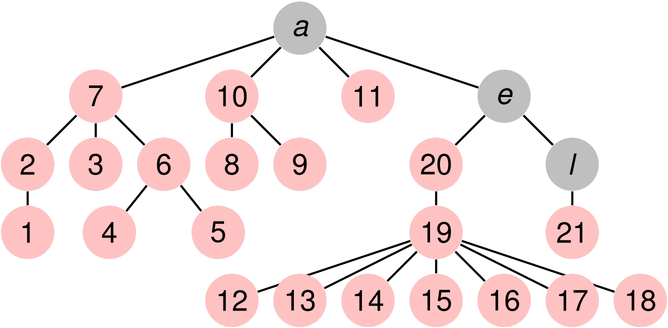
Ejemplo, recorrida pos-order



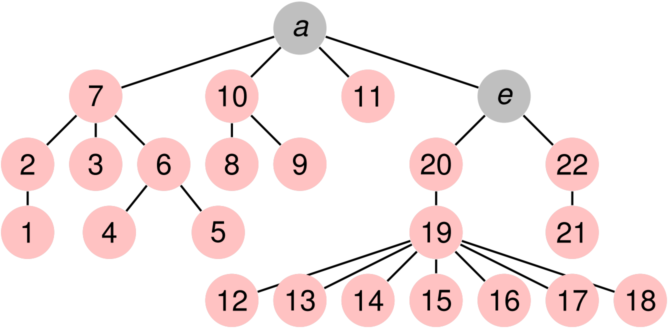
Ejemplo, recorrida pos-order



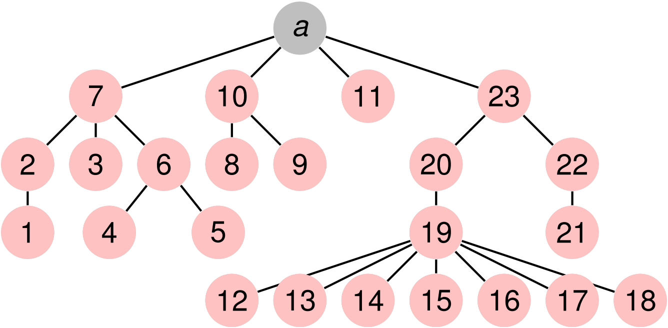
Ejemplo, recorrida pos-order



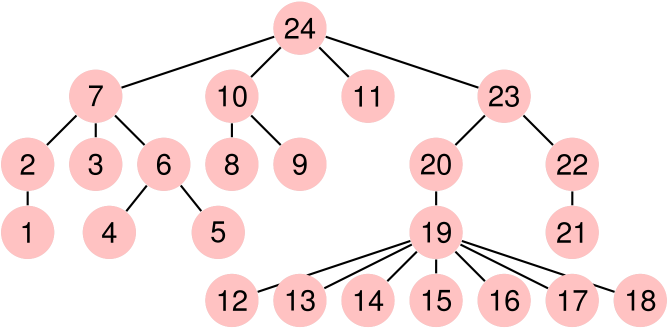
Ejemplo, recorrida pos-order



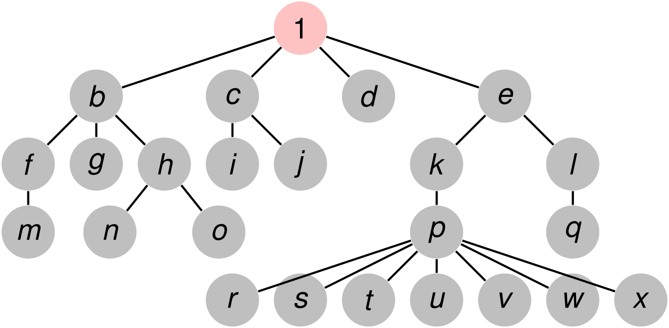
Ejemplo, recorrida pos-order



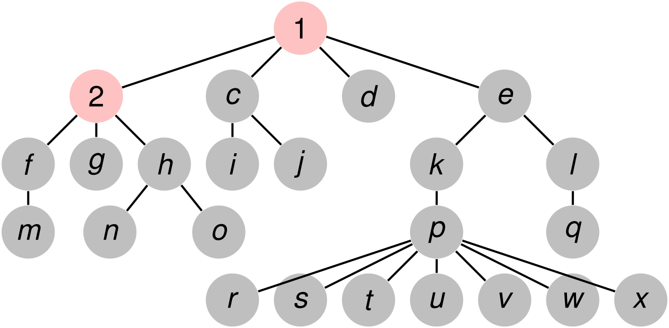
Ejemplo, recorrida pos-order



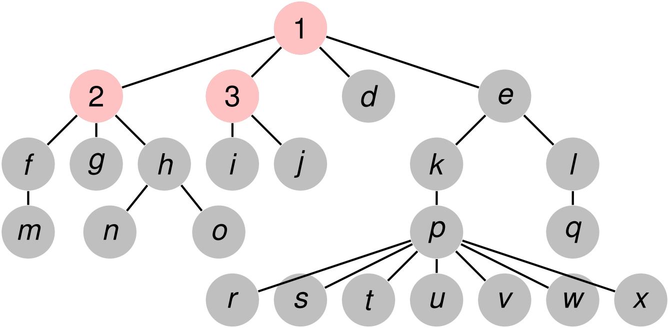
Ejemplo, recorrida BFS



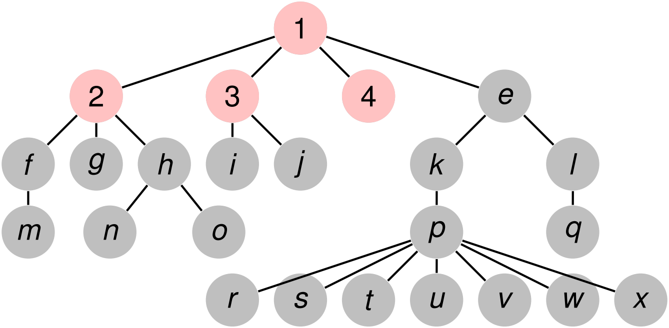
Ejemplo, recorrida BFS



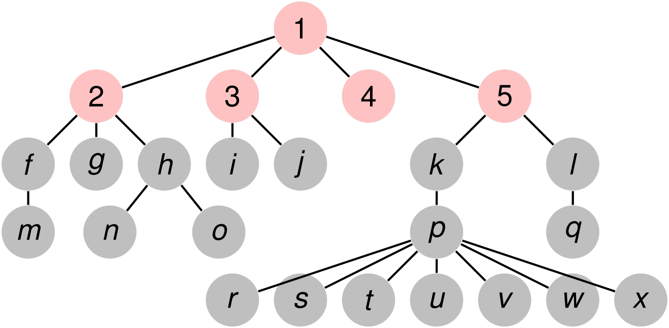
Ejemplo, recorrida BFS



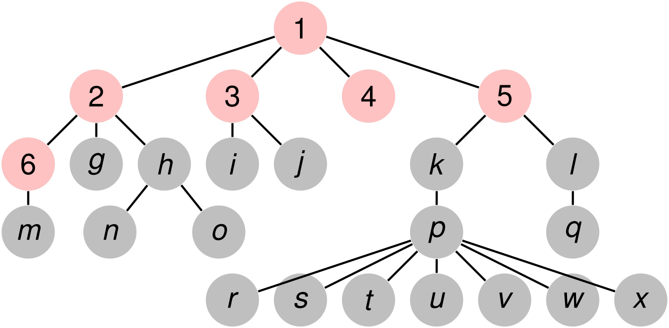
Ejemplo, recorrida BFS



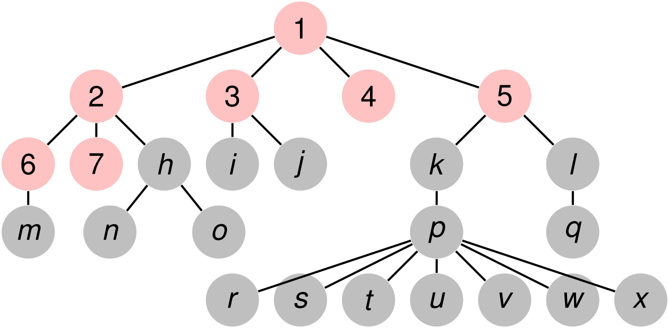
Ejemplo, recorrida BFS



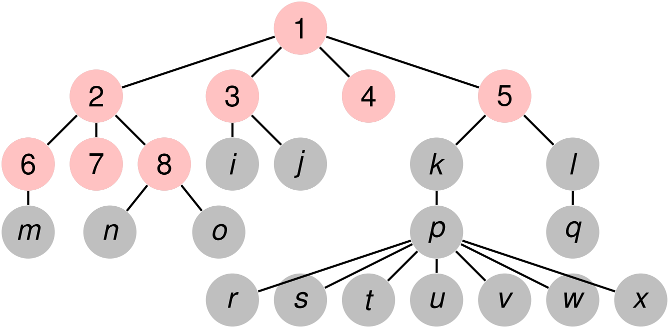
Ejemplo, recorrida BFS



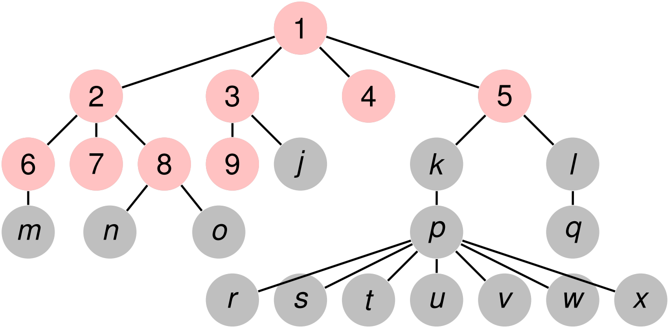
Ejemplo, recorrida BFS



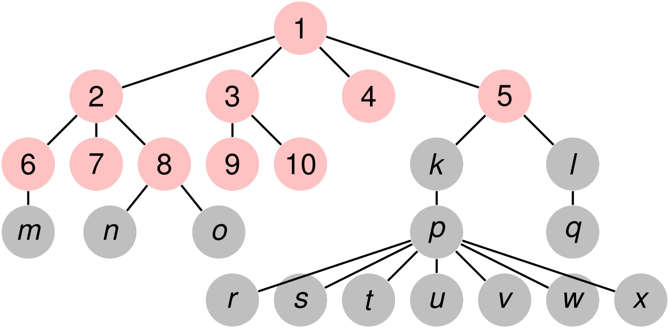
Ejemplo, recorrida BFS



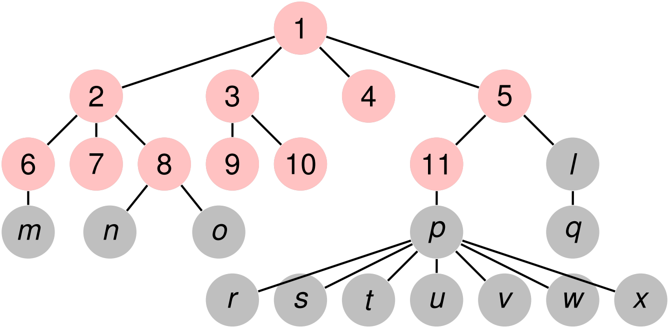
Ejemplo, recorrida BFS



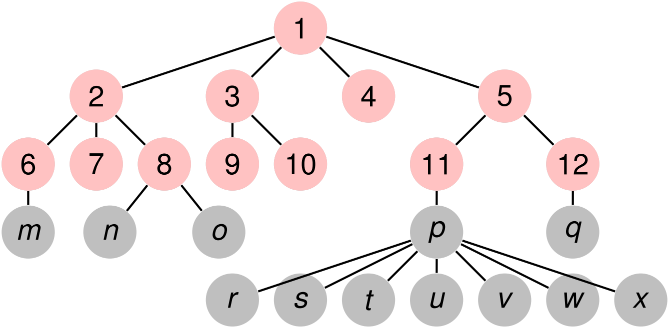
Ejemplo, recorrida BFS



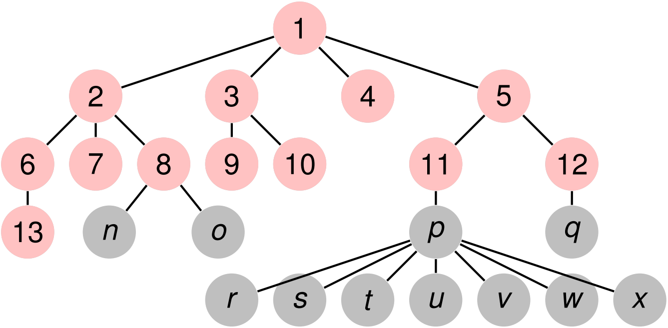
Ejemplo, recorrida BFS



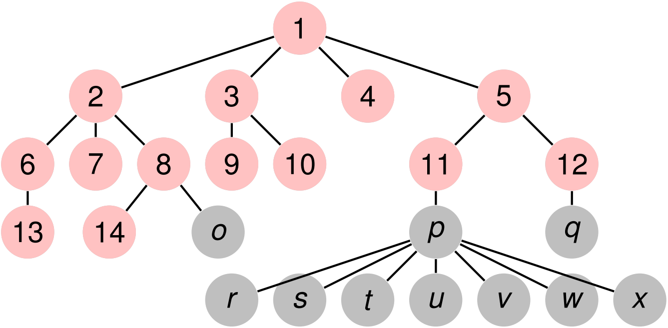
Ejemplo, recorrida BFS



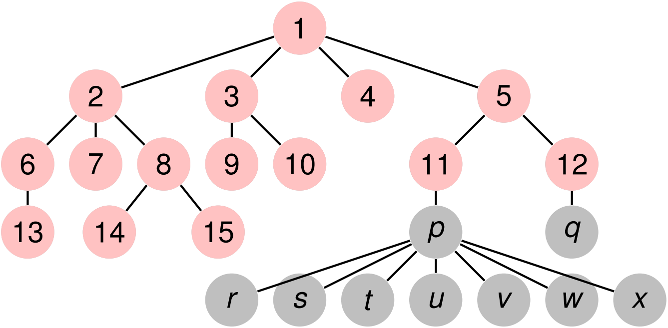
Ejemplo, recorrida BFS



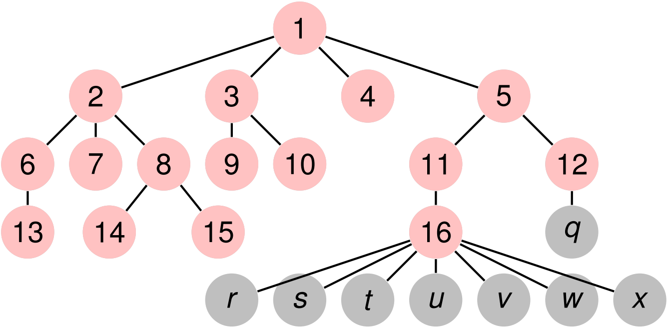
Ejemplo, recorrida BFS



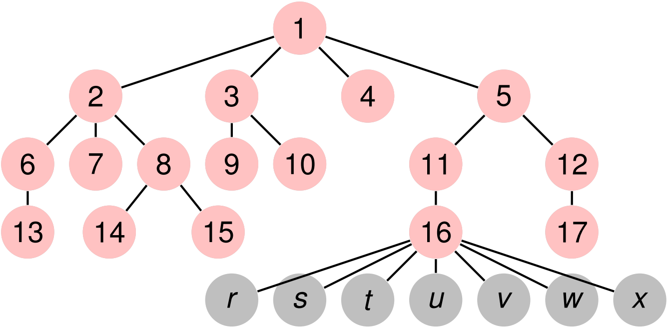
Ejemplo, recorrida BFS



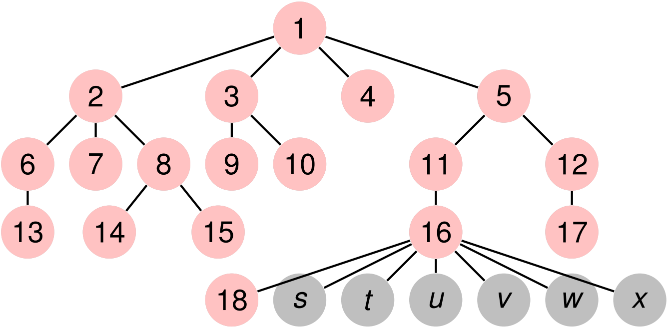
Ejemplo, recorrida BFS



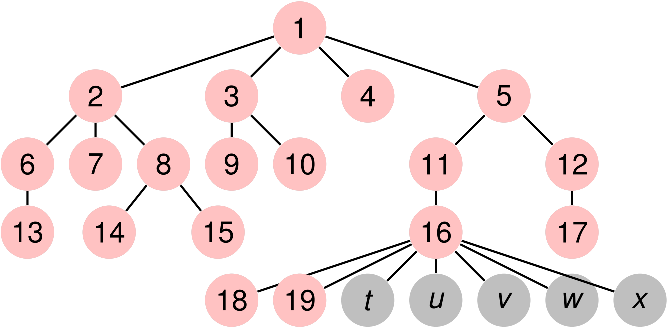
Ejemplo, recorrida BFS



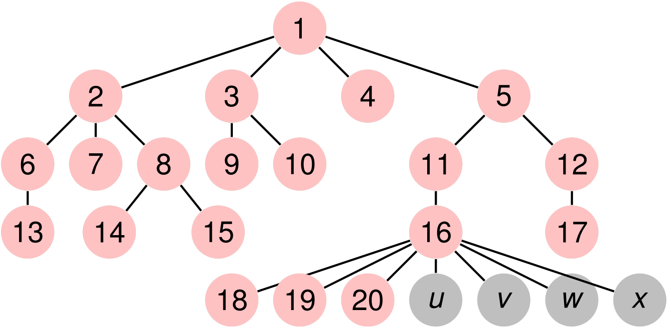
Ejemplo, recorrida BFS



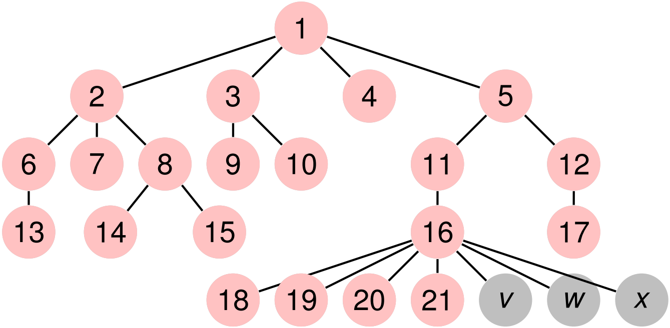
Ejemplo, recorrida BFS



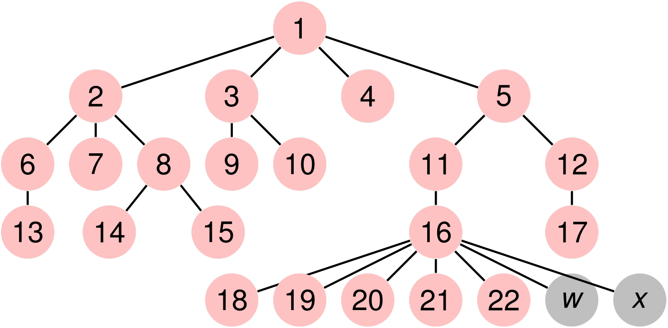
Ejemplo, recorrida BFS



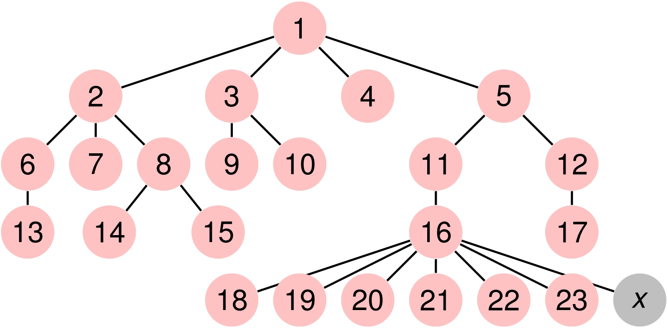
Ejemplo, recorrida BFS



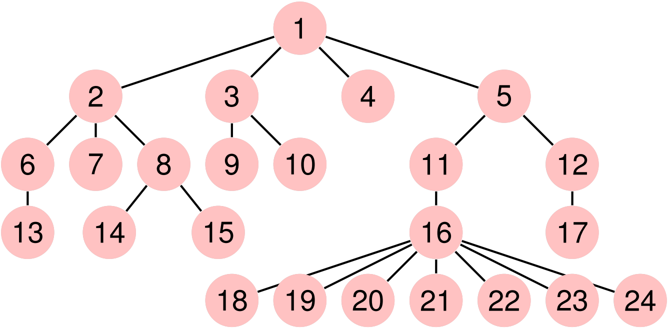
Ejemplo, recorrida BFS



Ejemplo, recorrida BFS



Ejemplo, recorrida BFS



Algoritmos
Marcas

Cuando se visita un vértice, se marca con un número positivo.

```
type marks = tuple
                 ord: array[V] of nat
                 cont: nat
             end
proc init(out mark: marks)
    mark.cont:= 0
end
proc visit(in/out mark: marks, in v: V)
    mark.cont:= mark.cont+1
    mark.ord[v]:= mark.cont
end
```

Algoritmos
pre-order

Un árbol viene dado por su raíz (root) y una función (children) que devuelve los hijos de cada vértice.

fun pre_order(G=(V,root,children)) **ret** mark: marks
    init(mark)
    pre_traverse(G, mark, root)
end

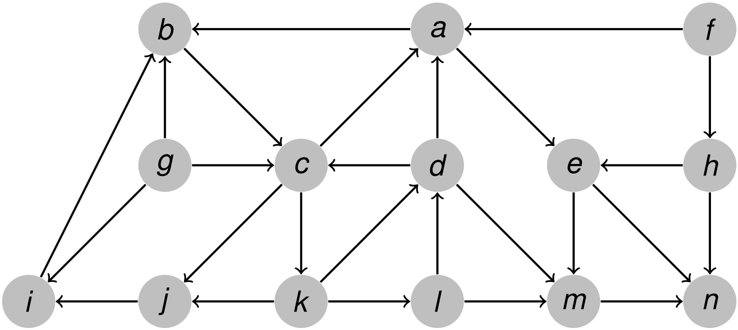
proc pre_traverse(**in** G, **in/out** mark: marks, **in** v: V)
    visit(mark,v)
    for w $\in$ children(v) **do** pre_traverse(G, mark, w) **od**
end

Algoritmos
pos-order

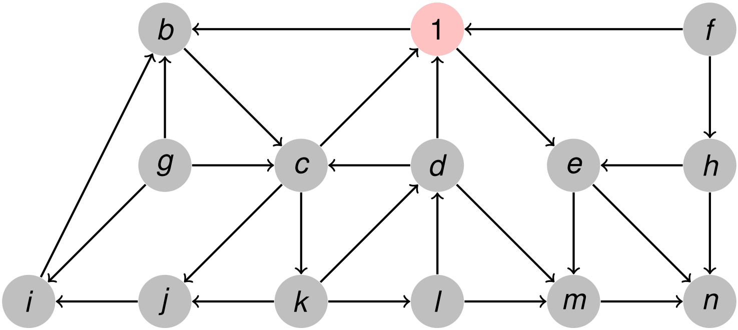
```
fun pos_order(G=(V,root,children)) ret mark: marks
    init(mark)
    pos_traverse(G, mark, root)
end

proc pos_traverse(in G, in/out mark: marks, in v: V)
     for w ∈ children(v) do pos_traverse(G, mark, w) od
     visit(mark,v)
end
```

Clase de hoy

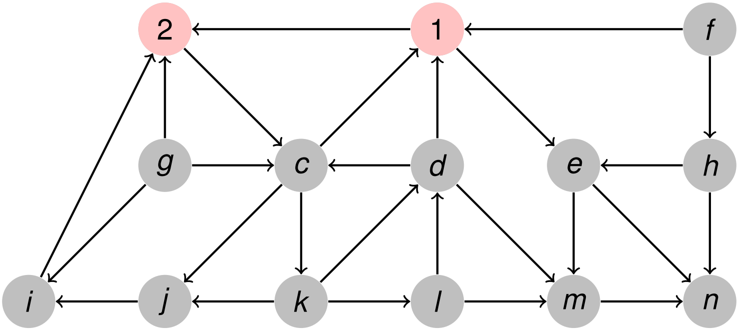
Ejemplo de grafo



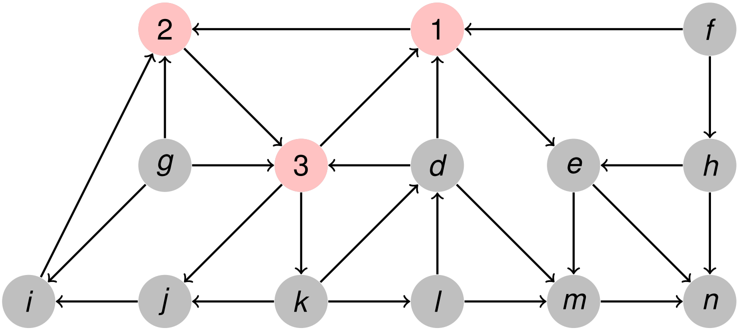
Ejemplo, DFS en pre-order



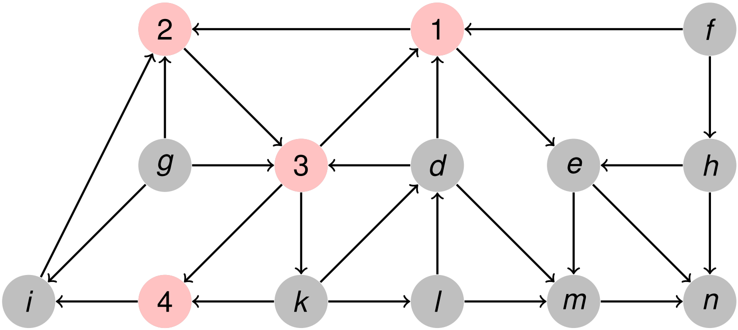
Ejemplo, DFS en pre-order



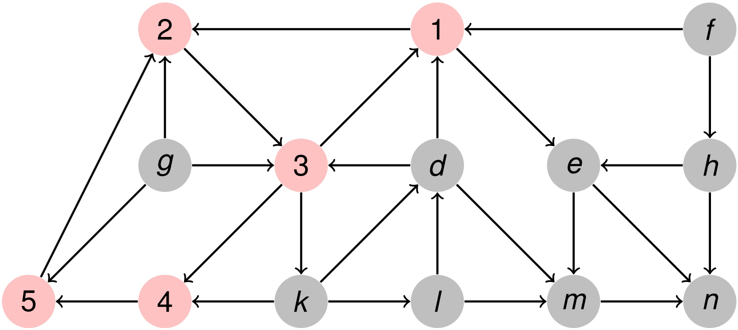
Ejemplo, DFS en pre-order



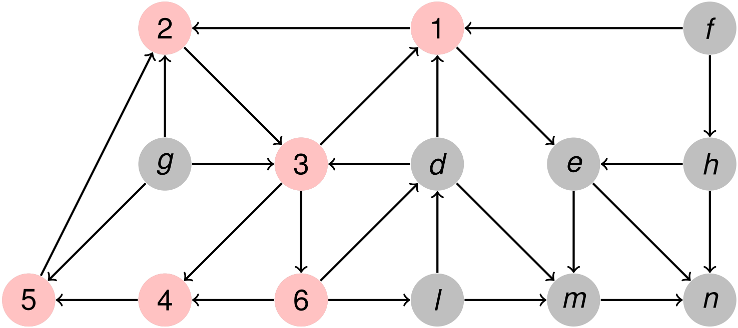
Ejemplo, DFS en pre-order



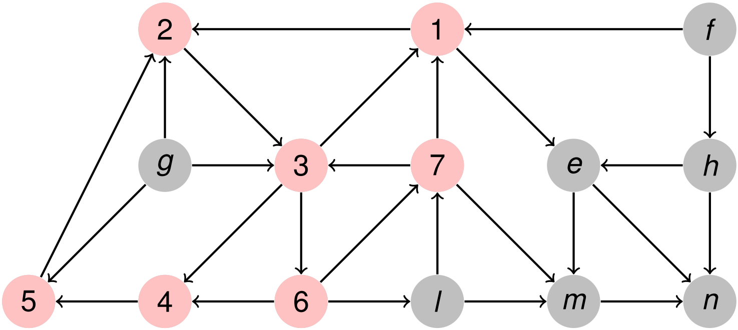
Ejemplo, DFS en pre-order



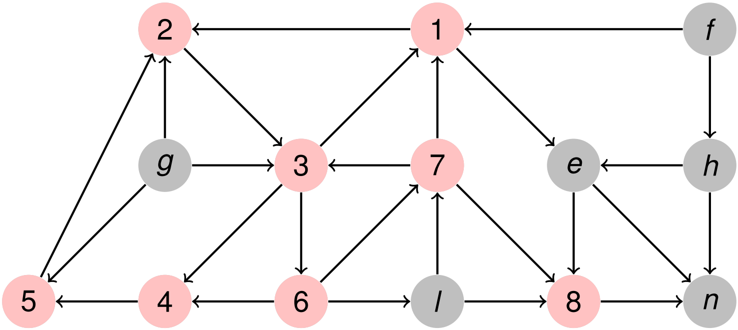
Ejemplo, DFS en pre-order



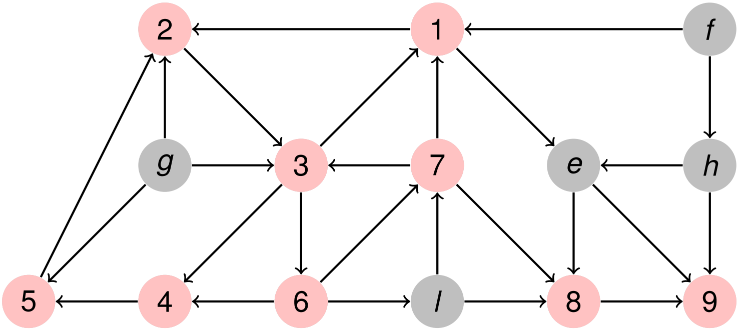
Ejemplo, DFS en pre-order



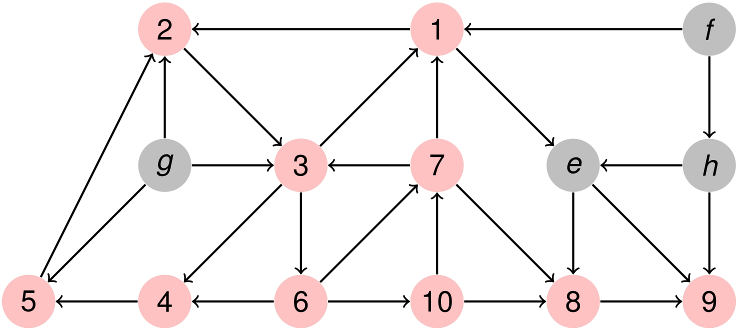
Ejemplo, DFS en pre-order



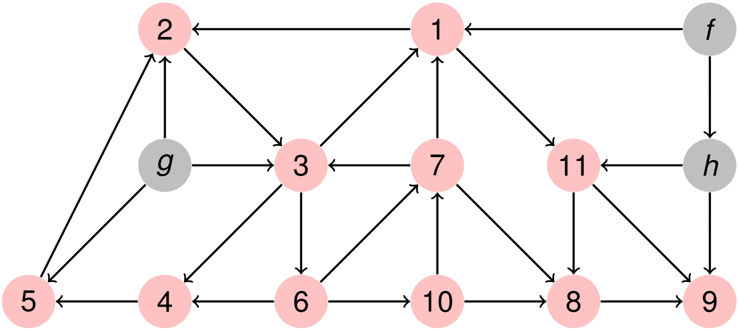
Ejemplo, DFS en pre-order



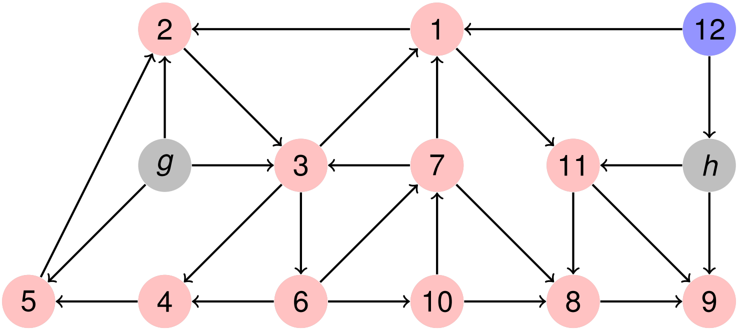
Ejemplo, DFS en pre-order



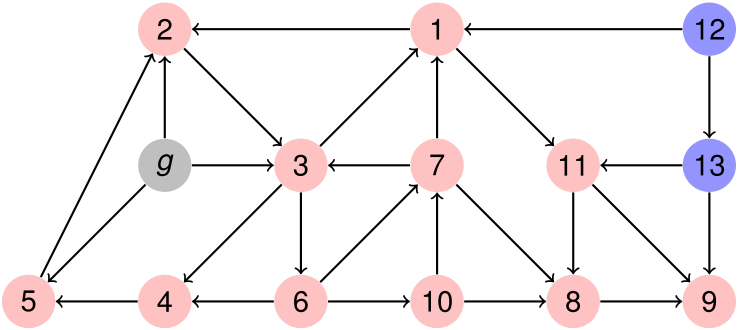
Ejemplo, DFS en pre-order



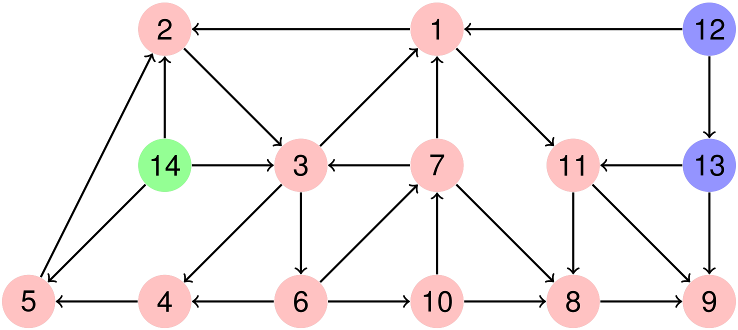
Ejemplo, DFS en pre-order



Ejemplo, DFS en pre-order



Ejemplo, DFS en pre-order



Algoritmos
Marcas

Como ahora puede haber ciclos, es necesario poder averiguar si un vértice ya fue visitado.

proc init(**out** mark: marks)
    mark.cont:= 0
    for v $\in$ V **do** mark.ord[v]:= 0 **od**
end

fun visited(mark: marks, v: V) **ret** b: **bool**
    b:= (mark.ord[v] $\neq$ 0)
end

Algoritmo DFS

```
fun dfs(G=(V,neighbours)) ret mark: marks
   init(mark)
   for v ∈ V do
      if ¬visited(mark,v) then dfsearch(G, mark, v) fi
   od
end

proc dfsearch(in G, in/out mark: marks, in v: V)
    visit(mark,v)
    for w ∈ neighbours(v) do
       if ¬visited(mark,w) then dfsearch(G, mark, w) fi
    od
end
```

DFS iterativo

Introducimos una pila para evitar recursión

```
proc dfsearch(in G, in/out mark: marks, in v: V)
    var p: stack of V
    empty(p)
    visit(mark,v)
    push(v,p)
    while ¬is_empty(p) do
        if existe w ∈ neighbours(top(p)) tal que ¬visited(mark,w) then
            visit(mark,w)
            push(w,p)
        else pop(p)
        fi
    od
end
```

Clase de hoy

BFS

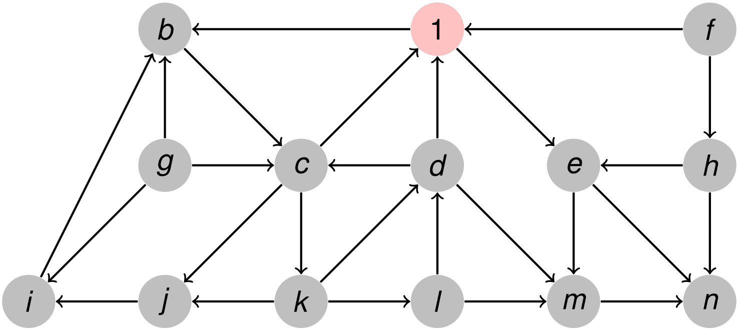
Si cambiamos la pila por una cola obtenemos BFS

```
proc bfsearch(in G, in/out mark: marks, in v: V)
    var q: queue of V
    empty(q)
    visit(mark,v)
    enqueue(q,v)
    while ¬is_empty(q) do
        if existe w ∈ neighbours(first(q)) tal que ¬visited(mark,w) the
            visit(mark,w)
            enqueue(q,w)
        else dequeue(q)
        fi
    od
end
```

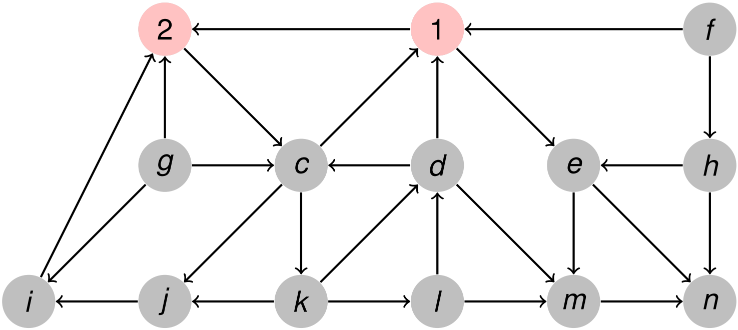
BFS, procedimiento principal

fun bfs(G=(V,neighbours)) **ret** mark: marks
    init(mark)
    for v $\in$ V **do**
        if $\neg$visited(mark,v) **then** bfsearch(G, mark, v) **fi**
    od
end

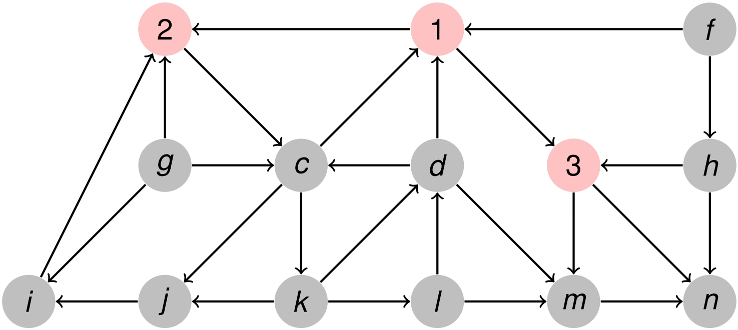
Ejemplo, BFS



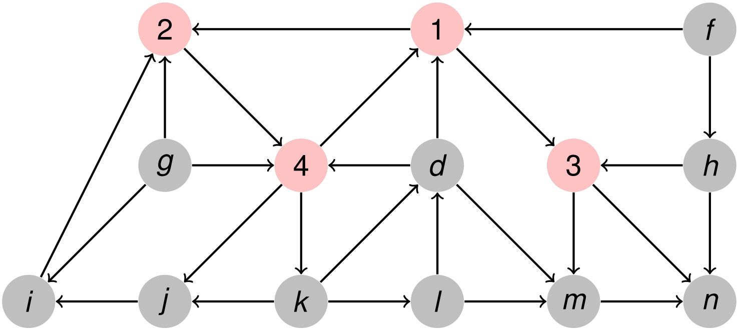
Ejemplo, BFS



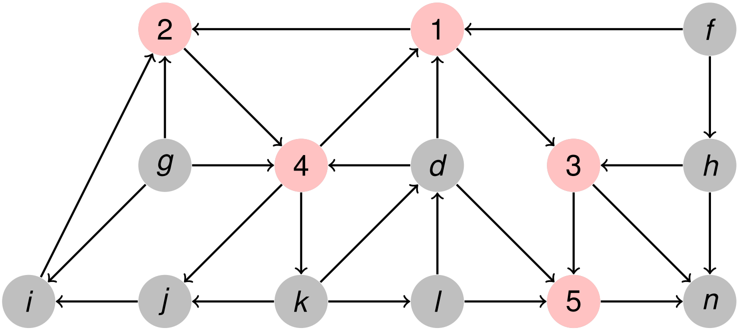
Ejemplo, BFS



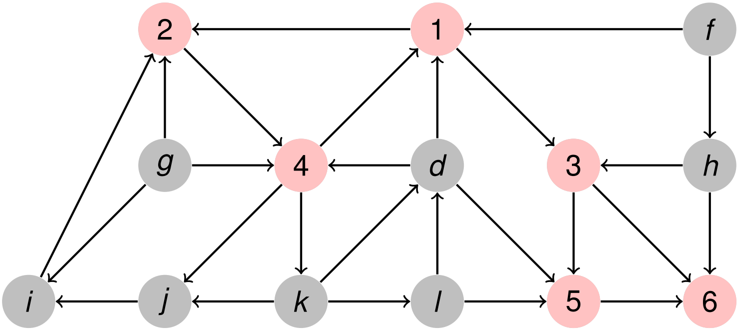
Ejemplo, BFS



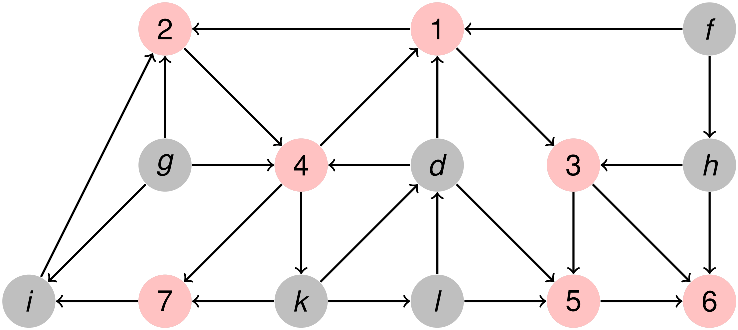
Ejemplo, BFS



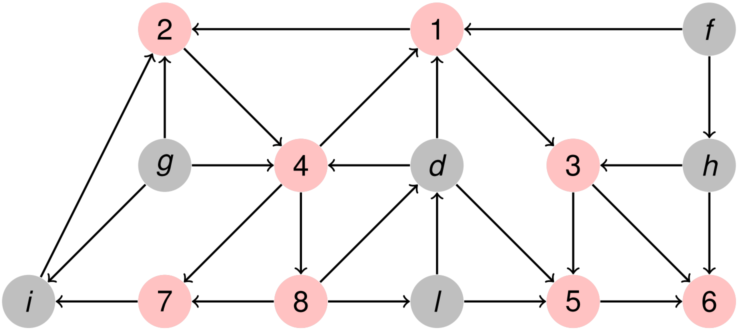
Ejemplo, BFS



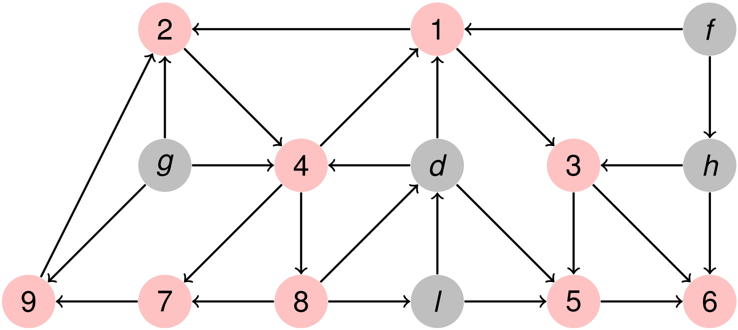
Ejemplo, BFS



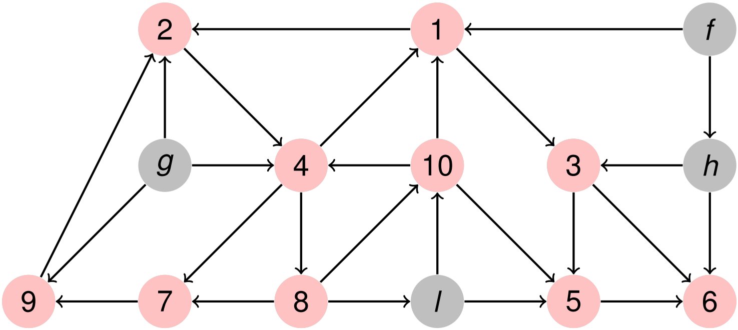
Ejemplo, BFS



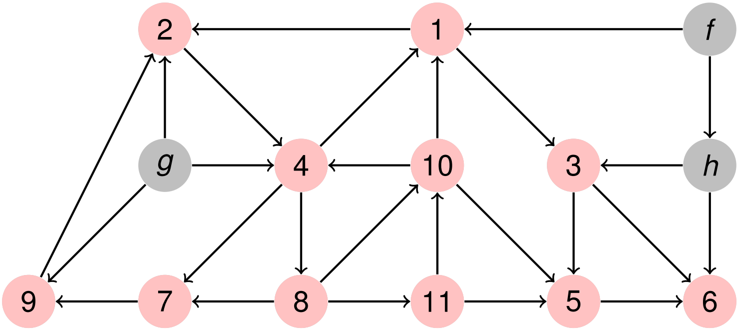
Ejemplo, BFS



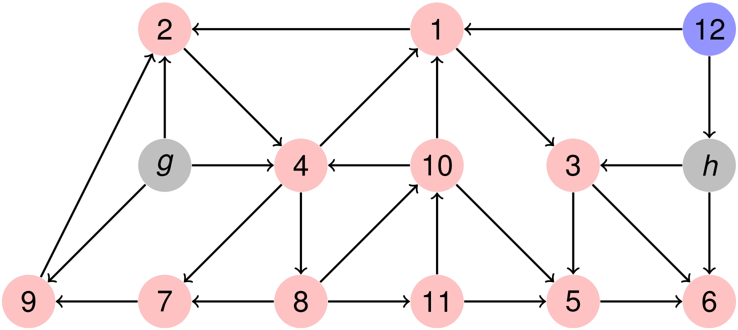
Ejemplo, BFS



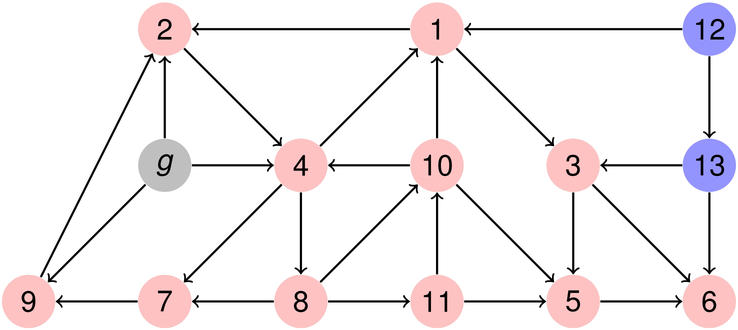
Ejemplo, BFS



Ejemplo, BFS



Ejemplo, BFS



Ejemplo, BFS