# NOTAS PARA EL DICTADO DE CLASES
# DEL CURSO DE POSGRADO
# TEORÍA DE CATEGORÍAS

(Primera clase: definición y ejemplos)

## Introducción

Teoría de Categorías tiene que ver con grafos y tiene que ver con funciones. Tiene que ver con funciones porque pretende abstraer ciertos conceptos y propiedades de funciones. Tiene que ver con grafos porque las categorías son grafos y porque es un lenguaje gráfico, uno en que los diagramas juegan un rol muy destacado.

**Hablemos un poco de grafos.** ¿Qué tienen que ver las categorías con los grafos? Veremos que las categorías *son* grafos dirigidos.

Hay muchas definiciones de grafos, incluso muchas de grafos dirigidos. Comencemos por ésta:

**Definición 1.** *Un* ***grafo dirigido*** *es un par ordenado* $G = (N, A)$ *donde* $N$ *es un conjunto de nodos, vértices u* ***objetos*** *y* $A$*, un conjunto de* ***flechas****, aristas o arcos dirigidos, es decir, pares* $(a, b)$ *donde tanto* $a$ *como* $b$ *(llamados respectivamente origen y destino de la flecha) pertenecen a* $N$*.*

Esta definición admite, para cada par de objetos $a$ y $b$ a lo sumo una flecha de $a$ a $b$.

Una variante, a veces llamada **multigrafo dirigido**, es aquélla en que $A$ es un multiconjunto en vez de un conjunto. Así se admite cualquier número de flechas de $a$ a $b$ ya que $(a, b)$ puede ocurrir varias veces en $A$:

**Definición 2.** *Un* ***multigrafo dirigido*** *es un par ordenado* $G = (N, A)$ *donde* $N$ *es un conjunto de nodos, vértices u* ***objetos*** *y* $A$*, un multiconjunto de* ***flechas****, aristas o arcos dirigidos, es decir, pares* $(a, b)$ *donde tanto* $a$ *como* $b$ *(llamados respectivamente origen y destino de la flecha) pertenecen a* $N$*.*

*Sobre finitud del grafo.* En teoría de grafos suelen omitirse cuestiones sobre finitud o infinitud, habitualmente los ejemplos son de grafos finitos: tienen un número finito de objetos y entre todo par de objetos, un número finito de flechas. Pero la definición que acabamos de dar permite que $N$ sea infinito ya que no dijimos que deba ser finito.

Tampoco dijimos que $A$ deba ser finito, por lo tanto puede ser infinito. De hecho si hay infinitos objetos es lógico que haya también infinitas flechas, sino casi todos los objetos estarían muy aburridos, sin flechas de llegada ni de salida.

Pero la definición –incluso la de multigrafo dirigido– no permite que fijados los objetos $a$ y $b$ haya infinitas flechas de $a$ a $b$. Esto es culpa de la noción de multiconjunto que sólo permite que cada elemento se repita un número finito de veces.

Para permitir infinitas flechas con el mismo origen $a$ y destino $b$, podemos hacer tres cosas: la primera sería afirmar que nuestros multiconjuntos permiten repeticiones arbitrarias (no sólo finitas, sino infinitas). Pero no es el objetivo revisar acá la noción de multiconjunto. Sólo pretendemos tener una definición que permita cantidad arbitraria de flechas. Descartamos este primer enfoque.

La segunda sería retocar la definición de multigrafo dirigido:

**Definición 3.** *Un **multigrafo dirigido** es un par ordenado $G = (N, A)$ donde $N$ es un conjunto de nodos, vértices u **objetos** y $A$, una función que aplicada a dos objetos $a$ y $b$ nos devuelve un conjunto (denotado $A(a, b)$) de **flechas**, aristas o arcos dirigidos, de $a$ a $b$. No decimos que las flechas sean pares.*

La tercera también sería retocar la definición de multigrafo dirigido:

**Definición 4.** *Un **multigrafo dirigido** es una cuadrupla $G = (N, A, dom, cod)$ donde $N$ es un conjunto de nodos, vértices u **objetos**, $A$, un conjunto de **flechas**, aristas o arcos dirigidos, y $dom$ y $cod$, funciones de $A$ en $N$. No decimos que las flechas sean pares.*

La función *dom* aplicada a una flecha devuelve su origen, y la función *cod*, su destino. La elección de los nombres *dom* y *cod* hacen referencia a las palabras dominio y codominio que son habituales en matemática cuando se habla de funciones en vez de flechas. Se utilizan éstos nombres por coherencia con las definiciones que usaremos en el resto del curso.

Cualquiera de estas dos definiciones admite suficiente flexibilidad para cantidades de objetos, de flechas e incluso de flechas que comparten el mismo origen $a$ y destino $b$. Personalmente, tengo preferencia por la definición 3, pero para ser coherente con la literatura que utilizaremos como referencia, adoptaremos la definición 4. Además, los llamaremos simplemente **grafos**.

Al conjunto de flechas de $a$ a $b$ (denotado $A(a, b)$ en la definición 3) lo denotaremos $G(a, b) = \{f \in A \mid dom(f) = a \wedge cod(f) = b\}$. Decimos que un grafo es **finito** cuando $N$ y $A$ lo son, y que es **localmente finito** cuando para todo par de objetos $a, b \in N$, el conjunto $G(a, b)$ es finito. Si hubiéramos adoptado la definición 2, todos los grafos serían localmente finitos.

**Ejercicio 5.** *Dar una definición formal del siguiente grafo utilizando cada una de las definiciones presentadas.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "j"'] & b \arrow[dr, "n"] & \\
& c \arrow[u, "g"] \arrow[ul, "m"] \arrow[r, shift left, "h"] & d \arrow[l, shift left, "k"]
\end{tikzcd}$$

**Ejercicio 6.** *Dar un ejemplo de un grafo infinito no trivial que sea localmente finito. Dar luego otro ejemplo de un grafo que no sea localmente finito.*

**Hablemos de funciones.** Al igual que las flechas, las funciones tienen habitualmente un origen (su dominio) y un destino (su codominio).

Además, las funciones tienen las siguientes propiedades:

- Pueden componerse, eso da una nueva función.
- La composición es asociativa.
- Todo conjunto tiene una función que va de él en sí mismo: la función identidad.
- La función identidad es el elemento neutro de la composición.

Las funciones tienen muchas otras propiedades (por ejemplo, pueden aplicarse a un argumento y devolver un valor). Pero son solo estas cuatro propiedades básicas las que se capturan en la teoría de categorías. Por ello, se trata de una abstracción de la noción de función.

**Definición de Categorías.** A continuación, la definición de categoría:

**Definición 7.** *Una categoría* $\mathbf{C}$ *está compuesta por*

- *Una colección* $\mathbf{C}_0$ *de* ***objetos****:* $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$.
- *Una colección* $\mathbf{C}_1$ *de* ***flechas****, morfismos, homomorfismos:* $f, g, h \ldots$.
- *Toda flecha* $f$ *tiene asociado un origen o* ***dominio*** $dom(f)$ *y un destino o* ***codominio*** $cod(f)$*. Escribimos* $f : A \to B$ *ó* $A \xrightarrow{f} B$ *para indicar que* $dom(f) = A$ *y* $cod(f) = B$.
- *Dadas* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *hay una flecha* $g \circ f : A \to C$*, llamada la* ***composición*** *de* $f$ *y* $g$*. La composición de flechas es asociativa.*
- *Para todo objeto* $A$ *existe una flecha* $1_A : A \to A$ *llamada la flecha* ***identidad*** *de* $A$*. Esta flecha es neutra para la composición.*

Observar que utilizamos la palabra *colección* en vez de conjunto. No vamos a prestar mucha atención a esta distinción, pero en algunos casos, tendrá relevancia. La explicaremos oportunamente.

Salvo por esa distinción, se observa inmediatamente de las tres primeras componentes que toda categoría es un grafo.

**Ejercicio 8.** *Observar que la definición de categoría es una extensión de la definición 4. Dar una definición alternativa de categoría que sea una extensión de la definición 3.*

En teoría de categorías es común la afirmación de que lo importante son las flechas, no los objetos. Esto significa que la estructura de la categoría está dada por la operación de composición. Los objetos cumplen el rol de condicionar la definición de la composición (una especie de buen tipado de la composición).

Se suele denotar por $\mathbf{C}(A, B)$ ó $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ (o incluso $Hom(A, B)$, si no es necesario mencionar la categoría $\mathbf{C}$) a la colección de flechas de $A$ en $B$, es decir, a la colección de flechas cuyo dominio es $A$ y cuyo codominio es $B$.

Que la composición sea asociativa significa que dadas $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, la igualdad $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ vale. Gráficamente, (y utilizando la terminología propia de teoría de categorías) podemos decir que asociatividad significa que el siguiente diagrama siempre conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

Que un diagrama conmute significa que para todo par de objetos $a$ y $b$ del diagrama, las composiciones que se hagan a lo largo de cualquier camino dirigido de $a$ a $b$ dan idéntico resultado. En el ejemplo, el camino de $A$ a $D$ que se obtiene bajando por $g \circ f$ y luego continuando por $h$ determina la misma flecha que el camino que primero realiza $f$ y luego baja por $h \circ g$. Es decir, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Observar que podríamos haber omitido los rótulos de las flechas $g \circ f$ y $h \circ g$. En efecto, al afirmar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr] & \\
& C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

conmuta, también estamos afirmando que la flecha que va de $A$ a $C$ es $g \circ f$, y la que va de $B$ a $D$ es $h \circ g$.

Que la identidad sea elemento neutro de la composición significa que dada $f : A \to B$, las igualdades $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$ se cumplen. Esto se puede expresar afirmando que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, "f"] & B \arrow[d, "1_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Se puede comprobar que para cada objeto, la flecha identidad es única. En efecto, sea $A$ un objeto con dos flechas identidad: $1_A$ y $1'_A$. La conmutatividad del siguiente diagrama se obtiene como consecuencia de que $1_A$ es la identidad, tomando $f = 1'_A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1'_A"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, "1'_A"] & A \arrow[d, "1_A"] \\
A \arrow[r, "1'_A"] & A
\end{tikzcd}$$

De igual modo, la del siguiente se obtiene como consecuencia de que $1'_A$ es la identidad, tomando $f = 1_A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1'_A"'] \arrow[dr, "1_A"] & A \arrow[d, "1'_A"] \\
A \arrow[r, "1_A"] & A
\end{tikzcd}$$

Observar que el triángulo superior derecho del primer diagrama dice que $1_A \circ 1'_A = 1'_A$, mientras que el inferior izquierdo del segundo expresa que $1_A \circ 1'_A = 1_A$. Por lo tanto $1_A = 1'_A$.

Por supuesto que idéntica conclusión puede obtenerse (y más brevemente) sin apelar a los diagramas, pero es habitual en teoría de categorías utlizar los diagramas en las pruebas.

**Ejercicio 9.** *Comprobar ecuacionalmente que para cada objeto de una categoría, la flecha identidad es única.*

**Ejemplos de Categorías.** Existen numerosos ejemplos de categorías. Tantos, que iremos introduciendo nuevas categorías a lo largo de la materia.

*Algunos ejemplos con grafos.* A continuación algunos ejemplos de categorías a partir de grafos.

**Ejemplo 10.** *La categoría más sencilla es la categoría vacía* $\mathbf{0}$*: no tiene objetos, ni flechas. Las demás propiedades se satisfacen trivialmente porque están universalmente cuantificadas sobre conjuntos vacíos.*

**Ejemplo 11.** *La siguiente categoría más sencilla es la categoría* $\mathbf{1}$*: con un único objeto y una única flecha (la identidad de ese objeto). Las demás propiedades se satisfacen trivialmente porque la composición es trivial.*

Es tan sencilla que se la puede graficar:

$$*$$

El asterisco representa el único objeto de la categoría $\mathbf{1}$. Por convención, la flecha identidad no se dibuja. Una categoría que solo tiene flechas identidad se dice **discreta**.

**Ejemplo 12.** *Un ejemplo sencillo de categoría no discreta es la categoría* $\mathbf{2}$*: tiene dos objetos y una única flecha (además de las dos identidades) de un objeto en el otro.*

También puede graficarse:

$$* \longrightarrow *$$

Acá el asterisco representa un objeto diferente en cada ocurrencia, y la flecha dibujada es la única que no es la identidad.

Observar que decimos "la" categoría $\mathbf{1}$, "la" categoría $\mathbf{2}$, etc., pero en realidad hay infinitas de cada una de ellas: depende de cuáles sean los objetos y las flechas. La categoría $\mathbf{0}$, en cambio, es una sola.

**Ejercicio 13.** *¿Corresponde el siguiente gráfico a una categoría? Justificar.*

$$* \rightrightarrows *$$

**Ejercicio 14.** *¿Corresponde el siguiente gráfico a una categoría? Justificar.*

$$* \rightleftarrows *$$

*Algunos ejemplos con funciones.* A continuación algunos ejemplos de categorías a partir de funciones.

**Ejemplo 15.** *Seguramente el ejemplo de categoría más importante es* **Set***: la categoría en que los objetos son conjuntos y las flechas son funciones totales, la composición es la usual y la identidad es la función identidad.*

Observar que acá resulta relevante que la definición de categorías requiera una *colección* de objetos en vez de un conjunto. La colección de objetos de la categoría **Set** es la de todos los conjuntos, que no puede a la vez ser un conjunto.

Se pueden derivar otros ejemplos:

**Ejemplo 16.** *La categoría* $\mathbf{Set_{fin}}$*: la categoría en que los objetos son conjuntos finitos y las flechas son funciones totales.*

**Ejemplo 17.** *La categoría* **Inj** *(resp.* **Surj***) cuyos objetos son conjuntos y las flechas, funciones totales inyectivas (resp. suryectivas).*

**Ejercicio 18.** *Comprobar que* $\mathbf{Set_{fin}}$, **Inj** *y* **Surj** *son categorías.*

**Ejercicio 19.** *Las funciones inyectivas* $f : A \to B$ *son aquéllas que satisfacen que* $f^{-1}(b)$ *tiene a lo sumo un elemento, para todo* $b \in B$*. Si tomamos las flechas que satisfacen que* $f^{-1}(b)$ *tiene a lo sumo dos elementos, para todo* $b \in B$*, ¿obtenemos una categoría? ¿Y si pedimos* $f^{-1}(b)$ *finito? ¿o infinito?*

**Ejercicio 20.** *Las funciones suryectivas satisfacen que* $f^{-1}(b)$ *tiene al menos un elemento. ¿Si pedimos que tenga al menos dos?*

**Ejemplo 21.** *La categoría* **Pfn***: la categoría en que los objetos son conjuntos y las flechas son funciones parciales.*

*Ejemplos de computación.*

**Ejemplo 22.** *La categoría* $\lambda\!\to$ *de los tipos del cálculo lambda simplemente tipado, donde los objetos son tipos dados por la siguiente gramática*

$$A, B \quad ::= \quad \textit{ciertos tipos básicos} \mid A \longrightarrow B \mid \ \ldots$$

*y las flechas son términos lambda cerrados correctamente tipados. Los términos del cálculo lambda están dados por la siguiente gramática (cada variable tiene cierto tipo)*

$$M, N \quad ::= \quad c \mid v \mid M\ N \mid \lambda v.M \mid \ \ldots$$

*y satisfacen las ecuaciones* $(\lambda x.\ b)\ a = b[a/x]$ *(regla* $\beta$*),* $\lambda x.\ a\ x = a$ *si* $x$ *no está libre en* $a$ *(regla* $\eta$*), y renombre de variables ligadas, todas ellas entre términos de igual tipo.*

**Ejercicio 23.** *Comprobar que* $\lambda\!\to$ *es una categoría.*

**Ejercicio 24.** *Definir una categoría en que los objetos son estados y las flechas son programas imperativos.*

(SEGUNDA CLASE: CATEGORÍAS CONCRETAS Y FUNTORES)

**Definición 25.** *Un **semigrupo** es un par $(S, \cdot)$ donde $S$ es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria asociativa sobre $S$. Un **monoide** es una terna $(M, \cdot, e)$ donde $(M, \cdot)$ es un semigrupo y $e$ el elemento neutro de la operación $\cdot$ (es decir, tal que para todo $x \in M$, $x \cdot e = e \cdot x = x$). Un **grupo** es una cuadrupla $(G, \cdot, e, (\_)^{-1})$ donde $(G, \cdot, e)$ es un monoide y $(\_)^{-1}$ la operación que devuelve el inverso de un elemento de $G$ (es decir, tal que para todo $x \in G$, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$).*

**Ejemplo 26.** *El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un grupo (y por lo tanto un monoide y un semigrupo) con la suma habitual. En cambio no lo es con la multiplicación habitual ya que solo el 1 y el -1 tienen inverso multiplicativo (ellos son sus propios inversos). Pero $\mathbb{Z}$ es un monoide (y por lo tanto un semigrupo) con la multiplicación.*

**Ejemplo 27.** *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un grupo con la suma. En cambio no lo es con la multiplicación ya que el 0 no tiene inverso multiplicativo. Pero $\mathbb{Q} - \{0\}$ es un grupo con la multiplicación. Idéntico análisis puede hacerse para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.*

**Ejemplo 28.** *El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un monoide con la suma y también con la multiplicación. El conjunto $\mathbb{P}$ de los números enteros positivos es un semigrupo con la suma y un monoide con la multiplicación.*

**Ejemplo 29.** *El conjunto $\Sigma^*$ de las cadenas sobre un alfabeto $\Sigma$ es un monoide con la operación de concatenación. La cadena vacía es el elemento neutro.*

**Ejercicio 30.** *Dado un conjunto $A$, demostrar que el conjunto de todas las permutaciones de elementos de $A$ (o sea, el de todas las funciones biyectivas de $A$ en $A$) es un grupo.*

**Ejercicio 31.** *Dada una categoría $\mathbf{C}$, y un objeto $A$ de esa categoría, comprobar que $Hom_{\mathbf{C}}(A, A)$ es un monoide (ignorando por el momento la distinción entre colección y conjunto).*

**Ejercicio 32.** *Comprobar que en un monoide el elemento neutro es único.*

**Ejercicio 33.** *Comprobar que en un monoide, si $x$ tiene un inverso a izquierda y un inverso a derecha, se trata del mismo elemento, es decir, si $y \cdot x = e$ y $x \cdot z = e$ entonces, $y = z$. Concluir que en un grupo el inverso es único.*

**Ejercicio (posgrado) 34.** *En un monoide, si $a \cdot x = a \cdot y = e$, ¿se cumple necesariamente que $x = y$?*

**Ejercicio (posgrado) 35.** *Dado un semigrupo $(S, \cdot)$ un elemento $e \in S$ que es neutro a izquierda (es decir, tal que para todo $x \in M$, $e \cdot x = x$) y una operación de inverso a izquierda (es decir, tal que para todo $x \in G$, $x^{-1} \cdot x = e$), comprobar que $(S, \cdot, e, (\_)^{-1})$ es un grupo.*

**Definición 36.** *Un **homomorfismo de semigrupos** es una función $f : S \to S'$ tal que para todo $x, y \in S$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y)$. Un **homomorfismo de monoides** es una función $f : M \to M'$ tal que $f$ es un homomorfismo de semigrupos y $f(e) = e'$. Un*

***homomorfismo de grupos*** *es una función* $f : G \to G'$ *tal que* $f$ *es un homomorfismo de monoides y* $f(x^{-1}) = f(x)^{-1'}$ *para todo* $x \in G$*.*

Un ejemplo de homomorfismo de grupo es la función de exponenciación en cualquier base, por ejemplo, 2. Veamos que $\exp : (\mathbb{N}, +, 0, -) \to (\mathbb{Q} - \{0\}, *, 1, 1/(\_))$ definida por $\exp(n) = 2^n$ es homomorfismo. En efecto, $\exp(n+m) = 2^{n+m} = 2^n * 2^m = \exp(n) * \exp(m)$, $\exp(0) = 2^0 = 1$ y $\exp(-n) = 2^{-n} = 1/2^n = 1/\exp(n)$.

**Ejercicio 37.** *Comprobar que la función longitud* $\# : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *es homomorfismo de monoide.*

**Ejercicio 38.** *Dar otros ejemplos de semigrupos y de homomorfismos de semigrupos.*

**Ejemplo 39.** *Se puede comprobar fácilmente que la composición de homomorfismos es un homomorfismo y que la identidad es un homomorfismo. Tenemos entonces la categoría* **Semi** *(resp.* **Mon**, **Grp***) cuyos objetos son semigrupos (resp. monoides, grupos), y flechas, homomorfismos de semigrupo (resp. monoide, grupo).*

**Ejercicio 40.** *Dado un homomorfismo de monoide* $f : M \to M'$*, comprobar que si* $M$ *y* $M'$ *son grupos entonces* $f$ *es homomorfismo de grupo. Concluir que en el ejemplo de la función* exp *más arriba, no era necesario comprobar que* $\exp(-n) = 1/\exp(n)$*.*

Todas estas categorías tienen algo en común: sus objetos son conjuntos con estructura y sus flechas son funciones que preservan dicha estructura. Se las llaman **categorías concretas**.

**Ejercicio (posgrado) 41.** *Sea* $\Omega$ *un conjunto de operaciones con sus aridades y* $E$ *un conjunto de ecuaciones. Una* $(\Omega, E)$*-**álgebra** es un conjunto* $A$ *cerrado por las operaciones de* $\Omega$ *y que satisface las ecuaciones de* $E$*. Un homomorfismo de* $(\Omega, E)$*-álgebras, es una función* $f : A \to A'$ *tal que* $f$ *preserva las operaciones de* $\Omega$*.*

*Comprobar que* $(\Omega, E)$-**Alg***, cuyos objetos son* $(\Omega, E)$*-álgebras, y flechas, homomorfismos de* $(\Omega, E)$*-álgebras, es una categoría.*

Un ejemplo particularmente interesante de categoría concreta es el de la categoría **Poset** de los conjuntos parcialmente ordenados.

**Definición 42.** *Un conjunto parcialmente ordenado (**poset**) es un conjunto con una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un **homomorfismo de posets** es una función que preserva el orden (también llamado **función monótona**).*

**Ejemplo 43.** *La categoría* **Poset** *tiene por objetos a los posets y por flechas a las funciones monótonas.*

Otro ejemplo interesante es el de los grafos. Recordemos la definición 4.

**Definición 44.** *Un **homomorfismo de grafos** es un par de funciones* $F_0 : N \to N'$ *y* $F_1 : A \to A'$ *tal que para toda flecha* $f \in A$*,* $dom'(F_1(f)) = F_0(dom(f))$ *y* $cod'(F_1(f)) = F_0(cod(f))$*.*

Gráficamente, $F : G \to G'$ es un homomorfismo de grafos si cada vez que tenemos

$$a \xrightarrow{f} b$$

en el grafo $G$, tenemos

$$F_0(a) \xrightarrow{F_1(f)} F_0(b)$$

en el grafo $G'$.

Como $F_0$ y $F_1$ se aplican a objetos y flechas respectivamente, en general no hay confusión si se omite el subíndice. Con esta convención, el último diagrama quedaría:

$$F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b)$$

**Ejemplo 45.** *La categoría* **Graph** *tiene por objetos a los grafos y por flechas a los homomorfismos de grafos.*

**Ejercicio 46.** *Adecuar la definición de homomorfismo de grafo a cada una de las definiciones 1, 2 y 3.*

Podemos extender la definición de homomorfismo de grafo a la de homomorfismo de categorías. Los homomorfismos de categorías se llaman **funtores**.

**Definición 47.** *Dadas las categorías* **C** *y* **C***', un* ***funtor*** $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ *es un par de funciones* $F_0$ *y* $F_1$ *tales que:*

- $F_0$ *lleva objetos de* **C** *en objetos de* **C***' (se omite el subíndice)*
- $F_1$ *lleva flechas de* **C** *en flechas de* **C***' (se omite el subíndice)*
- $$A \xrightarrow{f} B \quad \in \quad \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \quad \in \quad \mathbf{C}'$$
- $$\left.\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ \\ B \xrightarrow{g} C \end{array}\right\} \in \mathbf{C} \implies F(g \circ f) = F(g) \circ' F(f)$$
- $F(1_A) = 1'_{F(A)}$

**Ejemplo 48.** *Para cualquiera de las categorías concretas, existe un funtor a* **Set** *consistente simplemente en ignorar u olvidar la estructura y devolver el conjunto subyacente. En inglés se le llama funtor* ***forgetful*** *(¿funtor* ***de olvido****?) y se lo denota* $|\_|$*, por ejemplo* $|\_| : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ *se define por:*

- $|(G, \cdot, e, (\_)^{-1})| = G$.
- $|f| = f$*, simplemente olvidamos que* $f$ *preserva las operaciones de grupo.*

**Ejemplo 49.** *También se puede olvidar una parte de la estructura obteniéndose, por ejemplo, un funtor de olvido de la categoría* **Grp** *a* **Mon**.

**Ejercicio 50.** *¿Son inyectivos los funtores de olvido mencionados?*

**Ejercicio 51.** *¿Existe algún funtor de la categoría* **2** *en la categoría* **1***?*

**Ejercicio 52.** *¿Existe algún funtor de la categoría* **Set** *en la categoría* **1***?*

**Ejercicio 53.** *Dada una categoría cualquiera* **C**. *¿Cuántos funtores hay de la categoría* **C** *en la categoría* **1***?*

**Ejercicio 54.** *Dada una categoría cualquiera* **C***¿Cuántos funtores hay de la categoría* **0** *en la categoría* **C***?*

**Ejemplo 55.** *La categoría* **Cat** *tiene por objetos a las categorías y por flechas a los funtores.*

A la luz de este ejemplo, podemos instanciar la afirmación ya mencionada sobre la importancia de flechas por sobre la de objetos: lo importante son los funtores, no las categorías.

**Definición 56.** *Una categoría es* ***pequeña*** *si tanto su colección de objetos como de flechas son conjuntos. En caso contrario, es una categoría* ***grande****. Una categoría es* ***localmente pequeña*** *si para todo par de objetos $A$ y $B$, la colección de flechas de $A$ a $B$ es un conjunto.*

La categoría **Cat**, en realidad, es la categoría cuyos objetos son categorías pequeñas. **Cat** misma es una categoría grande (y por ello, no es un objeto de **Cat**), pero localmente pequeña.

**Ejercicio 57.** *Para cada una de las categorías vistas, ¿cuáles son pequeñas y cuáles grandes, cuáles localmente pequeñas?*

(Tercera clase: primeras construcciones categóricas: objeto inicial y final. Preórdenes y posets, grafos y relaciones)

**Isomorfismo.** Cuando se estudian distintas estructuras (semigrupo, monoide, grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, reticulado, preorden, orden parcial, cpo, dominio, etc.) es habitual introducir una definición de isomorfirsmo como un homomorfismo biyectivo. En teoría de categorías, se pretende dar una definición más abstracta, que no asuma que las flechas son funciones y los objetos conjuntos con estructuras.

Se define isomorfismo en lenguaje categórico como sigue.

**Definición 58.** *En una categoría* $\mathbf{C}$*, un **isomorfismo** es una flecha* $A \xrightarrow{f} B$ *tal que existe una flecha* $B \xrightarrow{g} A$ *tal que* $g \circ f = 1_A$ *y* $f \circ g = 1_B$*. Se suele decir que* $f$ *es **iso**.*

**Ejercicio 59.** *Comprobar que si una tal* $g$ *existe, entonces es única (y por ello se escribe* $g = f^{-1}$*). Y que* $g$ *también es iso.*

**Ejercicio 60.** *Comprobar que la identidad es un isomorfismo y que la composición de isomorfismos también lo es.*

**Definición 61.** *Se dice que* $A$ *y* $B$ *son **isomorfos** (y se escribe* $A \cong B$*) si existe un iso* $A \xrightarrow{f} B$*.*

**Ejercicio 62.** *Comprobar que la relación* $\cong$ *entre objetos de una categoría es de equivalencia.*

En la categoría **Set**, por ejemplo, la definición de isomorfismo coincide con la de función invertible o biyectiva, y la de objetos isomorfos, con la de conjuntos de igual cardinalidad. Aprovecharemos esta observación para escribir $A \cong_{\mathbf{Set}} B$ cuando se quiera expresar que $A$ y $B$ son conjuntos de igual cardinalidad.

**Ejercicio 63.** *¿Cuáles son los isomorfismos en las categorías* $\mathbf{2}$*,* $\mathbf{Set_{fin}}$*,* **Pfn***,* **Semi***,* **Mon***,* **Grp***,* **Poset***,* **Graph***,* **Cat***,* $\lambda\!\!\rightarrow$*?*

**Ejercicio 64.** *Comprobar que todos los casos particulares (que se obtiene al determinar el objeto y la flecha) de la categoría* $\mathbf{1}$ *son isomorfos entre sí. Idem para la categoría* $\mathbf{2}$*.*

**Ejercicio 65.** *Sea el siguiente grafo*

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & \diamond \arrow[l] \end{tikzcd}$$

*donde hay exactamente 5 flechas (las graficadas más las dos identidades). Definir la operación de composición de modo de que resulte una categoría (ejercicio tramposo).*

Se puede comprobar que si dos objetos $A, B \in \mathbf{C}_0$ son isomorfos, entonces para todo $C \in \mathbf{C}_0$, $Hom(A, C) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(B, C)$ y $Hom(C, A) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(C, B)$. En efecto, si $A \xrightarrow{f} B$ iso, entonces $\phi_C(g) = g \circ f^{-1}$ es la biyección de $Hom(A, C)$ a $Hom(B, C)$ y $\psi_C(g) = f \circ g$ es la de $Hom(C, A)$ a $Hom(C, B)$. Combinando ambas observaciones se obtiene también $Hom(A, A) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(B, B)$.

Se puede también observar que la existencia de $\phi_C$ para todo $C$, no implica la de $\psi_C$ (al revés tampoco), y que la existencia de ambas no implica que $A$ y $B$ sean isomorfos. Para ello, consideramos la categoría **Const** cuyos objetos son conjuntos y cuyas flechas son las funciones constantes (más las funciones identidades).

**Ejercicio 66.** *Para la categoría* **Const***:*

1. *¿Cuáles son los objetos isomorfos?*
2. *Comprobar que para todo par de conjuntos infinitos $A$ y $B$, y para todo $C$, $Hom(A, C) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(B, C)$. ¿Cuál es el problema si $A$ y $B$ son finitos?*
3. *Comprobar que para todo par de conjuntos infinitos $A$ y $B$ tales que $A \cong_{\mathbf{Set}} B$, $Hom(C, A) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(C, B)$ para todo $C$.*
4. *Concluir que la existencia de $\phi_C$ para todo $C$, no implica la de $\psi_C$, menos aún que $A$ y $B$ sean isomorfos.*

**Objeto inicial y objeto terminal.**

**Definición 67.** *En una categoría* $\mathbf{C}$*,* $0$ *es un* ***objeto inicial*** *si para todo objeto $A$ de* $\mathbf{C}$ *existe una única flecha $0 \xrightarrow{!^A} A$. Análogamente,* $1$ *es un* ***objeto terminal*** *si para todo objeto $A$ de* $\mathbf{C}$ *existe una única flecha $A \xrightarrow{!_A} 1$.*

Se puede comprobar que si $\mathbf{C}$ tiene objeto inicial, entonces el mismo es único salvo isomorfismo: Sean $0$ y $0'$ objetos iniciales, como $0$ es inicial existe una única flecha $0 \xrightarrow{f} 0'$. Como $0'$ es inicial existe una única flecha $0' \xrightarrow{g} 0$. Podemos componer ambas flechas obteniendo $0 \xrightarrow{g \circ f} 0$ y $0' \xrightarrow{f \circ g} 0'$. Pero por ser $0$ inicial, hay solo una flecha $0 \longrightarrow 0$, y nosotros tenemos aparentemente dos: $g \circ f$ y $1_0$. Por lo tanto, deben ser la misma $g \circ f = 1_0$.

De la misma forma, usando que $0'$ es inicial, obtenemos $f \circ g = 1_{0'}$. Por lo tanto $f$ y $g$ son isos y $0 \cong 0'$.

**Ejercicio 68.** *Comprobar que si* $\mathbf{C}$ *tiene objeto terminal, es único salvo isomorfismo.*

De los ejercicios 54 y 53 se deduce que $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son los objetos inicial y terminal de la categoría **Cat**. Su unicidad (salvo isomorfismo) explica que se le llame “la” categoría $\mathbf{1}$, cuando, como dijimos luego del ejemplo 12, existen infinitas categorías terminales (todas isomorfas entre sí). En general, las definiciones y afirmaciones siempre son salvo isomorfismo: importa la estructura de la categoría más que los nombres elegidos para sus objetos y para sus flechas. La estructura depende de las flechas y su composición, los objetos sólo cumplen un rol secundario: restringir las composiciones posibles.

**Ejercicio 69.** *En las categorías vistas, ¿cuáles son (si existen) los objetos iniciales y terminales?*

Las definiciones de objeto inicial y objeto terminal son las generalizaciones o abstracciones que ofrece la teoría de categoría de la noción de conjunto vacío y conjunto unitario (singleton). Repasar la definición 67 para notar la manera en que se definieron tales objetos categóricamente.

Recordemos la categoría $\mathbf{2}$ definida en el ejemplo 12.

**Ejemplo 70.** *Otro ejemplo sencillo de categoría es la categoría* $\mathbf{3}$*: tiene tres objetos, una única flecha del primero en el segundo, una única flecha del segundo en el tercero, y la composición de ambas.*

Puede graficarse:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[dr] & * \arrow[d] \\ & * \end{tikzcd}$$

**Ejercicio 71.** *¿Tiene objetos inicial y terminal la categoría* **3***?*

**Ejercicio 72.** *Enumerar, salvo isomorfismo, todas las categorías con 3 objetos y 2 flechas (además de las identidades). Para cada una de ellas, determinar si tienen objetos inicial y terminal; y si hay objetos isomorfos.*

**Ejemplo 73.** *Más difícil de graficar, dado un número natural $n$, la categoría* **n** *tiene $n$ objetos (numerémoslos: $1, 2, \ldots, n$). Dados los objetos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ hay una única flecha de $i$ a $j$ si $i \leq j$; si $i > j$ no hay ninguna. La composición debe definirse de la única manera posible para que sea una categoria, por ejemplo, la composición de la flecha que va de $1$ a $3$ con la que va de $3$ a $8$ es la única flecha que va de $1$ a $8$.*

**Ejemplo 74.** *Esta construcción puede generalizarse a cualquier preorden (relación reflexiva y transitiva): Dado un preorden $P$, se toman sus elementos como objetos de la categoría y hay exactamente una flecha entre $p$ y $q$ si y solo si $p \leq_P q$.*

En particular, un poset es un preorden y por lo tanto puede ser visto como categoría. No hay que confundir esta categoría con la categoría **Poset** de los posets y las funciones monótonas del ejemplo 43. De paso, vale la pregunta:

**Ejercicio 75.** *¿se podría definir también una categoría (la podríamos llamar* **Pre***) en que los objetos son preórdenes?*

Volvamos al último ejemplo.

**Ejercicio 76.** *Dada una categoría, ¿cómo puede definir un preorden entre sus objetos? ¿En qué casos esta construcción es exactamente la inversa del último ejemplo?*

**Ejercicio 77.** *Sea $P$ un preorden visto como categoría. ¿Cuáles serían los objetos inicial y terminal? ¿Cuáles serían los isomorfismos, cuáles los objetos isomorfos?*

**Ejercicio 78.** *Sean $P$ y $Q$ dos posets vistos como categorías. ¿Cuáles son los funtores de $P$ a $Q$?*

**Ejemplo 79.** *Dado un grafo $G$, es posible construir una categoría $\mathbf{Path}_G$ de la siguiente manera: los objetos de la categoría son los objetos del grafo; las flechas de la categoría son los caminos dirigidos del grafo; la composición es la concatenación de caminos.*

**Ejercicio 80.** *¿Cómo se define dom y cod del camino vacío? (ejercicio) ¿Cómo podríamos haber evitado este problema en la definición de categoría?*

**Ejercicio 81.** *¿Tiene $\mathbf{Path}_G$ objetos iniciales y terminales? ¿Y objetos isomorfos?*

**Ejemplo 82.** *Dado un grafo $G$ sin ciclos, es posible construir una categoría $G^*$ agregando las flechas identidad que falten, y los resultados de componer las flechas del multigrafo. Si $G$ es finito, la categoría $G^*$ es finita también. ¿Cómo se compara con la categoría* $\mathbf{Path}_G$*?*

**Ejercicio 83.** *¿Qué pasa si $G$ tiene ciclos? ¿Sigue valiendo la comparación con* $\mathbf{Path}_G$*? ¿Cómo podría definirse la composición para que la categoría resulte finita si el grafo lo es?*

**Ejercicio 84.** *¿En qué casos tiene $G^*$ objetos inicial y terminal? ¿Y objetos isomorfos?*

**Ejemplo 85.** *Sea* **Rel** *la categoría cuyos objetos son conjuntos y flechas de* **Rel***(A,B) relaciones binarias entre elementos de ambos conjuntos, es decir, subconjuntos de $A \times B$.*

**Ejercicio 86.** *Identificar objetos inicial y terminal, y objetos isomorfos de* **Rel**.

**Ejercicio 87.** *Dado un autómata $A$, mostrar que puede construirse una categoría $A^*$ donde los objetos son los estados y las flechas, las cadenas que pueden llevar el autómata de un estado a otro. Identificar objetos inicial y terminal, y objetos isomorfos.*

(Cuarta clase: categorías a partir de categorías: subcategoría, $\mathbf{C^{op}}$, dualidad, producto Cartesiano, producto de categorías)

**Subcategorías.**

**Definición 88.** *Una **subcategoría** de* $\mathbf{C}$ *es una categoría* $\mathbf{C}$*' tal que los objetos de* $\mathbf{C}$*' son objetos de* $\mathbf{C}$*, las flechas de* $\mathbf{C}$*' son flechas de* $\mathbf{C}$*, con las mismas identidades, composición, dominio y codominio. Es decir, tal que*

- $\mathbf{C}'_0 \subseteq \mathbf{C}_0$.
- $\mathbf{C}'_1 \subseteq \mathbf{C}_1$.
- *Para toda flecha* $f \in \mathbf{C}'_1$, $dom'(f) = dom(f)$ *y* $cod'(f) = cod(f)$.
- *Para todo par de flechas* $f : \mathbf{C}'(A, B)$ *y* $g : \mathbf{C}'(B, C)$, $g \circ' f = g \circ f$.
- *Para todo objeto* $A \in \mathbf{C}'_0$, $1'_A = 1_A$.

**Ejemplo 89.** $\mathbf{Set_{fin}}$ *es subcategoría de* $\mathbf{Set}$.

**Ejercicio 90.** *Dar otros ejemplos de subcategorías de* $\mathbf{Set}$.

**Ejercicio 91.** *¿Cuáles de las categorías definidas hasta ahora son subcategorías de* $\mathbf{Rel}$*?*

**Ejemplo 92.** *Sea* $F$ *un funtor. La imagen de* $F$ *es una subcategoría.*

Observar que la afirmación inversa también se cumple: dada una subcategoría, se puede definir un funtor (inyectivo) cuya imagen sea la subcategoría. Por ello, a veces se identifica, incluso se define, como subcategoría a un funtor inyectivo.

**Categoría opuesta.**

**Definición 93.** *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *se define la categoría* $\mathbf{C^{op}}$ *(la **categoría opuesta** o **dual** de* $\mathbf{C}$*) tal que los objetos de* $\mathbf{C^{op}}$ *son los mismos que los de* $\mathbf{C}$*, y las flechas de* $\mathbf{C^{op}}$ *también, salvo que su orientación está invertida. Es decir, tal que*

- $\mathbf{C^{op}}_0 = \mathbf{C}_0$.
- $\mathbf{C^{op}}_1 = \mathbf{C}_1$.
- *Para toda flecha* $f$, $dom^{op}(f) = cod(f)$ *y* $cod^{op}(f) = dom(f)$.
- *Para todo par de flechas* $f : \mathbf{C}(A, B)$ *y* $g : \mathbf{C}(B, C)$, $f \circ^{op} g = g \circ f$.
- *Para todo objeto* $A$, $1^{op}_A = 1_A$.

Es decir, la categoría $\mathbf{C^{op}}$ es la categoría $\mathbf{C}$ con las flechas invertidas.

**Ejercicio 94.** *Comprobar que* $\mathbf{C^{op}}$ *es una categoría si* $\mathbf{C}$ *lo es.*

**Ejercicio 95.** *¿Es* $(\_)^{\mathbf{op}}$ *un funtor de* $\mathbf{Cat}$ *en* $\mathbf{Cat}$*?*

**Ejercicio 96.** *Comprobar que* $(\mathbf{C^{op}})^{\mathbf{op}} = \mathbf{C}$.

**Ejemplo 97.** *Se puede comprobar que* $\mathbf{C^{op}}$ *tiene objeto inicial sii* $\mathbf{C}$ *tiene objeto terminal, y es el mismo. Similarmente,* $\mathbf{C^{op}}$ *tiene objeto terminal sii* $\mathbf{C}$ *tiene objeto inicial, y es el mismo. Los isomorfismos de* $\mathbf{C^{op}}$ *son los de* $\mathbf{C}$.

Este ejemplo es consecuencia de la dualidad existente entre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C^{op}}$ que permite formular el siguiente enunciado. Para ello, dada una fórmula $\phi$, se define $\phi^{op}$ a la fórmula obtenida a partir de $\phi$ invirtiendo la orientación de todas las flechas involucradas en ella. Claramente $(\phi^{op})^{op} = \phi$.

**Prop 98.** *La afirmación $\phi$ vale para la categoría $\mathbf{C}$ sii $\phi^{op}$ vale para la categoría $\mathbf{C^{op}}$.*

Una consecuencia inmediata es el siguiente principio de dualidad

**Prop 99.** *Si la afirmación $\phi$ vale para todas las categorías, entonces $\phi^{op}$ también.*

En efecto, si $\phi$ vale para toda categoría, sea $\mathbf{C}$ una categoría, $\phi$ vale en particular para $\mathbf{C^{op}}$. Por lo tanto, por la proposición anterior, $\phi^{op}$ vale para $(\mathbf{C^{op}})^{\mathbf{op}} = \mathbf{C}$.

**Ejemplo 100.** *Se puede comprobar que* $\mathbf{Rel^{op}} \cong \mathbf{Rel}$.

**Ejercicio 101.** *¿Alguna otra de las categorías presentadas es isomorfa a su opuesta?*

**Ejercicio 102.** *En el ejercicio 72 ¿cuáles son las categorías opuestas entre sí?*

**Producto Cartesiano.** La definición habitual de producto Cartesiano de dos conjuntos $A$ y $B$ está dada por $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$. Para generalizar esta definición, en términos propios de teoría de categoría, se evita toda mención a los elementos, reformulándose solo en términos de objetos y flechas.

Sabemos que el conjunto $A \times B$ viene equipado con las funciones de proyección, $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ y $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$. Esto determina una propiedad categórica: el producto Cartesiano entre dos objetos $A$ y $B$ será un objeto $C$ con un par de flechas $C \xrightarrow{a} A$ y $C \xrightarrow{b} B$. Esto suele graficarse

$$\begin{tikzcd} A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

Esta propiedad no caracteriza totalmente al producto Cartesiano, si pensamos en **Set** encontraremos que cualquier conjunto $C$ posee un par de flechas (funciones) como ésas. Falta hablar de la función que construye los pares (que en un lenguaje funcional tendría tipo $A \to B \to A \times B$). También falta decir qué resulta de componer estas funciones.

Para ello, además de $A \xleftarrow{a} C \xrightarrow{b} B$, se pide que para todo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

exista una única flecha $h$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

conmute.

En efecto, si pensamos en **Set**, el producto Cartesiano satisface, como dijimos, la existencia de las proyecciones

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

Además, para todo par de funciones

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

podemos definir $h(x) = (f(x), g(x))$ y comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta (claramente $f = \pi_1 \circ h$ ya que para todo $x \in X$, $f(x) = \pi_1((f(x), g(x))) = \pi_1(h(x))$, y de la misma manera para $g = \pi_2 \circ h$). Es más, se puede comprobar que $h$ es la única función de $X$ en $A \times B$ que hace conmutar este diagrama. En efecto, si

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, sea $x \in X$ y $h'(x) = (a, b)$, como el diagrama conmuta $f(x) = \pi_1(h'(x)) = \pi_1((a, b)) = a$ y $g(x) = b$. Luego, $h'(x) = (a, b) = (f(x), g(x)) = h(x)$, y esto se puede hacer para todo $x \in X$.

**Definición 103.** *En una categoría* **C**, *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

*es un* ***producto de*** *los objetos $A$* ***y*** *$B$ si para todo diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

*existe una única flecha* $X \xrightarrow{h} A \times B$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

Como comprobamos antes de la definición, el producto Cartesiano habitual entre conjuntos satisface esta definición. Por ello, la misma hereda las notaciones habituales: $A \times B$, $\pi_1$ y $\pi_2$. La única flecha $h$ de la definición se escribe $<f, g>$. La conmutatividad del diagrama equivale a las ecuaciones $f = \pi_1 \circ <f, g>$ y $g = \pi_2 \circ <f, g>$.

Observemos que si consideramos el caso particular en que

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

es

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

se concluye que existe una única flecha $A \times B \xrightarrow{<\pi_1, \pi_2>} A \times B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "<\pi_1, \pi_2>" description] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, esa única flecha debe ser $1_{A \times B}$ ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "1_{A \times B}"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta trivialmente. Luego $<\pi_1, \pi_2> = 1_{A \times B}$.

Otro caso particular interesante se da cuando $C \xrightarrow{f} A$ y $D \xrightarrow{g} B$. Si los productos de $A$ y $B$ y de $C$ y $D$ existen, se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & C \times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dl, "f \circ \pi_1"] \arrow[dr, "g \circ \pi_2"'] & D \arrow[d, "g"] \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, existe una única flecha, que se denota $C \times D \xrightarrow{f \times g} A \times B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & C \times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "f \times g"] & D \arrow[d, "g"] \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, de donde se concluye la validez de las ecuaciones $f \times g = <f \circ \pi_1, g \circ \pi_2>$ y $1_A \times 1_B = 1_{A \times B}$.

Observar que hemos abusado de la notación decorando dos flechas diferentes con $\pi_1$ y otras dos flechas con $\pi_2$.

**Ejercicio 104.** *Demostrar la validez de las siguientes ecuaciones (algunas pueden deducirse de ecuaciones previas)*

1. $<f, g> \circ h = <f \circ h, g \circ h>$
2. $(f \times g) \circ (h \times k) = (f \circ h) \times (g \circ k)$
3. $(f \times g) \circ <h, k> = <f \circ h, g \circ k>$

Regresemos a la categoría **Set**. Hemos observado que el producto Cartesiano habitual satisface la definición dada en términos categóricos. Pero, ¿realmente caracteriza dicha definición al producto Cartesiano? ¿No habrá otros conjuntos que también la satisfagan? La respuesta, que se demuestra en general para cualquier categoría, es que si tenemos dos productos entre los mismos objetos, los productos son isomorfos.

Para comprobarlo, asumamos que además de $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$, tenemos que $A \xleftarrow{a} C \xrightarrow{b} B$ satisfacen la definición de producto. Entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "<a, b>"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B
\end{tikzcd}$$

conmutan. Componiendo $h \circ <a,b>$ y $<a,b> \circ h$ obtenemos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "<a,b>"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "h"] & B \\
 & C \arrow[ul, "a"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] \arrow[d, "<a,b>"] & B \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

de donde por unicidad obtenemos $h \circ <a,b> = 1_C$ y $<a,b> \circ h = 1_{A\times B}$. Es decir que $C$ y $A \times B$ son isomorfos.

En toda categoría **C**, si el producto Cartesiano entre dos objetos de **C** existe, entonces es único salvo isomorfismo.

**Ejercicio 105.** *Demostrar el recíproco: en una categoría* **C**, *si* $A\times B$ *existe y* $C \cong A\times B$, *entonces* $C$ *es producto Cartesiano de* $A$ *y* $B$.

Regresando nuevamente a **Set**, obtenemos más de un producto Cartesiano, todo conjunto de igual cardinalidad sirve como tal. Incluso para un mismo conjunto puede haber diferentes definiciones de las funciones de proyección.

**Definición 106.** *Una categoría* **C**, ***tiene productos binarios*** *si para todo par de objetos* $A$ *y* $B$ *de* **C** *existe el producto* $A \times B$, *y* ***tiene todos los productos finitos*** *si tiene productos binarios y tiene objeto terminal.*

**Ejercicio 107.** *Comprobar que si* **C** *tiene objeto terminal, entonces* $1 \times A \cong A$ *(no hace falta que* **C** *tenga productos binarios).*

**Ejercicio 108.** *Demostrar que si* **C** *tiene productos binarios, entonces* $A\times B \cong B \times A$. *¿Hace falta demostrar algo?*

**Ejercicio 109.** *Demostrar que si* **C** *tiene productos binarios, entonces* $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$.

**Ejercicio (posgrado) 110.** *Si* **C** *tiene todos los productos finitos y además tiene objeto inicial, ¿vale el isomorfismo* $0 \times A \cong 0$*?*

**Ejemplo 111.** *En las categorías concretas dadas (***Semi**, **Mon**, **Grp**, **Poset***), el producto Cartesiano existe y se define componente a componente, como es habitual en la rama de la matemática que estudia tales estructuras.*

**Ejemplo 112.** *La categoría* **Cat** *tiene todos los productos finitos. En efecto, vimos que tiene objeto terminal (la categoría* **1***). Además, dadas dos categorías* **C** *y* **D**, *la siguiente definición satisface la definición de producto Cartesiano que hemos dado.*

**Definición 113.** *Dadas dos categorías* **C** *y* **D**, *se define la categoría producto* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *cuyos objetos son pares* $(C, D)$ *de objetos de* **C** *y* **D** *respectivamente, y cuyas flechas son pares* $(f, g)$ *de flechas de* **C** *y* **D**. *Más precisamente,*

- $(\mathbf{C} \times \mathbf{D})_0 = \mathbf{C}_0 \times \mathbf{D}_0$.
- $(\mathbf{C} \times \mathbf{D})_1 = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{D}_1$.
- *Para toda flecha* $(f, g) \in (\mathbf{C} \times \mathbf{D})_1$, $dom(f, g) = (dom(f), dom(g))$ *y* $cod(f, g) = (cod(f), cod(g))$.
- *Para todo par de flechas* $(A, A') \xrightarrow{(f,g)} (B, B')$ *y* $(B, B') \xrightarrow{(i,j)} (C, C')$, *se define* $(i, j) \circ (f, g) = (i \circ f, j \circ g)$.
- *Para todo objeto* $(A, A')$, $1_{(A,A')} = (1_A, 1_{A'})$.

**Ejercicio 114.** *Definir los funtores* $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{C}$ *y* $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{D}$.

**Ejercicio 115.** *Dadas tres categorías* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *y* $\mathbf{X}$, *y dados dos funtores* $\mathbf{X} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ *y* $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}$ *definir el único funtor* $\mathbf{X} \xrightarrow{<F,G>} \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{X} \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "<F,G>"] \arrow[dr, "G"] & \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \times \mathbf{D} \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

**Ejemplo 116.** *Dado un poset* $P$, *consideremos* $P$ *visto como una categoría. Veamos qué es un producto en* $P$. *Sean* $a$ *y* $b$ *objetos, es decir* $a, b \in P$. *El producto de* $a$ *y* $b$ *es*

- *un diagrama de la forma* $a \longleftarrow c \longrightarrow b$
- *tal que para todo otro diagrama de la forma* $a \longleftarrow x \longrightarrow b$ *existe una única flecha* $x \longrightarrow c$ *que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ a & c \arrow[l] \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

*Se omiten rótulos en las flechas sin riesgo de confusión, porque en la categoría* $P$ *entre dos objetos hay a lo sumo una flecha. Por esa misma razón, que el diagrama conmute no suministra información alguna, todos los diagramas conmutan en la categoría* $P$. *Entonces, reescribimos lo anterior diciendo que el producto entre* $a$ *y* $b$ *es*

- *un diagrama de la forma* $a \longleftarrow c \longrightarrow b$
- *tal que para todo otro diagrama de la forma* $a \longleftarrow x \longrightarrow b$ *existe una única flecha* $x \longrightarrow c$.

*Sabiendo que hay flecha de* $i$ *a* $j$ *sii* $i \leq_P j$, *el producto* $c$ *es el ínfimo entre* $a$ *y* $b$.

(Quinta clase: Ejemplos de producto. Coproducto)

Recordemos que se dijo que el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

es un **producto de** los objetos $A$ **y** $B$ si para todo diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $X \xrightarrow{h} A \times B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

Propiedad como la que debe cumplir el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ para ser un producto ("para todo diagrama ... existe ...") se llaman **propiedades universales**. El uso de propiedades universales como ésta es habitual en teoría de categorías.

También es conveniente notar que el producto no es sólo el objeto $A \times B$ sino el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$. Para un mismo objeto $A \times B$ podría haber varios diagramas como ése que satisfagan la propiedad universal. Si se menciona sólo el objeto $A \times B$ (como a veces se hace), puede haber ambigüedad. En cambio si se habla del par de flechas $\pi_1$ y $\pi_2$ no hay ambigüedad posible dado que cada una de ellas tiene asignado un dominio y un codominio, por lo que se puede recuperar el diagrama (siempre que $dom(\pi_1) = dom(\pi_2)$).

Podemos comprobar las afirmaciones que quedaron como ejercicios la clase pasada: que en una categoría con objeto terminal $1 \times A \cong A$ y que en una categoría con productos binarios $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$.

Del primer resultado podemos inferir que la categoría **1** tiene todos los productos finitos. ¿Qué podemos decir de la categoría **2**?

A continuación, extendemos la definición de $\lambda\!\rightarrow$ del ejemplo 22 con tipos y términos para pares:

**Ejemplo 117.** *Ahora los tipos incluyen productos*

$$A, B \quad ::= \quad \textit{ciertos tipos básicos} \mid A \longrightarrow B \mid A \times B \mid \; \ldots$$

*y los términos incluyen pares y proyecciones*

$$M, N \quad ::= \quad c \mid v \mid M \; N \mid \lambda v.M \mid (M, N) \mid fst(M) \mid snd(M) \mid \; \ldots$$

*Además de las ecuaciones $(\lambda x.\ b)\ a = b[a/x]$ (regla $\beta$), $\lambda x.\ a\ x = a$ si $x$ no está libre en $a$ (regla $\eta$), y renombre de variables ligadas, ahora se satisfacen también $fst((a, b)) = a$,*

*$snd((a,b)) = b$ y $(fst(a), snd(a)) = a$, todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.*

*Como $\lambda y.fst(y)$ tiene tipo $A \times B \to A$ y $\lambda y.snd(y)$ tiene tipo $A \times B \to B$, si se define $\pi_1 = \lambda y.fst(y)$ y $\pi_2 = \lambda y.snd(y)$ se obtiene el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

*Ahora, dado un tipo $X$ y un par de términos cerrados $M$ y $N$ de tipo $X \to A$ y $X \to B$ respectivamente, es decir, dado el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "M"'] \arrow[dr, "N"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

*se define $<M, N> = \lambda x.(M\ x, N\ x)$, que también es cerrado y tiene tipo $X \to A \times B$. Tiene sentido preguntarse si el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "M"'] \arrow[d, "<M,N>"] \arrow[dr, "N"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

*conmuta:*

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 \circ <M, N> & = & \lambda z.\ \pi_1\ (<M, N>\ z) \\ & = & \lambda z.\ (\lambda y.fst(y))\ ((\lambda x.(M\ x, N\ x))\ z) \\ & = & \lambda z.\ (\lambda y.fst(y))\ (M\ z, N\ z) \\ & = & \lambda z.\ fst((M\ z, N\ z)) \\ & = & \lambda z.\ M\ z \\ & = & M \\ \pi_2 \circ <M, N> & = & N \end{array}$$

*Habiendo comprobado que conmuta, resta confirmar que $<M, N>$ es el único término (módulo la igualdad que se definió) que hace conmutar el diagrama. Sea $X \xrightarrow{h} A \times B$ tal que $M = \pi_1 \circ h$ y $N = \pi_2 \circ h$,*

$$\begin{array}{rcl} <M, N> & = & <\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h> \\ & = & \lambda x.\ ((\pi_1 \circ h)\ x, (\pi_2 \circ h)\ x) \\ & = & \lambda x.\ (\pi_1\ (h\ x), \pi_2\ (h\ x)) \\ & = & \lambda x.\ ((\lambda y.\ fst(y))\ (h\ x), (\lambda y.\ snd(y))\ (h\ x)) \\ & = & \lambda x.\ (fst(h\ x), snd(h\ x)) \\ & = & \lambda x.\ h\ x \\ & = & h \end{array}$$

**Ejemplo 118.** *En la categoría* **Rel***, el producto entre $A$ y $B$ es en realidad la unión disjunta $A + B = \{(i, x) \mid (i = 1 \wedge x \in A) \vee (i = 2 \wedge x \in B)\}$ junto con las “proyecciones”*

$\pi_1 = \{((1, a), a) \mid a \in A\}$ *y* $\pi_2 = \{((2, b), b) \mid b \in B\}$. *En efecto, se obtiene el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A & A + B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

*Resta ver que este diagrama satisface la propiedad universal correspondiente al producto. Sean*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "s"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

*se define* $<r, s> = \{(x, (1, a)) \mid (x, a) \in r\} \cup \{(x, (2, b)) \mid (x, b) \in s\}$, *se puede comprobar que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "s"] \arrow[d, "<r, s>" description] & \\ A & A + B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

**Ejercicio 119.** *Demostrar que* $<r, s>$ *es la única flecha que hace conmutar el diagrama.*

**Ejercicio 120.** *¿Tiene productos finitos la categoría* **Pfn***? Justificar.*

**Ejemplo 121.** *La categoría* **Set**$*$ *tiene por objetos pares de la forma* $(a, A)$ *donde* $A$ *es un conjunto y* $a \in A$. *Una flecha* $(a, A) \xrightarrow{f} (b, B)$ *es una función de* $A$ *en* $B$ *que satisface que* $f(a) = b$.

**Ejercicio 122.** *Comprobar que* **Set**$*$ *es una categoría. ¿Cuándo dos objetos son isomorfos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto terminal? ¿Tiene productos binarios?*

*Definición de producto utilizando hom-sets.* En este segmento trabajamos con categorías localmente pequeñas (para garantizar que los hom-sets involucrados sean conjuntos).

La propiedad universal del producto dice que para todo diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $<f, g>$ tal que

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "<f,g>"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esto sugiere la siguiente definición de la función $\mu_X$ de $Hom(X, A)\times Hom(X, B)$ en $Hom(X, A \times B)$

$$\mu_X((f, g)) = <f, g>$$

Observemos que si $\mu_X((f, g)) = \mu_X((f', g'))$, entonces

$$\begin{array}{rcl}
f & = & \pi_1 \circ <f, g> \\
 & = & \pi_1 \circ \mu_X((f, g)) \\
 & = & \pi_1 \circ \mu_X((f', g')) \\
 & = & \pi_1 \circ <f', g'> \\
 & = & f'
\end{array}$$

y de la misma forma $g = g'$. Esto prueba que $\mu_X$ es inyectiva. También es suryectiva ya que dada la flecha $X \xrightarrow{h} A \times B$,

$$\begin{array}{rcl}
h & = & 1_{A\times B} \circ h \\
 & = & <\pi_1, \pi_2> \circ h \\
 & = & <\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h> \\
 & = & \mu_X((\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h))
\end{array}$$

Por lo tanto $\mu_X$ es una biyección, su inversa es la función $\nu_X$ de $Hom(X, A \times B)$ en $Hom(X, A) \times Hom(X, B)$ definida por

$$\nu_X(h) = (\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)$$

**Ejercicio 123.** *Asumiendo que* $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ *es un producto entre* $A$ *y* $B$*, comprobar que* $\nu_X$ *es la inversa de* $\mu_X$*.*

Para definir $\mu_X$ es necesario saber que $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre $A$ y $B$, para que $<f, g>$ tenga sentido. En cambio, la definición de $\nu_X$ es elemental, requiere sólo que $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ sea un diagrama para que las composiciones $\pi_1 \circ h$ y $\pi_2 \circ h$ sean válidas.

**Prop 124.** *Esto permite una definición alternativa de producto:* $A \xleftarrow{\pi_1} A\times B \xrightarrow{\pi_2} B$ *es un producto entre* $A$ *y* $B$ *sii para todo objeto* $X$*,* $\nu_X$ *es una biyección entre* $Hom(X, A \times B)$ *en* $Hom(X, A) \times Hom(X, B)$*.*

En efecto, ya hemos comprobado que si el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre $A$ y $B$, $\nu_X$ es biyectiva. El recíproco se demuestra observando que la suryectividad de $\nu_X$ implica la existencia de la flecha de $X$ a $A \times B$ que hace conmutar el diagrama, mientras que la inyectividad de $\nu_X$ implica la unicidad de una tal flecha.

**Ejercicio 125.** *Comprobar que si $\nu_X$ es biyectiva para todo objeto $X$, entonces el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre $A$ y $B$.*

**Coproducto.** El principio de dualidad nos dice que hay una definición dual a la de producto:

**Definición 126.** *En una categoría* $\mathbf{C}$*, el diagrama*

$$A \xrightarrow{\iota_1} A + B \xleftarrow{\iota_2} B$$

*es un* ***coproducto de*** *los objetos $A$* ***y*** *$B$ si satisface la siguiente propiedad universal: para todo diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

*existe una única flecha $C \xrightarrow{[f,g]} X$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_1"] & A + B \arrow[u, "{[f,g]}" description] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

**Ejercicio 127.** *Demostrar que si el coproducto entre $A$ y $B$ existe, entonces es único salvo isomorfismo.*

**Ejercicio 128.** *¿Cuál es el coproducto en la categoría* **Set***?*

**Ejercicio 129.** *Sea $P$ un preorden visto como categoría. ¿Qué define el coproducto?*

**Ejercicio 130.** *¿Es el coproducto asociativo? ¿Cuál es su elemento neutro?*

**Ejercicio 131.** *¿Qué ecuaciones pueden deducirse utilizando los operadores $[\_\,,\_]$ y las flechas $\iota_1$ y $\iota_2$?*

**Ejercicio 132.** *Extender $\lambda\!\!\rightarrow$ con tipos, expresiones y ecuaciones para que tenga coproductos.*

**Ejercicio 133.** *¿Cuál es el coproducto en la categoría* **Rel***?*

**Ejercicio 134.** *¿Cuál es el coproducto en la categoría* **Pfn***?*

**Ejercicio 135.** *¿Cuál es el coproducto en la categoría* **Set****?*

**Ejercicio 136.** *A la luz de la proposición 124, ¿qué definición alternativa puede dar del coproducto entre dos objetos?*

(Sexta clase: mono, epi y ecualizadores)

La clase pasada demostramos (ejercicio 107) que $1 \times A \cong A$. En efecto, $1 \xleftarrow{!_A} A \xrightarrow{1_A} A$; y para todo $1 \xleftarrow{!_X} X \xrightarrow{g} A$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "!_X"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ 1 & A \arrow[l, "!_A"'] \arrow[r, "1_A"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta sii $h = g$: el triángulo izquierdo conmuta independientemente de $h$ (hay una única flecha de $X$ en 1, y el derecho conmuta sii $g = 1_A \circ h = h$.

Resolvamos el ejercicio 109 que pedía demostrar que $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$. Conocemos las siguientes flechas:

$$\begin{tikzcd} & & (A \times B) \times C \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & C \\ A & & B & \end{tikzcd}$$

de donde podemos concluir que $(A \times B) \times C \xrightarrow{<\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>} B \times C$. Con esta nueva flecha, obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & (A \times B) \times C \arrow[dl, "\pi_1 \circ \pi_1"'] \arrow[dr, "<\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>"] & \\ A & & B \times C \end{tikzcd}$$

de donde resulta $(A \times B) \times C \xrightarrow{<\pi_1 \circ \pi_1, <\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>>} A \times (B \times C)$. En forma análoga se obtiene $A \times (B \times C) \xrightarrow{<<\pi_1, \pi_1 \circ \pi_2>, \pi_2 \circ \pi_2>} (A \times B) \times C$.

Para comprobar que $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$, basta con asegurarse que las flechas $h = <\pi_1 \circ \pi_1, <\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>>$ y $h' = <<\pi_1, \pi_1 \circ \pi_2>, \pi_2 \circ \pi_2>$ son inversas mutuas:

$$
\begin{array}{rcl}
h \circ h' & = & <\pi_1 \circ \pi_1 \circ h', <\pi_2 \circ \pi_1 \circ h', \pi_2 \circ h'>> \\
& = & <\pi_1, <\pi_1 \circ \pi_2, \pi_2 \circ \pi_2>> \\
& = & <\pi_1, <\pi_1, \pi_2> \circ \pi_2> \\
& = & <\pi_1, 1_{B \times C} \circ \pi_2> \\
& = & <\pi_1, \pi_2> \\
& = & 1_{A \times (B \times C)} \\
h' \circ h & = & 1_{(A \times B) \times C}
\end{array}
$$

**Ejemplo 137.** *Definir la categoría* **Set**$*$*, (ver los apuntes de la clase pasada). Identificar objeto inicial y terminal (relacionar con ejercicio sobre ¿*$0 \times A \cong 0$*?), productos y coproductos.*

**Ejemplo 138.** *En* $\lambda\!\!\rightarrow$*, agregamos tipos para el coproducto*

$$A, B \;\; ::= \;\; \ldots \mid A + B \mid \ldots$$

*y los términos incluyen inyecciones y análisis por caso*

$$M, N \;\; ::= \;\; \ldots \mid \mathit{inl}(M) \mid \mathit{inr}(M) \mid \textbf{case } M \textbf{ of } (N, N') \mid \ldots$$

*Además de las ecuaciones enumeradas en el ejemplo 117, agregamos:*

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{case } \mathit{inl}(M) \textbf{ of } (N, N') & = & N\ M \\
\textbf{case } \mathit{inr}(M) \textbf{ of } (N, N') & = & N'\ M \\
\textbf{case } M \textbf{ of } (\lambda x.\ \mathit{inl}(x), \lambda y.\ \mathit{inr}(y)) & = & M
\end{array}
$$

*todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.*

Queda como ejercicio definir $\iota_1$, $\iota_2$ y $[M, N]$ para tener el coproducto en la categoría $\lambda\!\!\rightarrow$.

**Monos y epis.** Dada la función $f : A \to B$, se dice que

- $f$ es inyectiva, si para todo $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.
- $f$ es suryectiva, si para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

En términos categóricos, se generalizan estos conceptos, como es habitual sin apelar a los elementos de los conjuntos ya que estas son particularidades solo de las categorías concretas.

**Definición 139.** *En una categoría* **C***, dada una flecha* $A \xrightarrow{f} B$ *se dice que*

- $f$ *es* ***mono****,* ***monic*** *o* ***monomorfismo****, si para todo* $C \xrightarrow{g} A$ *y* $C \xrightarrow{h} A$*,* $f \circ g = f \circ h$ *implica que* $g = h$*,*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

- *$f$ es **epi**, **epic** o **epimorfismo**, si para todo $B \xrightarrow{g} C$ y $B \xrightarrow{h} C$, $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$.*

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$$

**Ejemplo 140.** *En la categoría* **Set**, *$f$ es mono sii $f$ es inyectiva, y $f$ es epi sii $f$ es suryectiva.*

**Ejemplo 141.** *En muchas categorías concretas (***Mon**, **Grp**, **Poset**, *etc.) la $f$ es mono sii $f$ es (un homomorfismo) inyectivo.*

**Ejemplo 142.** *En general, en esas categorías un epimorfismo no necesariamente es suryectivo. En* **Mon**, *por ejemplo, una flecha $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{g} (M, \cdot, e)$ queda unívocamente determinada por el valor de $g(1)$. En efecto, $g(0)$ debe ser $e$, si $k > 0$, $g(k) = g(\overbrace{1 + \ldots + 1}^{k}) = \overbrace{g(1) \cdot \ldots \cdot g(1)}^{k}$ y $e = g(0) = g(k + (-k)) = g(k) \cdot g(-k)$ y también $e = g(-k) \cdot g(k)$ de donde se obtiene que $g(-k)$ es el único inverso de $g(k)$ (sí, que $g$ sea homomorfismo de monoide implica que la imagen de $g$ es en realidad un grupo ya que $\mathbb{Z}$ lo es).*

*Se vió que $g(1)$ determina unívocamente todo $g$. Entonces si $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{h} (M, \cdot, e)$ satisface $g(1) = h(1)$, se obtiene $g = h$.*

*Ahora tomamos $(\mathbb{N}, +, 0) \xrightarrow{\iota} (\mathbb{Z}, +, 0)$ (donde $\iota$ es la inyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$), si $g \circ \iota = h \circ \iota$, entonces $g(1) = g(\iota(1)) = h(\iota(1)) = h(1)$, luego $g = h$. Sin embargo $\iota$ no es suryectiva.*

**Ejemplo 143.** *Si $A \xrightarrow{f} B$ es iso, entonces es mono y epi. En efecto, sea*

$$C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} B$$

*tal que $f \circ g = f \circ h$. Se deduce que $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$, luego $f$ es mono. Análogamente, sea*

$$A \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$$

*tal que $g \circ f = h \circ f$. Se deduce que $g = g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f \circ f^{-1} = h$, luego $f$ es epi.*

En **Set**, $f$ es iso sii es mono y epi. Pero tal equivalencia no vale en general:

**Ejercicio 144.** *Comprobar que la inversa del ejemplo anterior no vale: $f$ puede ser mono y epi, y sin embargo no ser iso.*

**Ecualizadores.**

**Definición 145.** *Dado un diagrama de la forma*

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

*en la categoría* **C**, *un* ***ecualizador*** *de $f$ y $g$ consiste de una flecha $E \xrightarrow{e} A$ universal tal que $f \circ e = g \circ e$. Es decir, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

*conmuta*[1], *y tal que para todo otro diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[ur, "x"] & & \end{tikzcd}$$

*que conmute, existe una única flecha $X \xrightarrow{u} E$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "x"'] & & \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

**Ejemplo 146.** *En* **Set**, *el ecualizador es $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ con la inyección $E \xrightarrow{\iota} A$ (definida por $\iota(a) = a$ para todo $a \in E$). En efecto, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

*conmuta ($(f \circ \iota)(a) = f(\iota(a)) = f(a) = g(a) = g(\iota(a)) = (g \circ \iota)(a)$), y si*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$$

*también conmuta, entonces $Im(h) \subseteq E$, ya que para todo $a \in Im(h)$, existe $x \in X$ tal que $a = h(x)$ y como $f \circ h = g \circ h$, $f(a) = f(h(x)) = (f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) =$*

[1] Cuando se afirma que un diagrama con flechas paralelas, como en este caso $f$ y $g$, conmuta, NO se afirma que $f = g$.

*$g(a)$. Luego, podemos definir $X \xrightarrow{u} E$ por $u(x) = h(x)$, claramente*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

*conmuta ($(\iota \circ u)(x) = \iota(u(x)) = u(x) = h(x)$). Es más, $u$ es única ya que se debe definir igual a $h$ para que el diagrama conmute.*

**Ejemplo 147.** *El ecualizador es mono. En efecto, sea*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

*un ecualizador entre $f$ y $g$, y sea*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & E \arrow[r, "e"] & A
\end{tikzcd}$$

*conmutativo. Denotamos $z = e \circ x = e \circ y$. Debemos comprobar que $x = y$. Combinamos los dos diagramas obteniendo*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
Z \arrow[u, shift left, "x"] \arrow[u, shift right, "y"'] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}$$

*cuya conmutatividad implica que $f \circ z = f \circ e \circ x = g \circ e \circ x = g \circ z$. Por ser $e$ ecualizador, existe una única flecha $Z \xrightarrow{u} E$ tal que $e \circ u = z$. Por lo tanto, las dos flechas que tenemos que lo satisfacen ($x$ e $y$) deben ser iguales. Luego, $x = y$.*

**Ejercicio 148.** *Dado un subconjunto $E \subseteq A$, determinar un conjunto $B$ y dos funciones $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ tales que $E \xrightarrow{\iota} A$ sea un ecualizador de $f$ y $g$.*

**Ejercicio 149.** *Comprobar que el ecualizador de dos flechas, si existe, es único salvo isomorfismo.*

**Ejercicio 150.** *Intente identificar ecualizadores en las categorías vistas (por ejemplo,* **Set**$*$, **Rel**, **Pfn**, *un preorden $P$ visto como categoría, etc.).*

(SÉPTIMA CLASE: COECUALIZADORES, PULLBACK, PUSHOUT)

**Coecualizadores.**

**Definición 151.** *Dado un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

*en la categoría* $\mathbf{C}$*, un* ***coecualizador*** *de $f$ y $g$ consiste de una flecha $B \xrightarrow{q} Q$ universal tal que $q \circ f = q \circ g$. Es decir, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$$

*conmuta, y tal que para todo otro diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[dr, "x"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

*que conmute, existe una única flecha $Q \xrightarrow{u} X$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "x"] & Q \arrow[d, "u"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

**Ejemplo 152.** *¿Qué es un coecualizador en* $\mathbf{Set}$*? Sean las funciones* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$*. Para que $q$ sea un coecualizador, debe cumplirse $q \circ f = q \circ g$. Es decir que para cada $a \in A$, $q(f(a)) = q(g(a))$ por más que $f(a) \neq g(a)$. Para definir $q$, nos preguntamos para cuáles $b, b' \in B$ debe ocurrir $q(b) = q(b')$. Claramente, si existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$ y $b' = g(a)$, necesitamos $q(b) = q(b')$. Podríamos tomar $q$ constante, eso garantiza que tales igualdades valen, pero la intención es igualar lo menos posible. Por más restrictivos que seamos al definir $q$, se puede observar que la relación $b \sim b'$ sii $q(b) = q(b')$ será una relación de equivalencia. Entonces, para igualar lo menos posible, definamos $\sim$ como la menor relación de equivalencia que incluye $f(a) \sim g(a)$ para todo $a \in A$. Tal relación de equivalencia puede definirse inductivamente a través de las* *siguientes reglas de inferencia:*

$$\frac{}{f(a) \sim g(a)} \qquad \frac{}{b \sim b}$$

$$\frac{b' \sim b}{b \sim b'} \qquad \frac{b \sim b' \quad b' \sim b''}{b \sim b''}$$

*Dado* $b \in B$*, se denota por* $[b] = \{b' \in B \mid b \sim b'\}$ *la clase de equivalencia de* $b$*. Sea* $Q = \{[b] \mid b \in B\}$ *el conjunto de clases de equivalencia, que es una partición de* $B$ *y se suele denotar* $Q = B/\sim$*. Se define* $B \xrightarrow{q} Q$ *por* $q(b) = [b]$*. Veamos que es un coecualizador de* $f$ *y* $g$*.*

*Si* $f(a) = g(a)$ *entonces* $f(a) \sim g(a)$ *y por lo tanto* $q(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = q(g(a))$ *y el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$$

*conmuta. Sea ahora*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[dr, "x"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

*que conmute. La conmutatividad de este diagrama, como antes para* $q$*, implica que* $x(f(a)) = x(g(a))$*. Razonando como hicimos para* $q$ *concluimos que necesariamente* $b \sim b'$ *implica* $x(b) = x(b')$*. Entonces, si definimos* $Q \xrightarrow{u} X$ *por* $u([b]) = x(b)$*, la función* $u$ *está bien definida y además* $x(b) = u([b]) = u(q(b))$ *obteniendo la conmutatividad del diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "x"] & Q \arrow[d, "u"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

**Ejercicio 153.** *Comprobar que si* $B \xrightarrow{q} Q$ *es un coecualizador, entonces* $q$ *es epi.*

**Ejercicio 154.** *Demostrar que el coecualizador, si existe, es único salvo isomorfismo.*

**Ejercicio 155.** *Intente identificar coecualizadores en las categorías vistas (por ejemplo,* **Set**$*$*,* **Rel***,* **Pfn***, un preorden* $P$ *visto como categoría, etc.).*

**Pullbacks.** Otra construcción importante en categorías es la de pullback

**Definición 156.** *Dadas dos flechas $f$ y $g$ con igual codominio en una categoría* $\mathbf{C}$*,*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

*un* ***pullback de*** $f$ ***y*** $g$ *consiste de dos flechas*

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

*tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

*conmuta y es universal con esta propiedad, es decir, para todo par de flechas*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & \\ & B \\ & A \end{tikzcd}$$

*tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
& & B \arrow[d, "g"'] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

*conmuta, existe una única flecha* $Z \xrightarrow{u} A \times_C B$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

*conmuta.*

Como se ve, la definición ocupa más de una página. Por brevedad se suele presentar directamente el diagrama que incluye todas las flechas involucradas:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"'] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Este diagrama se puede leer: "dadas las flechas $f$ y $g$, se dice que las flechas $p_1$ y $p_2$ forman un pullback de $f$ y $g$ si el cuadrado del diagrama conmuta (o sea, $f \circ p_1 = g \circ p_2$) y para todo par de flechas $z_1$ y $z_2$ tal que el rombo acostado del diagrama conmuta (o sea, $f \circ z_1 = g \circ z_2$) existe una única flecha $u$ tal que los dos triángulos conmutan (o sea, $z_1 = p_1 \circ u$ y $z_2 = p_2 \circ u$)."

Esta construcción es importante ya que se puede comprobar que una categoría tiene objeto terminal y todos los pullbacks sii tiene todos los ecualizadores y productos finitos. Objeto terminal, pullbacks, ecualizadores y productos son ejemplos particulares de construcciones más generales que reciben el nombre de **límites**. Se verá también que si una categoría tiene objeto terminal y pullbacks (o ecualizadores y productos finitos), entonces tiene todos los límites finitos, lo que pone de manifiesto la importancia de estas cuatro construcciones.

Exactamente lo mismo puede decirse para las construcciones duales: existencia de objeto inicial y **pushouts** (el dual de pullbacks, cuya definición se deja como ejercicio) equivale a la de los coproductos finitos y coecualizador. Y un resultado análogo al mencionado se obtiene para el concepto general: el de **colímite**.

**Ejercicio 157.** *Definir* ***pushout****, el concepto dual al de pullback.*

**Ejercicio 158.** *Identificar el pushout de la categoría* **Set**. *Ayuda: combinar el coecualizador y el coproducto de* **Set**.

Las definiciones de límite y colímite van a esperar por ahora. Antes de abordar la equivalencia entre la existencia de objeto terminal y pullbacks y la de productos finitos y ecualizadores, intentemos entender qué es un pullback en **Set**:

**Ejemplo 159.** *Consideramos la categoría* **Set**. *Salvo por la inclinación del diagrama, los pullbacks son muy parecidos a los productos. Están los objetos $A$ y $B$ y las flechas $p_1$ y $p_2$, en vez de las proyecciones $\pi_1$ y $\pi_2$. La novedad es la participación de las flechas $f$ y $g$ que no están en la definición del producto. En realidad, estas dos flechas nos recuerdan la definición de ecualizador, salvo que en aquel caso ambas flechas no solo compartían el codominio sino también el dominio. Justamente, para obtener flechas que compartan el dominio consideramos $f \circ p_1$ y $g \circ p_2$.*

*El pullback parece combinar de alguna manera productos y ecualizadores. Ensayamos definir*

$$\begin{array}{rcl} A \times_C B & = & \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \\ p_1((a,b)) & = & a \\ p_2((a,b)) & = & b \end{array}$$

*Con esto el cuadrado del diagrama conmuta. Sean $z_1$ y $z_2$ funciones que hacen que el rombo acostado conmute. Definimos $u(z) = (z_1(z), z_2(z))$. Claramente $Im(u) \subseteq A \times_C B$ ya que $f(z_1(z)) = g(z_2(z))$ porque $f \circ z_1 = g \circ z_2$. También resulta obvio que esta definición de $u$ hace que los triángulos conmuten.*

*Para ver unicidad de $u$, sea $Z \xrightarrow{u'} A \times_C B$ tal que los triángulos conmutan, sea $z \in Z$ y $(a,b) = u'(z)$. La conmutatividad de los triángulos implica que $a = p_1((a,b)) = p_1(u'(z)) = z_1(z)$ y también $b = z_2(z)$. Por lo tanto $u'(z) = (a,b) = (z_1(z), z_2(z)) = u(z)$.*

Esta construcción nos ayuda a intuir las propiedades de los pullbacks. Por ejemplo, cómo se puede construir productos a partir de los pullbacks. En **Set**, tenemos que $A \times_C B \subseteq A \times B$, ya que solo se admite un par $(a,b)$ si $f(a) = g(b)$. Para lograr que $A \times_C B = A \times B$ es necesario que todos los pares satisfagan ese criterio de admisión. Para ello, $f$ y $g$ deben ser funciones constantes (y deben devolver la misma constante).

Una forma de decirlo en general para cualquier categoría que tenga pullbacks y objeto terminal, es elgiendo $C = 1$ y tomando $f = !_A$ y $g = !_B$:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
& A \times_1 B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "!_B"'] \\
& A \arrow[r, "!_A"] & 1
\end{tikzcd}$$

En este diagrama, la conmutatividad del cuadrado es trivial, ya que hay una única flecha de $A \times_1 B$ en 1. Y lo mismo pasa con la del rombo acostado. La única parte del diagrama cuya conmutatividad resulta relevante, entonces, es la formada por los dos triángulos, que es exactamente igual a la del producto. Acabamos de comprobar que:

**Prop 160.** *Si una categoría tiene objeto terminal y pullbacks, entonces tiene productos finitos.*

Sea $\mathbf{C}$ una categoría con objeto terminal y pullbacks (y por lo tanto también productos finitos) podemos comprobar que también tiene ecualizadores. Sean $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$, que podemos también escribir $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} B$, entonces $A \xrightarrow{<f,g>} B \times B$. También tenemos $B \xleftarrow{1_B} B \xrightarrow{1_B} B$, entonces $B \xrightarrow{<1_B, 1_B>} B \times B$. Se puede graficar así:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "<1_B, 1_B>"] \\
A \arrow[r, "<f,g>"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Veremos que existe $h$ tal que

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \\
A &
\end{tikzcd}$$

es un pullback de $<f, g>$ y $<1_B, 1_B>$ sii $e$ es un ecualizador de $f$ y $g$.

Sea $e$ y $h$ un pullback de $<f, g>$ y $<1_B, 1_B>$. Eso implica que $<f \circ e, g \circ e> = <f, g> \circ e = <1_B, 1_B> \circ h = <1_B \circ h, 1_B \circ h> = <h, h>$, y luego, $f \circ e = h = g \circ e$, por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[ur, "x"] & & \end{tikzcd}$$

que también conmuta. Entonces, también conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, "f \circ x"] \arrow[ddr, "x"'] & & \\ & & B \arrow[d, "<1_B, 1_B>"] \\ & A \arrow[r, "<f,g>"] & B \times B \end{tikzcd}$$

En efecto, $<f,g> \circ x = <f \circ x, g \circ x> = <f \circ x, f \circ x> = <1_B \circ f \circ x, 1_B \circ f \circ x> = <1_B, 1_B> \circ f \circ x$. Como $e$ y $h$ conforman un pullback de $<f,g>$ y $<1_B, 1_B>$, existe una única flecha $X \xrightarrow{u} E$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "f \circ x"] \arrow[ddr, "x"'] & & \\ & E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, tenemos que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \\ X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, luego $e$ es un ecualizador.

Ahora el recíproco. Sea $E \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ un ecualizador, comprobaremos que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

es un pullback de

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "<1_B, 1_B>"] \\ A \arrow[r, "<f, g>"] & B \times B \end{tikzcd}$$

tomando $h = f \circ e$. Para ello, primero comprobamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "<1_B, 1_B>"] \\ A \arrow[r, "<f, g>"] & B \times B \end{tikzcd}$$

conmuta. Efectivamente, $<f,g>\circ e = <f \circ e, g \circ e> = <f \circ e, f \circ e> = <1_B \circ f \circ e, 1_B \circ f \circ e> = <1_B, 1_B> \circ f \circ e = <1_B, 1_B> \circ h$. Sea ahora

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
 & & B \arrow[d, "<1_B, 1_B>"] \\
 & A \arrow[r, "<f,g>"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

que conmuta, es decir, tal que $<f \circ z_1, g \circ z_1> = <f,g> \circ z_1 = <1_B, 1_B> \circ z_2 = <1_B \circ z_2, 1_B \circ z_2> = <z_2, z_2>$, de donde se obtiene que $f \circ z_1 = z_2 = g \circ z_1$, que implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
Z \arrow[ur, "z_1"] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por ser $e$ un ecualizador, existe una única $Z \xrightarrow{u} E$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \\
Z \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "z_1"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sólo resta comprobar que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
 & E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"] & B \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

también conmuta. El triángulo inferior es exactamente el diagrama anterior, que conmuta. El triángulo superior se ve que conmuta porque recordando que $h = f \circ e$, se tiene $h \circ u = f \circ e \circ u = f \circ z_1 = z_2$. Con esto demostramos que

**Prop 161.** *Si una categoría tiene objeto terminal y pullbacks, entonces tiene ecualizadores.*

Por último, demostramos que

**Prop 162.** *Si una categoría tiene ecualizadores y productos finitos, entonces tiene pullbacks.*

Sea una categoría **C**, con ecualizadores y productos finitos. Queremos encontrar el pullback de

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Contamos con la existencia del producto $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$, de donde se obtienen dos flechas paralelas $A \times B \overset{f \circ \pi_1}{\underset{g \circ \pi_2}{\rightrightarrows}} C$. Sea $e$ el ecualizador de $f \circ \pi_1$ y $g \circ \pi_2$, se tiene que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C \end{tikzcd}$$

conmuta, de donde se obtiene la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_2 \circ e"] \arrow[d, "\pi_1 \circ e"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Resta demostrar que $\pi_1 \circ e$ y $\pi_2 \circ e$ son un pullback de $f$ y $g$.

**Ejercicio 163.** *Demostrar que que $\pi_1 \circ e$ y $\pi_2 \circ e$ son un pullback de $f$ y $g$.*

**Ejercicio 164.** *Identificar pullbacks en alguna de las categorías vistas (ej:* **Set**$*$*,* **Rel***, etc.).*

**Categorías de diagramas.** A continuación, un ejemplo de construcción de una categoría a partir de otra. Dada una categoría $\mathbf{C}$, se construye otra en la que los objetos son diagramas de $\mathbf{C}$.

**Ejemplo 165.** *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *y dos objetos* $A$ *y* $B$*, se puede formar la categoría* $\mathbf{C}/AB$ *cuyos objetos son diagramas de la forma*

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

*Una flecha* $h \in \mathbf{C}/AB$ *entre dos objetos (diagramas)*

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & & {} \arrow[r, "h"] & {} & & C' \arrow[dl, "a'"'] \arrow[dr, "b'"] & \\
A & & B & & & A & & B
\end{tikzcd}
$$

*es una flecha* $C \xrightarrow{h} C'$ *de la categoría original* $\mathbf{C}$ *tal que el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "b"] & \\
A & C' \arrow[l, "a'"'] \arrow[r, "b'"] & B
\end{tikzcd}
$$

*de la categoría original* $\mathbf{C}$ *conmuta.*

Formalmente, podríamos definir $\mathbf{C}/AB$ como sigue:

- $(\mathbf{C}/AB)_0 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{C}_1 \wedge dom(a) = dom(b) \wedge cod(a) = A \wedge cod(b) = B\}$,
- $\mathbf{C}/AB((a, b), (a', b')) = \{h \in \mathbf{C}(dom(a), dom(a')) \mid a = a' \circ h \wedge b = b' \circ h\}$,
- la composición de $\mathbf{C}/AB$ es la de $\mathbf{C}$,
- la identidad de $\mathbf{C}/AB$ es la de $\mathbf{C}$.

**Ejercicio 166.** *Comprobar que para toda categoría* $\mathbf{C}$ *y todo par de objetos* $A$ *y* $B$ *de* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{C}/AB$ *es una categoría.*

Un objeto terminal de la categoría $\mathbf{C}/AB$ es un objeto (diagrama de $\mathbf{C}$)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

tal que para todo otro objeto (diagrama de $\mathbf{C}$)

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "a'"'] \arrow[dr, "b'"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $h$ de este último objeto en el anterior. En términos de la categoría $\mathbf{C}$, una única flecha $h$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "a'"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "b'"] & \\ A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

es un objeto terminal de $\mathbf{C}/AB$ sii dicho diagrama es el producto (en $\mathbf{C}$) de $A$ y $B$.

**Ejemplo 167.** *Se puede definir un funtor* $\mathbf{C}/AB \xrightarrow{\mathbf{dom}} \mathbf{C}$ *por*

- $\mathbf{dom}_0((a, b)) = dom(a)$ *(que es igual a* $dom(b)$*), y*
- $\mathbf{dom}_1(h) = h$

**Ejercicio 168.** *Demostrar que* **dom** *es un funtor.*

**Categorías de flechas.** A continuación algunos ejemplos de categorías donde los objetos son flechas de una categoría dada $\mathbf{C}$.

**Definición 169.** *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *y un objeto* $C \in \mathbf{C}_0$*, se define la* ***categoría slice*** *de* $\mathbf{C}$ ***sobre*** $C$, $\mathbf{C}/C$ *cuyos objetos son flechas que tienen como codominio al objeto* $C$*. Más precisamente,*

- $(\mathbf{C}/C)_0 = \{f \in \mathbf{C}_1 | cod(f) = C\}$.

- *Sean $f$ y $f'$ objetos de esta categoría (es decir, $X \xrightarrow{f} C$ y $X' \xrightarrow{f'} C$ están en $\mathbf{C}$). Entonces, $g$ es una flecha de $f$ a $f'$ en la categoría $\mathbf{C}/C$ si $X \xrightarrow{g} X'$ y $f = f' \circ g$, es decir, si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Es decir, los objetos de $\mathbf{C}/C$ son flechas $f$ de $\mathbf{C}$ de la pinta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ C \end{tikzcd}$$

y las flechas $g$ de $\mathbf{C}/C$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{g}"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ C & C \end{tikzcd}$$

son también flechas $X \xrightarrow{g} X'$ de $\mathbf{C}$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

de $\mathbf{C}$ conmuta.

**Ejercicio 170.** *Comprobar que $\mathbf{C}/C$ es una categoría, definiendo composición e identidad adecuadamente.*

**Ejercicio 171.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con objeto terminal. ¿Qué puede decir de $\mathbf{C}/1$?*

**Ejercicio 172.** *¿Cuál es el objeto teminal de la categoría $\mathbf{C}/C$?*

**Ejercicio 173.** *Demostrar que los productos de la categoría $\mathbf{C}/C$ son pullbacks de la categoría $\mathbf{C}$.*

**Ejemplo 174.** *Sea $P$ un poset visto como categoría y sea $p \in P$. Entonces, $P/p \cong \downarrow(p)$, donde $\downarrow(p)$ es el ideal principal $\downarrow(p) = \{q \in P \mid q \leq p\}$.*

**Ejercicio 175.** *Definir análogamente la* ***categoría coslice*** *de* $\mathbf{C}$ ***bajo*** $C$*,* $C/\mathbf{C}$ *donde los objetos ahora son flechas* $C \xrightarrow{f} X$*, y una flecha de* $f$ *en* $f'$ *debe satisfacer* $h \circ f = f'$*.*

**Ejercicio 176.** *Otra alternativa es definir la categoría coslice* $C/\mathbf{C}$ *utilizando la categoría slice* $\mathbf{C}/C$ *y el operador de categoría opuesta.*

**Ejercicio 177.** *Demostrar que* $1/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}*$*.*

**Ejemplo 178.** *Se puede definir un funtor* $\mathbf{C}/C \xrightarrow{\mathbf{dom}} \mathbf{C}$ *por*

- $\mathbf{dom}_0(f) = dom(f)$*, y*
- $\mathbf{dom}_1(g) = g$

**Ejemplo 179.** *Se puede definir un funtor* $C/\mathbf{C} \xrightarrow{\mathbf{cod}} \mathbf{C}$ *por*

- $\mathbf{cod}_0(f) = cod(f)$*, y*
- $\mathbf{cod}_1(g) = g$

**Ejercicio 180.** *Comprobar que* **dom** *y* **cod** *son funtores.*

**Definición 181.** *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *se define la* ***categoría flecha*** $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ *cuyos objetos son flechas de* $\mathbf{C}$*. Más precisamente,*

- $(\mathbf{C}^{\rightarrow})_0 = \mathbf{C}_1$.
- $\mathbf{C}^{\rightarrow}(f, f') = \{(g, g') \mid dom(f) \xrightarrow{g} dom(f') \wedge cod(f) \xrightarrow{g'} cod(f') \wedge f' \circ g = g' \circ f\}$.
  *Es decir,* $f \xrightarrow{(g,g')} f'$ *sii el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, "g'"'] & B' \end{tikzcd}$$

  *de* $\mathbf{C}$ *conmuta.*

**Ejercicio 182.** *Comprobar que* $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ *es una categoría.*

**Ejercicio 183.** *Definir los funtores* $\mathbf{C} \xleftarrow{\mathbf{dom}} \mathbf{C}^{\rightarrow} \xrightarrow{\mathbf{cod}} \mathbf{C}$*.*

**Ejercicio 184.** *Es esto un diagrama producto?*

**Funtores.** En su momento definimos funtores y vimos algunos ejemplos, principalmente el funtor de olvido y los únicos funtores que convierten a la categoría $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ en objetos inicial y terminal de la categoría $\mathbf{Cat}$. También se mencionó que el producto cartesiano de categorías satisface la definición de producto definida categóricamente, dando lugar a los funtores $\pi_1$ y $\pi_2$ de la categoría $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ en $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ respectivamente, y por supuesto el funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{<F,G>} \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ asociado a los funtores $\mathbf{X} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ y $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}$.

Para algunas categorías de flechas (o diagramas), acabamos de dar algunos ejemplos de funtores que llamamos **dom** y **cod**.

A continuación veremos otros ejemplos de funtores.

**Ejemplo 185.** *Dada una categoría localmente pequeña* $\mathbf{C}$*, y un objeto* $A \in \mathbf{C}$*, se define el* ***funtor representable*** *(covariante)* $\mathbf{C} \xrightarrow{Hom(A,\_)} \mathbf{Set}$ *de la siguiente manera:*

- *dado un objeto* $B \in \mathbf{C}$*,* $Hom(A, B) = \{f \in \mathbf{C} \mid A \xrightarrow{f} B\}$
- *dada una flecha* $B \xrightarrow{g} B'$*,* $Hom(A, g) = f \mapsto g \circ f$*. Así,* $Hom(A, g)$ *es una funcíon que toma una flecha* $f \in Hom(A, B)$ *y devuelve* $g \circ f \in Hom(A, B')$*.*

Como $Hom(A, g)$ es una función del conjunto $Hom(A, B)$ en el conjunto $Hom(A, B')$, a veces resulta conveniente escribir $Hom(A, g)(f) = g \circ f$ en vez de su equivalente $Hom(A, g) = f \mapsto g \circ f$. Se puede comprobar que $Hom(A, \_)$ es un funtor:

- Sean $B \xrightarrow{g} B'$ y $B' \xrightarrow{g'} B''$, $Hom(A, g' \circ g)(f) = g' \circ g \circ f = g' \circ Hom(A, g)(f) = Hom(A, g')(Hom(A, g)(f)) = (Hom(A, g') \circ Hom(A, g))(f)$, donde la última composición $\circ$ es la composición de funciones. Esto demuestra que se satisface la propiedad $Hom(A, g' \circ g) = Hom(A, g') \circ Hom(A, g)$.
- $Hom(A, 1_B) = f \mapsto 1_B \circ f = f \mapsto f = 1_{Hom(A,B)}$.

**Ejemplo 186.** *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *con productos, se define un funtor* $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \xrightarrow{\times} \mathbf{C}$ *de la siguiente manera:*

- *dado un objeto* $(A, B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$*,* $\times((A, B)) = A \times B$
- *dada una flecha* $(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (A', B') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *(o sea,* $A \xrightarrow{f} A'$ *y* $B \xrightarrow{g} B' \in \mathbf{C}$*),* $\times((A, B)) \xrightarrow{\times((f,g))} \times((A', B'))$*. Éste es exactamente el diagrama que habíamos denotado* $A \times B \xrightarrow{f \times g} A' \times B'$*.*

Observar que se asume acá que se ha elegido un diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ para cada par de objetos $A$ y $B$ y en base a dicha elección se define el funtor $\times$.

**Ejercicio 187.** *Comprobar que si* $\mathbf{C}$ *tiene productos,* $\times$ *es un funtor.*

**Ejercicio (posgrado) 188.** *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría, y el siguiente un diagrama en* $\mathbf{C}$*,*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"'] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

*Entonces, si*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[d, "h'"'] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"'] \\
B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

*son pullbacks, entonces*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g' \circ f'"] \arrow[d, "h''"'] & D \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g \circ f"] & C \end{tikzcd}$$

*también lo es.*

*Recíprocamente, si*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g' \circ f'"] \arrow[d, "h''"'] & D \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g \circ f"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

*son pullbacks, entonces*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[d, "h'"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

*también lo es.*

**Ejercicio (posgrado) 189.** *Sea* **C** *una categoría con el siguiente triángulo conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ & B \arrow[dl, "\beta"] \\ C & \end{tikzcd}$$

*Entonces, si*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\alpha"'] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B' \arrow[r, "h_\beta"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"'] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

*son pullbacks, entonces, hay una única flecha* $A' \xrightarrow{\gamma'} B'$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, "\gamma'"] \arrow[dd, "\alpha'"'] & & A \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\alpha"' near start] & \\ & B' \arrow[rr, "h_\beta"' near start] \arrow[dl, "\beta'"] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ C' \arrow[rr, "h"'] & & C & \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

**Prop 190.** *Pullback es un funtor. Sea* $C' \xrightarrow{h} C$ *en una categoría* $\mathbf{C}$ *con pullbacks, entonces hay un funtor* $\mathbf{C}/C \xrightarrow{h*} \mathbf{C}/C'$ *que lleva el objeto (de* $\mathbf{C}/C$*)* $A \xrightarrow{\alpha} C$ *en el objeto (de* $\mathbf{C}/C'$*)* $C' \times_C A \xrightarrow{\alpha'} C'$ *donde* $\alpha'$ *es la paralela a* $\alpha$ *en el pullback entre* $\alpha$ *y* $h$*. El efecto de* $h*$ *sobre una flecha (de* $\mathbf{C}/C$*)* $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$ *está dada por el ejercicio 189.*

En la proposición, la flecha $h$ está fija. Dado el objeto $\alpha$, para obtener $h*(\alpha)$ se usa que $\mathbf{C}$ tiene pullbacks, en particular el de $h$ y $\alpha$:

$$\begin{tikzcd} C' \times_C A \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\alpha"'] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

de donde $h*(\alpha) = \alpha'$ es el efecto de $h*$ en objetos de $\mathbf{C}/C$.

Dada una flecha $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$ de $\mathbf{C}/C$, podemos formar el pullback de $\alpha$ y el de $\beta$ obteniendo un diagrama como el del ejercicio 189, la existencia y unicidad de $\gamma'$ nos permite tomar $h*(\gamma) = \gamma'$ como el efecto de $h*$ en las flechas.

**Ejercicio (posgrado) 191.** *Comprobar que* $h*$ *es un funtor.*

(Novena clase: Límites y colímites)

Las definiciones de objeto terminal, producto binario, ecualizador y pullback, son casos particulares de un concepto general, llamado límite, que presentaremos a continuación. Además, la equivalencia demostrada de que una categoría tiene objeto terminal y pullbacks sii tiene productos finitos y ecualizadores puede completarse con una tercera propiedad equivalente a las dos anteriores: la de tener todos los límites finitos.

Lo mismo puede decirse en el mundo dual: una categoría tiene objeto inicial y pushouts sii tiene coproductos finitos y coecualizadores sii tiene todos los colímites finitos.

Además el resultado puede generalizarse más allá de lo finito, si se consideran límites, productos y ecualizadores de igual cardinalidad.

**Diagrama, cono y límite, intuitivamente.** Para definir límite, se definen previamente los conceptos de diagrama y cono.

Por ejemplo, en el caso del producto de $A$ y $B$ en una categoría $\mathbf{C}$, el diagrama será

$$A \qquad\qquad B$$

y los conos serán todos los diagramas (acá usamos la palabra en el sentido habitual, no en el que acabamos de definir) de la forma

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$$

que conmutan (en este caso la conmutatividad no significa nada). Como vimos la clase pasada al considerar la categoría $\mathbf{C}/AB$, los conos forman una categoría y el límite u objeto terminal de dicha categoría (si existe) es el producto entre $A$ y $B$.

En el caso del pullback entre $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$ en una categoría $\mathbf{C}$, el diagrama será

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

y los conos serán todos los diagramas (en el sentido habitual de la palabra) de la forma

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

que conmutan. Tal como se hizo en el caso del producto, estos conos forman una categoría y el límite u objeto terminal de dicha categoría (si existe) es el pullback entre $f$ y $g$.

**Ejercicio 192.** *Identificar diagrama, cono y límite para el caso del ecualizador.*

**Diagrama, cono y límite, formalmente.**

**Definición 193.** *Dadas dos categorías* $\mathbf{J}$ *y* $\mathbf{C}$*, un* ***diagrama de tipo*** $\mathbf{J}$ *en* $\mathbf{C}$ *es un funtor*

$$\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$$

**Ejemplo 194.** *En el caso del producto, la categoría* $\mathbf{J}$ *consiste de dos objetos (llamemosle* $i$ *y* $j$*) y ninguna flecha (salvo las identidades). El funtor* $D$ *se define por* $D(i) = A$ *y* $D(j) = B$ *(además de definirse de manera obvia para las identidades). Esto define el diagrama que se consideró más arriba.*

**Ejemplo 195.** *En el caso del pullback, la categoría* $\mathbf{J}$ *consiste de tres objetos y dos flechas (además de las identidades):*

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[d, "\beta"'] \\ i \arrow[r, "\alpha"] & k \end{tikzcd}$$

*El funtor* $D$ *se define por* $D(i \xrightarrow{\alpha} k) = A \xrightarrow{f} C$ *y* $D(j \xrightarrow{\beta} k) = B \xrightarrow{g} C$.

**Ejercicio 196.** *Definir una categoría* $\mathbf{J}$ *y un funtor* $D$ *adecuados para el diagrama correspondiente a ecualizadores.*

**Definición 197.** *Dado un diagrama* $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ *de tipo* $\mathbf{J}$*, un* ***cono*** *al diagrama* $D$ *consiste de un objeto* $C$ *de la categoría* $\mathbf{C}$ *y una familia de flechas en* $\mathbf{C}$*, una para cada objeto del diagrama* $D$*,*

$$C \xrightarrow{c_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

*tal que todos los triángulos formados por estas flechas con las del diagrama* $D$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c_j"] \arrow[d, "c_i"'] & D(j) \\ D(i) \arrow[ur, "D(\alpha)"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad i \xrightarrow{\alpha} j \quad \in \quad \mathbf{J}_1$$

*conmutan.*

**Ejemplo 198.** *En el caso del producto, los conos consisten de un objeto* $C$ *y un par de flechas (una familia de dos flechas), una* $C \xrightarrow{f} A$ *(o sea* $C \xrightarrow{c_i} D(i)$*) y otra* $C \xrightarrow{g} B$ *(o sea* $C \xrightarrow{c_j} D(j)$*). En este caso no hay flechas en el diagrama* $D$ *por lo que no hay triángulos que deban conmutar. Un cono, entonces tiene la forma* $A \xleftarrow{c_i} C \xrightarrow{c_j} B$.

En realidad, para ser exactos, sí hay flechas en el diagrama $D$: las identidades $1_{D(i)} = 1_A$ y $1_{D(j)} = 1_B$, pero los triángulos correspondientes conmutan trivialmente:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "c_i"] \arrow[d, "c_i"'] & D(i) \\
D(i) \arrow[ur, "1_{D(i)}"'] &
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad de estos triángulos vale trivialmente en todo cono, por eso solo se considerarán los casos correspondientes a flechas de $D$ que no son identidades.

**Ejemplo 199.** *En el caso del pullback, los conos consisten de un objeto $D$ y (una familia de) tres flechas: $D \xrightarrow{c_i} A$, $D \xrightarrow{c_j} B$ y $D \xrightarrow{c_k} C$ tales que los triángulos*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "c_i"'] & C \\
A \arrow[ur, "D(\alpha)"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "c_j"'] & C \\
B \arrow[ur, "D(\beta)"'] &
\end{tikzcd}$$

*conmuten. Del primero se deduce que $c_k$ queda unívocamente determinado por $c_i$ y del segundo, por $c_j$. En realidad, esto solo es posible si $D(\alpha) \circ c_i = D(\beta) \circ c_j$. Se observa que la conmutatividad de los triángulos equivale a la del diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "c_j"] \arrow[d, "c_i"'] \arrow[dr, "c_k"] & B \arrow[d, "D(\beta)"] \\
A \arrow[r, "D(\alpha)"] & C
\end{tikzcd}$$

*donde $c_k$ sigue estando determinado por $c_i$ (o por $c_j$) y por ello se omite en la definición habitual de pullback.*

**Ejercicio 200.** *¿Cuáles son los conos correspondientes a la definición de ecualizador?*

**Ejercicio 201.** *Dado un diagrama $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$, comprobar que la collección de conos a $D$ forman una categoría $\mathbf{Cone}(D)$, donde una flecha $h$ del cono*

$$C \xrightarrow{c_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

*al cono*

$$C' \xrightarrow{c'_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

*es una flecha* $C \xrightarrow{h} C'$ *tal que para todo* $j \in \mathbf{J}_0$ *el triángulo*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

**Definición 202.** *Un **límite** para el diagrama* $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ *es un objeto terminal de la categoría* $\mathbf{Cone}(D)$*. Un **límite** se dice **finito** cuando la categoría* $\mathbf{J}$ *es finita.*

El límite (si existe) es un objeto en la categoría $\mathbf{Cone}(D)$, es decir, es un cono: un objeto de $\mathbf{C}$ y una familia de flechas. Es habitual escribir el objeto de $\mathbf{C}$ en cuestión como

$$\varprojlim_j D(j)$$

y también como $\varprojlim_j D(j)$, y las flechas del cono como

$$\varprojlim_j D(j) \xrightarrow{p_i} D(i)$$

para cada $i \in \mathbf{J}_0$.

**Ejemplo 203.** *En el caso del producto, la categoría* $\mathbf{Cone}(D)$ *tiene por objetos a los conos ya mencionados, y por flechas entre el cono* $A \xleftarrow{c_i} C \xrightarrow{c_j} B$ *y el cono* $A \xleftarrow{c'_i} C' \xrightarrow{c'_j} B$*, a las flechas* $C \xrightarrow{h} C'$ *tal que los triángulos*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_i"'] & C' \arrow[d, "c'_i"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & B \end{tikzcd}$$

*conmutan, lo que equivale a que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "c_j"] & \\ A & C' \arrow[l, "c'_i"'] \arrow[r, "c'_j"] & B \end{tikzcd}$$

*conmute. Sobre el* $\varprojlim_j D(j)$*, debe ser el objeto terminal de esta categoría. Es decir, debe ser un cono* $A \xleftarrow{p_i} \varprojlim_j D(j) \xrightarrow{p_j} B$ *de* $\mathbf{Cone}(D)$ *tal que para todo cono*

$A \xleftarrow{c_i} C \xrightarrow{c_j} B$ *de* **Cone**$(D)$*, exista una única* $C \xrightarrow{h} \varprojlim_j D(j)$ *tal que*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "c_j"] & \\
A & \varprojlim_j D(j) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "p_j"] & B
\end{tikzcd}$$

*conmuta. Es decir, coincide exactamente con la definición de producto.*

**Ejercicio 204.** *Hacer explícita la categoría* **Cone**$(D)$ *para el pullback, comprobar que el objeto* $\varprojlim_j D(j)$ *es el pullback.*

**Ejercicio 205.** *Hacer explícita la categoría* **Cone**$(D)$ *para el ecualizador, comprobar que el objeto* $\varprojlim_j D(j)$ *es el ecualizador.*

**Ejercicio 206.** *¿Cuál sería* $\mathbf{J}$ *y* $D$*, cuáles los conos, cuál la categoría* **Cone**$(D)$ *para obtener que el objeto terminal de la categoría* $C$ *sea* $\varprojlim_j D(j)$*?*

**Equivalencia con pullbacks y objeto terminal.** Como adelantamos, es posible agregar a la equivalencia entre tener objeto terminal y pullbacks, por un lado, y tener productos finitos y ecualizadores, por el otro, una más: la de tener todos los límites finitos.

**Prop 207.** *Una categoría* $\mathbf{C}$ *tiene todos los límites finitos sii tiene los productos finitos y ecualizadores (sii tiene objeto terminal y pullbacks).*

Ya hemos demostrado (en los ejemplos precedentes) que productos finitos y ecualizadores son casos particulares de límites. Resta demostrar el recíproco: asumimos que $\mathbf{C}$ tiene productos finitos y ecualizadores y, con ello, comprobaremos que también tiene los demás límites finitos.

Para demostrarlo usamos la definición de producto generalizado, que como su nombre lo indica es una generalización sencilla de la de producto binario. Dada una categoría $\mathbf{C}$, y dada una familia de objetos $A_i \in \mathbf{C}_0$ para $i$ en un conjunto arbitrario $I$, el producto de la familia de objetos es un objeto junto con una familia de flechas (proyecciones):

$$\prod_{i \in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j \qquad\qquad j \in I$$

tal que para todo otro objeto que venga equipado también con igual número de flechas

$$C \xrightarrow{f_j} A_j \qquad\qquad j \in I$$

exista una única flecha

$$C \xrightarrow{<f_i|i \in I>} \prod_{i \in I} A_i$$

tal que los triángulos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "<f_i|i\in I>"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \end{tikzcd}$$

conmuten para todo $j \in I$.

Luce diferente porque en vez de tener dos objetos, dos flechas, y finalmente dos triángulos, como la definición de producto binario, tiene un objeto, una flecha y finalmente un triángulo para cada $j \in I$.

Si $I$ es finito, este producto es isomorfo al que se obtiene iterando el producto binario un número suficiente de veces.

Ahora sí, retomamos la prueba de la Proposición. Sea $\mathbf{J}$ una categoría finita y $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ un diagrama. Sean

$$\prod_{i\in\mathbf{J}_0} D(i) \qquad\qquad \prod_{\alpha\in\mathbf{J}_1} D(cod(\alpha))$$

los productos finitos indicados. Son finitos porque están indexados por $\mathbf{J}_0$ en el primer caso, y $\mathbf{J}_1$ en el segundo, y ambos índices son finitos. En el primer caso los índices son objetos de $\mathbf{J}$ y por eso las proyecciones resultarán indexadas por objetos.

(1) $$\prod_{i\in\mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{\pi_j} D(j) \qquad j \in \mathbf{J}_0$$

En el segundo caso, los índices son flechas de $\mathbf{J}$, por eso las proyecciones resultarán indexadas por flechas:

$$\prod_{\alpha\in\mathbf{J}_1} D(cod(\alpha)) \xrightarrow{\pi_\beta} D(cod(\beta)) \qquad \beta \in \mathbf{J}_1$$

Los objetos que participan del producto son esencialmente los mismos: $D(i)$ para $i \in \mathbf{J}_0$. La diferencia es el número de veces que participan del producto. En el primer producto, participan una vez cada uno, mientras que en el segundo puede ser cero o más veces dependiendo de cuántas veces aparezca $i$ en el codominio de una flecha de $\mathbf{J}_1$.

A continuación se definen dos flechas entre estos productos

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in\mathbf{J}_0} D(i) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{\alpha\in\mathbf{J}_1} D(cod(\alpha)) \end{tikzcd}$$

Para definir cada una de ellas usamos la propiedad universal: para cada $\alpha \in \mathbf{J}_1$ debemos determinar una flecha

$$\prod_{i\in\mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{f_\alpha} D(cod(\alpha))$$

La ecuación (1) indica que podemos tomar $f_\alpha = \pi_{cod(\alpha)}$ para cada $\alpha \in \mathbf{J}_1$. Por definición del producto obtenemos una única $\phi =< \pi_{cod(\alpha)} | \alpha \in \mathbf{J}_1 >$ tal que para todo $\alpha \in \mathbf{J}_1$, $\pi_\alpha \circ \phi = \pi_{cod(\alpha)}$.

Para definir la flecha $\psi$ también debemos proporcionar para cada $\alpha \in \mathbf{J}_1$ una flecha

$$\prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{f_\alpha} D(cod(\alpha))$$

Esta vez combinamos la ecuación (1) que no dice que

$$\prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{\pi_{dom(\alpha)}} D(dom(\alpha))$$

con el hecho de que $D(dom(\alpha)) \xrightarrow{D(\alpha)} D(cod(\alpha))$ por ser $D$ funtor, lo que nos permite tomar $f_\alpha = D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)}$. Nuevamente por definición del producto obtenemos una única $\psi =< D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)} | \alpha \in \mathbf{J}_1 >$ tal que para todo $\alpha \in \mathbf{J}_1$, $\pi_\alpha \circ \psi = D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)}$.

Definidas las dos flechas $\phi$ y $\psi$ definimos su ecualizador

$$E \xrightarrow{e} \prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha \in \mathbf{J}_1} D(cod(\alpha))$$

Se puede demostrar que el ecualizador es $\varprojlim_j D(j)$. Para ello, primero construimos el cono definiendo una flecha $e_j$ desde $E$ a cada $D(j)$:

$$E \xrightarrow{e} \prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{\pi_j} D(j)$$

Tomamos $e_j = \pi_j \circ e$.

Veamos que es un cono: si $i \xrightarrow{\alpha} j$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e_j"] \arrow[d, "e_i"'] & D(j) \\ D(i) \arrow[ur, "D(\alpha)"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto,

$$\begin{array}{rcll} D(\alpha) \circ e_i & = & D(\alpha) \circ \pi_i \circ e & \text{por def de } e_i \\ & = & D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)} \circ e & \text{por } i = dom(\alpha) \\ & = & \pi_\alpha \circ \psi \circ e & \text{por prop de } \psi \\ & = & \pi_\alpha \circ \phi \circ e & \text{por } e \text{ ecualizador} \\ & = & \pi_{cod(\alpha)} \circ e & \text{por prop de } \phi \\ & = & \pi_j \circ e & \text{por } j = cod(\alpha) \\ & = & e_j & \text{por def de } e_j \end{array}$$

Ahora sea $C$ con $C \xrightarrow{c_i} D(i)$ para cada $i \in \mathbf{J}_0$. Por definición de producto, existe una única flecha $c =< c_i | i \in \mathbf{J}_0 >$ de $C$ en $\prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i)$ tal que para todo $i \in \mathbf{J}_0$, $c_i = \pi_i \circ c$.

Igual que recién, podemos calcular

$$\begin{aligned} D(\alpha) \circ c_i &= D(\alpha) \circ \pi_i \circ c \\ &= D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)} \circ c \\ &= \pi_\alpha \circ \psi \circ c \\ c_j &= \pi_j \circ c \\ &= \pi_{cod(\alpha)} \circ c \\ &= \pi_\alpha \circ \phi \circ c \end{aligned}$$

Como $C$ con $C \xrightarrow{c_i} D(i)$ para cada $i \in \mathbf{J}_0$ es un cono sii $D(\alpha) \circ c_i = c_j$ para todo $i \xrightarrow{\alpha} j \in \mathbf{J}_1$, ser un cono equivale a que se satisfaga $\pi_\alpha \circ \psi \circ c = \pi_\alpha \circ \phi \circ c$ para todo $\alpha \in \mathbf{J}_1$, o más brevemente, a que $\psi \circ c = \phi \circ c$.

Por lo tanto, si $C$ con $C \xrightarrow{c_i} D(i)$ para cada $i \in \mathbf{J}_0$ es un cono, $c$ "ecualiza" $\phi$ y $\psi$, por lo tanto existe una única flecha $C \xrightarrow{u} E$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & \prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero la conmutatividad de este diagrama es equivalente a la de

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e_i"] & D(i) \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "c_i"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $i \in \mathbf{J}_0$. Por lo tanto, $E$ con $E \xrightarrow{e_i} D(i)$ es $\lim_{\overleftarrow{j}} D(j)$, dando por terminada la prueba.

**Epílogo.** No hace falta rehacer la prueba para convencerse de que el mismo resultado puede alcanzarse para otras cardinalidades.

Quedan también resultados parecidos para el mundo dual:

**Ejercicio 208.** *Definir la noción de* ***cocono*** *por analogía con la de cono. Definir la categoría* **Cocone**$(D)$*. Definir la noción de colímite por análogía con la de límite (notación* $\lim_{\overrightarrow{j}} D(j)$*).*

**Ejercicio 209.** *¿Se satisface que* $\mathbf{Cocone}(D) \cong \mathbf{Cone}(D)^{\mathbf{op}}$*?*

**Ejercicio 210.** *Ejemplificar con las definiciones de coproducto, coecualizador, etc.*

(Décima clase: Exponenciales)

Además de los límites y colimites vistos, hay una construcción muy habitual en **Set**: la de espacio de funciones de un conjunto $A$ en un conjunto $B$. En realidad, en algún sentido ya lo hemos considerado al tratar la clase pasada el producto generalizado. Dada una familia de conjuntos $B_a$ para $a \in A$, el producto generalizado $\prod_{a\in A} B_a$ puede definirse por $\prod_{a\in A} B_a = \{(b_a|a \in A) \mid \forall a \in A.b_a \in B_a\}$. Para obtener el espacio de funciones de $A$ en $B$ basta considerar que la familia $B_a$ sea constante, $\forall a \in A.B_a = B$. En efecto, la tupla $(b_a|a \in A)$ equivale en ese caso a la función $f(a) = b_a$ que va de $A$ en $B$.

Denotemos a este conjunto por $B^A$ en vez de $\prod_{a\in A} B$ (ya que la dependecia de $a$ no existe más). Los diagramas que vimos la clase pasada para el producto generalizado, instanciados al caso que estamos considerando, serían:

$$B^A \xrightarrow{\pi_a} B \qquad\qquad a \in A$$

tal que para todo otro objeto que venga equipado también con igual número de flechas

$$C \xrightarrow{f_a} B \qquad\qquad a \in A$$

exista una única flecha

$$C \xrightarrow{<f_a|a\in A>} B^A$$

tal que los triángulos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "<f_a|a\in A>"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\ B^A \arrow[r, "\pi_x"] & B \end{tikzcd}$$

conmuten para todo $x \in A$.

Pero ahora, tener

$$B^A \xrightarrow{\pi_a} B \qquad\qquad a \in A$$

equivale a tener una función de dos argumentos

$$B^A \times A \xrightarrow{\pi} B$$

que satisfacen la correspondencia $\pi((x, a)) = \pi_a(x)$ (esta correspondencia permite definir $\pi$ a partir de los $\pi_a$ y viceversa). Algo similar ocurre con el diagrama

$$C \xrightarrow{f_a} B \qquad\qquad a \in A$$

que quedaría

$$C \times A \xrightarrow{f} B$$

La única flecha de $C$ a $B^A$ se denota ahora $\widetilde{f}$

$$C \xrightarrow{\widetilde{f}} B^A$$

Y el triángulo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\widetilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B^A \arrow[r, "\pi"] & B \end{tikzcd}$$

no funciona porque $\pi$ y $f$ no tienen esos dominios. Se lo corrige:

$$\begin{tikzcd} C \times A \arrow[d, "\widetilde{f} \times 1_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B^A \times A \arrow[r, "\pi"] & B \end{tikzcd}$$

La última corrección es que la flecha $\pi$ en realidad se denota $\epsilon$ y se lee "evaluación" ya que -en el caso de **Set**- toma dos argumentos, el primero una función y el segundo un argumento, y evalúa la función en el argumento.

Se generaliza la definición para cualquier categoría con productos binarios.

**Definición 211.** *Sea* **C** *una categoría con productos binarios. Un* ***exponencial*** *entre los objetos $A$ y $B$ es un objeto $B^A$ y una flecha (llamada* ***evaluación****)*

$$B^A \times A \xrightarrow{\epsilon} B$$

*tal que para todo objeto $C$ y flecha*

$$C \xrightarrow{f_a} B \qquad\qquad a \in A$$

*existe una única flecha $C \xrightarrow{\widetilde{f}} B^A$ (llamada* ***transpuesta*** *de $f$) tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \\ C \times A \arrow[u, "\widetilde{f} \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Se suele completar el diagrama con $\widetilde{f}$:

$$\begin{tikzcd} B^A & B^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \\ C \arrow[u, "\widetilde{f}"] & C \times A \arrow[u, "\widetilde{f} \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

**Ejercicio 212.** *¿Es un límite?*

**Ejercicio 213.** *Demostrar que el exponencial de $A$ y $B$ es único salvo isomorfismo.*

La conmutatividad del diagrama equivale a $\epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_A) = f$. Dada una flecha $C \xrightarrow{g} B^A$, se denota $\overline{g} = \epsilon \circ (g \times 1_A)$ (y también se la llama **transpuesta** de $g$). Por unicidad, tenemos que $\widetilde{\overline{g}} = g$. Por conmutatividad del triángulo, $\overline{\widetilde{f}} = f$. Es decir que las transpuestas proporcionan el isomorfismo

$$Hom(C \times A, B) \cong Hom(C, B^A).$$

**Definición 214.** *Una categoría es* ***cartesiana cerrada*** *(CCC) si tiene todos los productos finitos y exponenciales.*

**Ejemplo 215.** *La categoría* **Set** *es CCC, con $B^A = A \to B$ = conjunto de funciones de $A$ en $B$.*

**Ejemplo 216.** *La categoría* $\mathbf{Set_{fin}}$ *es CCC ya que el cardinal del conjunto de funciones satisface $|B^A| = |B|^{|A|}$, y por lo tanto es finito si $A$ y $B$ lo son.*

**Ejemplo 217.** *Toda álgebra de Boole $B$, vista como una categoría (ya que los posets pueden ser vistos como categorías) es cartesiana cerrada. El objeto terminal es el máximo de $B$, el producto $a \times b$, como vimos, es el ínfimo $a \wedge b$, y el exponencial $b^a$, también denotado $a \Rightarrow b$ es $\neg a \vee b$.*

*La flecha $\epsilon$ es $(a \Rightarrow) \wedge a \leq b$ que vale ya que*

$$\begin{aligned}(a \Rightarrow b) \wedge a &= (\neg a \vee b) \wedge a \\ &= (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a) \\ &= 0 \vee (b \wedge a) \\ &= b \wedge a \\ &\leq b\end{aligned}$$

*También debemos comprobar que satisface la propiedad universal. Si $c \wedge a \leq b$ entonces*

$$\begin{aligned}c &\leq \neg a \vee c \\ &= (\neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee a) \\ &= \neg a \vee (c \wedge a) \\ &\leq \neg a \vee b \\ &= a \Rightarrow b\end{aligned}$$

*Por lo tanto, $c \wedge a \leq b$ implica $c \leq a \Rightarrow b$, su transpuesta.*

**Ejercicio 218.** *Comprobar que en toda CCC, $B^1 \cong B$ para todo objeto $B$.*

**Ejercicio 219.** *Comprobar que en toda CCC, $1^A \cong 1$ para todo objeto $A$.*

**Ejercicio 220.** *Comprobar si* **C** *es CCC, entonces $\overbrace{f \circ (g \times 1_A)} = \widetilde{f} \circ g$ (uso llaves cuando necesito un tilde más ancho que el de LaTeX, o sea, llaves = tilde).*

**Ejercicio 221.** *Comprobar si* **C** *es CCC, entonces $\widetilde{\epsilon} = 1_{B^A}$.*

**Ejemplo 222.** *Comprobemos que si* **C** *es CCC, entonces $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$. Para ello, definiremos $i$, $j$ y $k$ tales que $A^C \times B^C \xrightarrow{\widetilde{i}} (A \times B)^C$, $(A \times B)^C \xrightarrow{\widetilde{j}} A^C$ y*

$(A\times B)^C \xrightarrow{\widetilde{k}} B^C$ *y que* $\widetilde{i}\circ <\widetilde{j},\widetilde{k}> = 1_{(A\times B)^C}$ *y* $<\widetilde{j},\widetilde{k}>\circ\widetilde{i} = 1_{A^C\times B^C}$*:*

$$A \xleftarrow{\epsilon} A^C\times C \xleftarrow{\pi_1\times 1_C} (A^C\times B^C)\times C \xrightarrow{\pi_2\times 1_C} B^C\times C \xrightarrow{\epsilon} B$$

*de donde,* $(A^C\times B^C)\times C \xrightarrow{i} A\times B$ *para* $i = <i_1,i_2>$ *con* $i_1 = \epsilon\circ(\pi_1\times 1_C)$ *y* $i_2 = \epsilon\circ(\pi_2\times 1_C)$*. Entonces*

$$A^C\times B^C \xrightarrow{\widetilde{i}} (A\times B)^C$$

*Por otro lado,*

$$\begin{tikzcd}
(A\times B)^C\times C \arrow[r, "\epsilon"] & A\times B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & A \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

*de donde, definiendo las flechas* $j = \pi_1\circ\epsilon$ *y* $k = \pi_2\circ\epsilon$ *se obtiene* $(A\times B)^C \xrightarrow{\widetilde{j}} A^C$ *y* $(A\times B)^C \xrightarrow{\widetilde{k}} B^C$.

*Ahora*

$$\begin{array}{rcll}
\widetilde{i}\circ<\widetilde{j},\widetilde{k}> & = & \widetilde{i\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)} & \textit{por } \widetilde{f\circ(g\times 1_A)} = \widetilde{f}\circ g \\
 & = & \widetilde{<i_1,i_2>\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)} & \textit{por definición de } i \\
 & = & \widetilde{<i_1\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1), i_2\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)>} & \textit{por props producto} \\
 & = & \widetilde{<\epsilon\circ(\pi_1\times 1)\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1), i_2\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)>} & \textit{por definición de } i_1 \\
 & = & \widetilde{<\epsilon\circ(\widetilde{j}\times 1), i_2\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)>} & \textit{por props producto} \\
 & = & \widetilde{<\epsilon\circ(\widetilde{j}\times 1), \epsilon\circ(\widetilde{k}\times 1)>} & \textit{idem } i_2 \\
 & = & \widetilde{<j,k>} & \textit{por } \epsilon\circ<\widetilde{f},1_A> = f \\
 & = & \widetilde{<\pi_1\circ\epsilon, \pi_2\circ\epsilon>} & \textit{por definición de } j \textit{ y } k \\
 & = & \widetilde{<\pi_1,\pi_2>\circ\epsilon} & \textit{por props producto} \\
 & = & \widetilde{1\circ\epsilon} & \textit{por props producto} \\
 & = & \widetilde{\epsilon} & \\
 & = & 1_{(A\times B)^C} & \textit{por } \widetilde{\epsilon} = 1_{B^A}
\end{array}$$

*Componiendo en el otro orden también se obtiene la identidad:*

$$
\begin{array}{rcll}
\widetilde{j} \circ \widetilde{i} & = & \widetilde{j \circ (\widetilde{i} \times 1)} & \textit{por } \widetilde{f \circ (g \times 1_A)} = \widetilde{f} \circ g \\
 & = & \widetilde{\pi_1 \circ \epsilon \circ (\widetilde{i} \times 1)} & \textit{por definición de } j \\
 & = & \widetilde{\pi_1 \circ i} & \textit{por } \epsilon \circ <\widetilde{f}, 1_A> = f \\
 & = & \widetilde{i_1} & \textit{por definición de } i \\
 & = & \widetilde{\epsilon \circ (\pi_1 \times 1)} & \textit{por definición de } i_1 \\
 & = & \pi_1 & \textit{por } \widetilde{\epsilon \circ (f \times 1)} = f \\
\widetilde{k} \circ \widetilde{i} & = & \pi_2 & \textit{análogamente} \\
<\widetilde{j}, \widetilde{k}> \circ \widetilde{i} & = & <\widetilde{j} \circ \widetilde{i}, \widetilde{k} \circ \widetilde{i}> & \\
 & = & <\pi_1, \pi_2> & \\
 & = & 1_{A^C \times B^C} &
\end{array}
$$

**Ejercicio (posgrado) 223.** *Comprobar que si* **C** *es CCC, entonces* $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.

(UNDÉCIMA CLASE: EJEMPLOS DE EXPONENCIALES)

Algunos ejemplos de lógica y computación.

**Álgebras de Heyting.** La clase pasada vimos que una álgebra de Boole, vista como categoría, es cartesiana cerrada definiendo $b^a = \neg a \vee b$ (que también se denota $a \Rightarrow b$). En realidad, para ser CCC, no es necesario que un poset sea un álgebra de Boole, alcanza con que sea un álgebra de Heyting:

**Definición 224.** *Un poset es un* ***álgebra de Heyting*** *si tiene*

1. *ínfimos finitos:* $1$ *y* $p \wedge q$,
2. *supremos finitos:* $0$ *y* $p \vee q$.
3. *exponenciales:* $p \Rightarrow q$ *tal que* $r \wedge p \leq q$ *sii* $r \leq p \Rightarrow q$.

El sii del tercer requerimiento dice que tiene exponenciales: que $r \wedge p \leq q$ implique $r \leq p \Rightarrow q$ nos da la transpuesta. Que $r \leq p \Rightarrow q$ implique $r \wedge p \leq q$, nos da la evaluación tomando $r = p \Rightarrow q$.

Por lo comprobado la clase pasada, un álgebra de Boole es un álgebra de Heyting. La inversa no es cierta, pero se puede obtener al menos distributividad:

$$\begin{aligned}(r \vee s) \wedge p \leq q \quad &\text{sii} \quad r \vee s \leq p \Rightarrow q \\ &\text{sii} \quad r \leq p \Rightarrow q \text{ y } s \leq p \Rightarrow q \\ &\text{sii} \quad r \wedge p \leq q \text{ y } s \wedge p \leq q \\ &\text{sii} \quad (r \wedge p) \vee (s \wedge p) \leq q\end{aligned}$$

De acá, tomando $q = (r \vee s) \wedge p$ obtenemos $(r \wedge p) \vee (s \wedge p) \leq (r \vee s) \wedge p$. Y tomando $q = (r \wedge p) \vee (s \wedge p)$ obtenemos $(r \vee s) \wedge p \leq (r \wedge p) \vee (s \wedge p)$.

No todos los reticulados distributivos son álgebras de Heyting. Sin embargo, los reticulados distributivos completos sí lo son.

**Definición 225.** *Un poset es* ***completo*** *si tiene ínfimos arbitrarios.*

Esto es equivalente a pedir supremos arbitrarios, ya que si tiene los unos tiene también los otros. Un reticulado, álgebra de Heyting o álgebra de Boole es completa si lo es como poset.

**Prop 226.** *Un reticulado completo es un álgebra de Heyting sii satisface la siguiente regla de distributividad:*

$$a \wedge (\bigvee_i b_i) = \bigvee_i (a \wedge b_i)$$

Un álgebra de Heyting satisface distributividad, es lo que demostramos un poco más arriba (la prueba es muy similar). Recíprocamente, si se define

$$p \Rightarrow q = \bigvee_{x \wedge p \leq q} x$$

veamos que es un álgegra de Heyting comprobando que $r \wedge p \leq q$ sii $r \leq p \Rightarrow q$. Por un lado tenemos el implica

$$r \wedge p \leq q \Longrightarrow r \leq \bigvee_{x \wedge p \leq q} x$$

que vale ya que $r$ pertenece al rango del supremo. Por el otro

$$r \leq \bigvee_{x \wedge p \leq q} x \Longrightarrow r \wedge p \leq (\bigvee_{x \wedge p \leq q} x) \wedge p$$

Por distributividad podemos continuar:

$$(\bigvee_{x \wedge p \leq q} x) \wedge p = \bigvee_{x \wedge p \leq q} (x \wedge p) \leq \bigvee_{x \wedge p \leq q} q = q$$

Esto nos da el segundo implica: si $r \leq p \Rightarrow q$, entonces $r \wedge p \leq q$ .

Como ya vimos, un álgebra de Boole es un álgebra de Heyting (tomando como hicimos $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$). Pero no toda álgebra de Heyting es un álgebra de Boole (si se define $\neg p = p \Rightarrow 0$, como es lógico ya que $\neg p = \neg p \vee 0 = p \Rightarrow 0$, es posible que $\neg\neg p \neq p$ en un álgebra de Heyting).

**Lógica proposicional intuicionista (IPC).** Se define a través de reglas de inferencia, que establecen cuándo la fórmula $q$ **se deduce de** la fórmula $p$ (se escribe $p \vdash q$). Acá las fórmulas son las de la lógica proposicional: variables, $\top, \bot, p \wedge q, p \vee q$ y $p \Rightarrow q$. La relación $\vdash$ se define inductivamente por:

$$\frac{p \vdash q \quad p \vdash r}{p \vdash q \wedge r}\,a \qquad \frac{p \vdash q \wedge r}{p \vdash q}\,b \qquad \frac{p \vdash q \wedge r}{p \vdash r}\,c \qquad \frac{p \vdash r \quad q \vdash r}{p \vee q \vdash r}\,d \qquad \frac{p \vee q \vdash r}{p \vdash r}\,e \qquad \frac{p \vee q \vdash r}{q \vdash r}\,f$$

$$\frac{p \wedge q \vdash r}{p \vdash q \Rightarrow r}\,g \qquad \frac{p \vdash q \Rightarrow r}{p \wedge q \vdash r}\,h \qquad \frac{}{p \vdash \top}\,i \qquad \frac{}{\bot \vdash p}\,j \qquad \frac{}{p \vdash p}\,k \qquad \frac{p \vdash q \quad q \vdash r}{p \vdash r}\,l$$

La relación $\vdash$ así definida establece un preorden sobre el conjunto de fórmulas, y por lo tanto una categoría. Las reglas $k$ (reflexividad) y $l$ (transitividad) se corresponden con la flecha identidad y la composición.

Es una categoría cartesiana cerrada donde $\top$ es 1, y las siguiente derivaciones corresponden a las proyecciones

$$\frac{\overline{p \wedge q \vdash p \wedge q}\,k}{p \wedge q \vdash p}\,b \qquad \frac{\overline{p \wedge q \vdash p \wedge q}\,k}{p \wedge q \vdash q}\,c$$

mientras que la propiedad universal está dada por la regla $a$.

Se puede obtener la siguiente derivación:

$$\frac{\overline{p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q}\,k}{(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q}\,h$$

que corresponde a la flecha evaluación, mientras que la transpuesta está dada por la regla $g$.

Es un juego interesante intentar obtener otros teoremas del cálculo proposicional intuicionista. Por ejemplo, modus ponens: obtener $p \vdash r$ a partir de $p \vdash q \Rightarrow r$ y $p \vdash q$:

$$\frac{\dfrac{\overline{p \vdash p}\,k \quad \overline{p \vdash q}}{p \vdash p \wedge q}\,a \qquad \dfrac{p \vdash q \Rightarrow r}{p \wedge q \vdash r}\,h}{p \vdash r}\,l$$

Las siguiente derivaciones dicen que $p$ y $\top \wedge p$ son interdeducibles:

$$\dfrac{\dfrac{}{p \vdash \top}\,i \quad \dfrac{}{p \vdash p}\,k}{p \vdash \top \wedge p}\,a \qquad \dfrac{\dfrac{}{\top \wedge p \vdash \top \wedge p}\,k}{\top \wedge p \vdash p}\,c$$

La utilidad de fórmulas interdeducibles es que, gracias a la transitividad del $\vdash$, podemos reemplazar unas por otras: si $p \vdash p'$, $p' \vdash p$, $q \vdash q'$ y $q' \vdash q$, entonces $p \vdash q$ sii $p' \vdash q'$.

Decimos que una fórmula $p$ es derivable cuando $\top \vdash p$ lo es.

**Ejercicio 227.** *Comprobar que los axiomas usuales de la conjunción*

- $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
- $(p \wedge q) \Rightarrow q$, *y*
- $p \Rightarrow q \Rightarrow (p \wedge q)$

*son derivables.*

Estamos asumiendo que $\Rightarrow$ asocia a derecha.

**Ejercicio 228.** *Comprobar que los axiomas usuales de la implicación*

- $p \Rightarrow p$,
- $p \Rightarrow q \Rightarrow p$, *y*
- $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r$

*son derivables.*

**Ejercicio 229.** *Comprobar que los axiomas usuales de la disyunción*

- $p \Rightarrow (p \vee q)$,
- $q \Rightarrow (p \vee q)$,
- $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$

*son derivables.*

Como se trata de un cálculo intuicionista, no es posible derivar $p \vee (p \Rightarrow \perp)$.

**IPC y álgebras de Heyting.** Existe una correspondencia entre IPC y álgebras de Heyting. Dado un cálculo intuicionista $\mathcal{L}$ construido con las conectivas que mencionamos a partir de un conjunto de variables, con las reglas dadas y tal vez con algunas fórmulas como axiomas, se puede construir el álgebra de Heyting $HA(\mathcal{L})$ (llamada álgebra de Lindenbaum-Tarski), cuyos elementos son clases de equivalencia $[p]$ de fórmulas :

$$[p] = [q] \text{ sii } p \vdash q \text{ y } q \vdash p$$

Se define un orden parcial entre clases

$$[p] \leq [q] \text{ sii } p \vdash q$$

que está bien definido por la observación que hicimos entre fórmulas interdeducibles. Las demás construcciones de un álgebra de Heyting no presentan sorpresas:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & [\top] \\ 0 & = & [\perp] \\ [p] \wedge [q] & = & [p \wedge q] \\ [p] \vee [q] & = & [p \vee q] \\ [p] \Rightarrow [q] & = & [p \Rightarrow q] \end{array}$$

**Ejercicio 230.** *Comprobar que $\wedge$, $\vee$ y $\Rightarrow$ están bien definidas.*

Una fórmula $p$ es derivable en $\mathcal{L}$ sii $[p] = 1$, de donde se obtiene

**Prop 231.** *IPC es completo con respecto a los modelos en álgebras de Heyting.*

En efecto, sea $p$ una fórmula verdadera en todas las álgebras de Heyting. En particular, $p$ es verdadera en $HA(\mathcal{L})$. Luego $p = 1$ en $HA(\mathcal{L})$ y $\top \vdash p$.

**Cálculo lambda.** La correspondencia entre álgebras de Heyting y la lógica proposicional intuicionista es un caso particular de una correspondencia más general entre categorías cartesianas cerradas y cálculo lambda.

Recordemos la definición de cálculo lambda:

- Tipos

$$A, B \quad ::= \quad \text{ciertos tipos básicos} \mid A \longrightarrow B \mid A \times B \mid \ \ldots$$

- Términos

$$M, N \quad ::= \quad c \mid v \mid M \ N \mid \lambda v.M \mid (M, N) \mid fst(M) \mid snd(M) \mid \ \ldots$$

- Ecuaciones (además de renombre de variables ligadas, reflexividad, simetría, transitividad y congruencias)

$$\begin{array}{rcll} (\lambda x.\ M)\ N & = & M[N/x] & \\ \lambda x.\ M\ x & = & M & \quad \text{si } x \text{ no está libre en } M \\ fst((M,N)) & = & M & \\ snd((M,N)) & = & N & \\ (fst(M), snd(M)) & = & M & \end{array}$$

A partir de éste cálculo, obtuvimos una categoría:

- objetos = tipos
- flechas de $A$ a $B$ = clases de equivalencia de términos cerrados de tipo $A \to B$
- $1_A = \lambda x.x$ (con $x : A$)
- $M \circ N = \lambda x.M\ (N\ x)$

Luego definimos

- $\pi_1 = \lambda y.fst(y)$,
- $\pi_2 = \lambda y.snd(y)$, y
- $<M, N> = \lambda x.(M\ x, N\ x)$

que como demostramos determinan un producto en esa categoría. También se puede determinar un objeto exponencial:

- $B^A = A \to B$,
- $\epsilon = \lambda p.\ fst(p)\ snd(p)$, y
- $\widetilde{f} = \lambda z.\lambda x.\ f\ (z, x)$

Se puede comprobar fácilmente que el diagrama del exponencial conmuta:

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_A) & = & \epsilon \circ <\widetilde{f} \circ \pi_1, \pi_2> \\
& = & \lambda x.\ \epsilon\ (<\widetilde{f} \circ \pi_1, \pi_2>\ x) \\
& = & \lambda x.\ \epsilon\ (\widetilde{f}\ (\pi_1\ x), \pi_2\ x) \\
& = & \lambda x.\ fst((\widetilde{f}\ (\pi_1\ x), \pi_2\ x))\ snd((\widetilde{f}\ (\pi_1\ x), \pi_2\ x)) \\
& = & \lambda x.\ \widetilde{f}\ (\pi_1\ x)\ (\pi_2\ x) \\
& = & \lambda x.\ \widetilde{f}\ (fst(x))\ (snd(x)) \\
& = & \lambda x.\ f\ (fst(x), snd(x)) \\
& = & \lambda x.\ f\ x \\
& = & f
\end{array}$$

Para demostar unicidad, sea $g$ que también hace conmutar el diagrama. Reiterando los pasos anteriores, asumir la conmutatividad del diagrama equivale a asumir la ecuación

$$\lambda x.\ g\ (fst(x))\ (snd(x)) = \lambda x.\ f\ (fst(x), snd(x))$$

que implica, para $z$ y $x$

$$(\lambda x.\ g\ (fst(x))\ (snd(x)))\ (z, x) = (\lambda x.\ f\ (fst(x), snd(x)))\ (z, x)$$

que equivale a

$$g\ (fst((z, x)))\ (snd((z, x))) = f\ (fst(z, x), snd(z, x))$$

y esto a su vez a

$$g\ z\ x = f\ (z, x)$$

y esto a

$$\lambda z.\lambda x.\ g\ z\ x = \lambda z.\lambda x.\ f\ (z, x)$$

y finalmente, a

$$g = \lambda z.\lambda x.\ f\ (z, x)$$

que equivale a $g = \widetilde{f}$.

Por lo tanto, $\lambda{\to}$ es una CCC.

**La categoría $\lambda{\to}$ y CCCs.** Llamemos a un conjunto de tipos y términos básicos junto con sus ecuaciones una teoría en el cálculo lambda. Así como antes construimos $HA(\mathcal{L})$ a partir de un cálculo proposicional intuicionista $\mathcal{L}$, se puede construir una categoría cartesiana cerrada $\mathbf{C}(\mathcal{T})$ a partir una teoría $\mathcal{T}$.

Sea una categoría cartesiana cerrada $\mathbf{C}$. A cada tipo $X$ se le debe asignar un objeto $[\![X]\!]$ de $\mathbf{C}$, y a cada término $M : A \to B$, una flecha $[\![M]\!]$ de $[\![A]\!] \to [\![B]\!]$. Una vez hecha para los tipos y términos básicos, para los demás se explota que $\mathbf{C}$ es CCC:

$$\begin{array}{rcl}
[\![A \times B]\!] & = & [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\
[\![B^A]\!] & = & [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \\
& \cdots & \\
[\![<f, g>]\!] & = & <[\![f]\!], [\![g]\!]> \\
& \cdots &
\end{array}$$

También se requiere que todas las ecuaciones de $\mathcal{T}$ sean satisfechas: si $a = b : A \to B$ vale en $\mathcal{T}$, entonces $[\![a]\!] = [\![b]\!] : [\![A]\!] \to [\![B]\!]$ debe valer en $\mathbf{C}$.

Por ejemplo, sea $\mathcal{T}$ la teoría que consiste de un tipo básico $X$ y dos términos $u : X$ y $m : X \times X \to X$ con las ecuaciones

- $m\ (u, x) = x$,
- $m\ (x, u) = x$, y
- $m\ (x, m\ (y, z)) = m\ (m\ (x, y), z)$

es decir, las mismas que definen un monoide. Un modelo de $\mathcal{T}$ será una CCC $\mathbf{C}$ con un objeto $M$ equipado con flechas $1 \xrightarrow{\llbracket u \rrbracket} M$ y $M \times M \xrightarrow{\llbracket m \rrbracket} M$ tales que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(M \times M) \times M \arrow[rr, "<\pi_1 \circ \pi_1, <\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>>"] \arrow[d, "\llbracket m \rrbracket \times 1_M"'] & & M \times (M \times M) \arrow[d, "1_M \times \llbracket m \rrbracket"] \\
M \times M \arrow[dr, "\llbracket m \rrbracket"'] & & M \times M \arrow[dl, "\llbracket m \rrbracket"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

que expresa asociatividad, conmute, y que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "<\llbracket u \rrbracket, 1_M>"] \arrow[d, "<1_M, \llbracket u \rrbracket>"'] \arrow[dr, "1_M"] & M \times M \arrow[d, "\llbracket m \rrbracket"] \\
M \times M \arrow[r, "\llbracket m \rrbracket"'] & M
\end{tikzcd}
$$

que expresa que $\llbracket$u$\rrbracket$ sea neutro, conmute.

**Prop 232.** *Para toda teoría $\mathcal{T}$ en el cálculo lambda, y todos términos $a, b \in \mathcal{T}$, la ecuación $a = b$ puede deducirse en la teoría sii en todos los modelos de $\mathcal{T}$ en CCCs, $\llbracket a \rrbracket = \llbracket b \rrbracket$.*

**Conclusión.** Hay un parecido entre el cálculo lambda e IPC, por un lado, y CCC y álgebras de Heyting por el otro. El parecido consiste en ignorar el número de flechas y pensar que entre dos objetos puede haber a lo sumo una. Así, si del cálculo lambda suprimimos la posible multiplicidad de flechas (atendemos sólo la existencia de un término del tipo apropiado, pero sin importar cuáles son los términos, pretendiendo que es a lo sumo uno) obtenemos un cálculo equivalente a IPC. También si de una CCC, suprimimos dicha posible multiplicidad, obtenemos un álgebra de Heyting. Por ello, que una álgebra de Heyting sea modelo de IPC es un caso particular de que una CCC sea modelo del cálculo lambda.

La correspondencia que estamos observando es un ejemplode un fenómeno que se conoce como correspondencia o **isomorfismo de Curry-Howard**.

**Límites en la categoría Cat.** Vimos que la categoría **Cat** tiene objeto terminal, la categoría **1**, y productos binarios, que pueden generalizarse a productos finitos e infinitos. También tiene ecualizadores, y por lo tanto, todos los límites:

Sean **C** y **D** dos categorías, y $F$ y $G$ funtores $\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathbf{D}$. Se define la categoría **E**, cuyos objetos son aquellos objetos de **C** para los cuales $F_0$ y $G_0$ coinciden, y cuyas flechas son aquellas flechas de **C** para las cuales $F_1$ y $G_1$ coinciden (si $F_1$ y $G_1$ coinciden en una flecha, entonces $F_0$ y $G_0$ coinciden en su dominio y codominio).

Se puede comprobar que es una categoría ya que para cualquier objeto $A$ de **E**, $F(A) = G(A)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)} = 1_{G(A)} = G(1_A)$. Además, si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en **E**, se cumple $F(f) = G(f)$ y $F(g) = G(g)$, luego $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = G(g) \circ G(f) = G(g \circ f)$.

Se define el funtor $\mathbf{E} \xrightarrow{E} \mathbf{C}$ por $E(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B$ dado que **E** es una subcategoría de **C**. Es obvio que $F \circ E = G \circ E$, por definición de **E**.

**E** es la subcategoría de **C** de los objetos y flechas sobre los que $F$ y $G$ coinciden. La propiedad universal dice que toda subcategoría de **C** donde $F$ y $G$ coincidan, es también subcategoría de **E**:

Para ver que se satisface la propiedad universal, sea el funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{Y} \mathbf{C}$ tal que $F \circ Y = G \circ Y$. Veremos que existe un único funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{U} \mathbf{E}$ tal que $E \circ U = Y$. Sea $X$ un objeto de **X**. Como $F(Y(X)) = G(Y(X))$, $Y(X)$ es un objeto de **E**. Definimos $U(X) = Y(X)$. Sea ahora $X \xrightarrow{f} X' \in \mathbf{X}$. Nuevamente $F(Y(f)) = G(Y(f))$, luego $Y(f)$ es una flecha de **E**. Definimos $U(f) = Y(f)$. Obviamente se cumple $E \circ U = Y$. La unicidad es clara, ya que estuvimos obligados a definir $U$ como lo hicimos.

Como conclusión, la categoría **Cat** tiene ecualizadores y por lo tanto todos los límites.

**Colímites en la categoría Cat.** Ya vimos que tiene objeto inicial, la categoría **0**. También tiene coproductos, que se obtienen haciendo la unión disjunta entre las colecciones de objetos y también la unión disjunta entre las colecciones de flechas de las categorías participantes; en suma, vista como grafo, juntando los dos grafos sin conectar uno con el otro.

**Ejercicio 233.** *Definir el coproducto de categorías, comprobar que es una categoría y que satisface la propiedad que define el coproducto.*

También pueden definirse coecualizadores, con ello **Cat** tiene todos los colímites.

**Ejercicio 234.** *Definir el coecualizador entre dos funtores.*

**Transformaciones naturales.** Veremos que dadas las categorías **C** y **D** existe el exponencial $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. Los objetos de esta categoría serán los funtores de **C** en **D**. Una flecha entre dos funtores será un operador capaz de transformar (la imagen de) un funtor en (la imagen de) el otro. Para ello se define la noción de transformación natural entre dos funtores.

**Definición 235.** *Dadas las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$*, y dos funtores* $\mathbf{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathbf{D}$*, una* ***transformación natural*** *de* $F$ *en* $G$ *es una familia de flechas* $\eta_A$ *indexada por los objetos* $A \in \mathbf{C}$ *tales que para toda* $B \xrightarrow{f} C \in \mathbf{C}$ *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(B) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C) \arrow[r, "\eta_C"'] & G(C) \end{tikzcd}$$

*conmuta.*

**Ejemplo 236.** *Sea el funtor* $\mathbf{Set} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{Set}$ *que aplicado a un objeto (conjunto)* $X$ *devuelve el conjunto de partes* $\mathcal{P}(X)$*, y aplicado a una flecha (función)* $X \xrightarrow{f} Y$ *devuelve la función* $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{f[\_]} \mathcal{P}(Y)$ *que devuelve la imagen por* $f$ *de cada subconjunto de* $X$ *(*$X' \subseteq X \Rightarrow f[X'] = \{f(x) \mid x \in X'\}$*). Esta es la acción del funtor sobre las flechas, por eso escribimos* $\mathcal{P}(f) = f[\_]$*, y también* $\mathcal{P}(f)(X') = f[X']$*.*

*Se puede comprobar que* $\mathcal{P}$ *es un funtor: en efecto,* $\mathcal{P}(1_X)(X') = 1_X[X'] = X'$ *para todo* $X' \in \mathcal{P}(X)$*. Luego,* $\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}(X)}$*. Sean ahora las funciones* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$*,* $\mathcal{P}(g \circ f)(X') = (g \circ f)[X'] = \{g(f(x)) \mid x \in X'\} = g[\{f(x) \mid x \in X'\}] = g[f[X']]$ *para todo* $X' \in \mathcal{P}(X)$*. Luego,* $\mathcal{P}(g \circ f) = g[\_] \circ f[\_] = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$*.*

*Veamos ahora que hay una transformación natural del funtor identidad* $1_{\mathbf{Set}}$ *en el funtor* $\mathcal{P}$*. Debemos determinar una familia de flechas (funciones)* $\eta_X$ *(una función para cada conjunto* $X$*) tales que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "f[\_]"] \\ C \arrow[r, "\eta_C"'] & \mathcal{P}(C) \end{tikzcd}$$

*conmute para toda* $B \xrightarrow{f} C \in \mathbf{Set}$*. Si elegimos* $\eta_X(x) = \{x\}$*, el mismo conmuta ya que para todo* $b \in B$*,* $f[\eta_B(b)] = f[\{b\}] = \{f(b)\} = \eta_C(f(b))$*. Luego,* $f[\_] \circ \eta_B = \eta_C \circ f$*.*

**Ejemplo 237.** *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría con productos binarios, y sea* $B \in \mathbf{C}$*. Se define el funtor* $\_ \times B$ *de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{C}$*: aplicado a un objeto* $A \in \mathbf{C}$ *devuelve el objeto* $A \times B$*, y aplicado a una flecha* $A \xrightarrow{f} A'$ *devuelve la flecha* $f \times 1_B$*. Se puede comprobar fácilmente que es un funtor.*

*Veamos que hay una transformación natural de este funtor en el funtor identidad* $1_{\mathbf{C}}$*. Debemos determinar una familia de flechas* $\eta_X$ *de* $\mathbf{C}$*, indexada por objetos de* $\mathbf{C}$ *tal que* *el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f \times 1_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A' \times B \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & A'
\end{tikzcd}$$

*conmute para toda* $A \xrightarrow{f} A' \in \mathbf{C}$*. La elección es obvia:* $\eta_X = \pi_1$ *(observar que en realidad son diferentes* $\pi_1$ *según* $X$ *(y* $B$*, que en este está fijo)). Comprobemos que conmuta:* $\eta_{A'} \circ (f \times 1_B) = \pi_1 \circ <f \circ \pi_1, \pi_2> = f \circ \pi_1 = f \circ \eta_A$*.*

Para ver que $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ es una categoría debemos comprobar que dado un funtor $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ existe una transformación natural identidad $F \xrightarrow{1_F} F$; que dados tres funtores $\mathbf{C} \xrightarrow{F,G,H} \mathbf{D}$, $F$, $G$ y $H$, y dadas dos transformaciones naturales $F \xrightarrow{\eta} G$ y $G \xrightarrow{\eta'} H$, se pueden componer, y que la composición y la identidad tienen las propiedades habituales.

La transformación natural $1_F$ se obtiene fácilmente tomando para cada $X \in \mathbf{C}_0$, $(1_F)_X = 1_{F(X)}$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "1_{F(B)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\
F(C) \arrow[r, "1_{F(C)}"'] & F(C)
\end{tikzcd}$$

conmuta trivialmente.

Para la composición, de la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(B) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(C) \arrow[r, "\eta_C"'] & G(C)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta'_B"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(B) \arrow[d, "H(f)"] \\
G(C) \arrow[r, "\eta'_C"'] & H(C)
\end{tikzcd}$$

resulta obvio que

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\eta'_B \circ \eta_B"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(B) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(C) \arrow[r, "\eta'_C \circ \eta_C"'] & H(C) \end{tikzcd}$$

también conmuta, por ello se define la composición $(\eta' \circ \eta)_X = \eta'_X \circ \eta_X$.

Las propiedades de $\circ$ y $1_F$ se comprueban trivialmente, por lo tanto, $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ es una categoría. Veremos más adelante que es la categoría exponencial entre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

**Definición 238.** *Dados dos funtores $F$ y $G$ en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, un **isomorfismo natural** entre $F$ y $G$ es un isomorfismo entre ellos en la categoría $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.*

Es fácil comprobar que $F \xrightarrow{\eta} G$ es un isomorfismo natural sii para cada $X \in \mathbf{C}$, $F(X) \xrightarrow{\eta_X} G(X)$ es un isomorfismo en la categoría $\mathbf{D}$.

**Ejemplo 239.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con productos binarios. Se definen los funtores $F(A) = (A \times B) \times C$ y $F(A \xrightarrow{f} A') = (f \times 1_B) \times 1_C$, por un lado, y $G(A) = A \times (B \times C)$ y $G(A \xrightarrow{f} A') = f \times 1_{B \times C}$, por el otro. Si se define $\eta_A = <\pi_1 \circ \pi_1, <\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>>$, se obtiene el diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

*es decir,*

$$\begin{tikzcd} (A \times B) \times C \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "(f \times 1_B) \times 1_C"'] & A \times (B \times C) \arrow[d, "f \times 1_{B \times C}"] \\ (A' \times B) \times C \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & A' \times (B \times C) \end{tikzcd}$$

*que conmuta para toda flecha $A \xrightarrow{f} A' \in \mathbf{C}$. Además, cada $\eta_A$ es un isomorfismo en $\mathbf{C}$; por ello la transformación natural es un isomorfismo natural.*

(DECIMOTERCERA CLASE: LA CATEGORÍA $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$)

Vimos que $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ es una categoría.

**Prop 240.** *Si* $\mathbf{D}$ *tiene productos binarios, entonces* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *también.*

En efecto, sea $\mathbf{D}$ una categoría con productos y $F, G$ objetos de $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ (o sea, funtores de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$). Se define $H = F \times G$ por $H(X) = F(X) \times G(X)$ para todo objeto $X \in \mathbf{C}$, y $H(f) = F(f) \times G(f)$. Se puede comprobar que $H$ es un funtor:

$$
\begin{array}{rcl}
dom(H(f)) & = & dom(F(f) \times G(f)) \\
& = & dom(F(f)) \times dom(G(f)) \\
& = & F(dom(f)) \times G(dom(f)) \\
& = & H(dom(f)) \\
cod(H(f)) & = & H(cod(f)) \\
H(1_X) & = & F(1_X) \times G(1_X) \\
& = & 1_{F(X)} \times 1_{G(X)} \\
& = & 1_{F(X) \times G(X)} \\
& = & 1_{H(X)} \\
H(g \circ f) & = & F(g \circ f) \times G(g \circ f) \\
& = & (F(g) \circ F(f)) \times (G(g) \circ G(f)) \\
& = & (F(g) \times G(g)) \circ (F(f) \times G(f)) \\
& = & H(g) \circ H(f)
\end{array}
$$

Veamos ahora que es el producto. Para ello observamos que

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \in \mathbf{C} & \Longrightarrow & H(A) = F(A) \times G(A) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "H(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
B & & & H(B) = F(B) \times G(B) \arrow[r, "\pi_1"] & F(B)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, luego tenemos $H \xrightarrow{\Pi_1} F$, donde $\Pi_1$ es la transformación natural definida por $(\Pi_1)_X = \pi_1$ para todo objeto $X \in \mathbf{C}$. De la misma forma se obtiene la transformación natural $H \xrightarrow{\Pi 2} G$:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \in \mathbf{C} & \Longrightarrow & H(A) = F(A) \times G(A) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "H(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] & \\
B & & & H(B) = F(B) \times G(B) \arrow[r, "\pi_2"] & G(B) & \textit{conmuta}
\end{tikzcd}
$$

Resta ver la propiedad universal: sean un funtor $\mathbf{C} \xrightarrow{J} \mathbf{D}$ y dos transformaciones naturales $J \xrightarrow{\eta} F$ y $J \xrightarrow{\eta'} G$, es decir, tales que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "J(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ J(B) \arrow[r, "\eta_B"] & F(B) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[d, "J(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ J(B) \arrow[r, "\eta'_B"] & G(B) \end{tikzcd} \quad \textit{conmutan}$$

se define la transformación natural $J \xrightarrow{<\eta,\eta'>} H$ por $<\eta,\eta'>_X = <\eta_X,\eta'_X>$ para todo objeto $X \in \mathbf{C}$. Ésta es una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "<\eta_A,\eta'_A>"] \arrow[d, "J(f)"'] & H(A) = F(A) \times G(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ J(B) \arrow[r, "<\eta_B,\eta'_B>"] & H(B) = F(B) \times G(B) \end{tikzcd} \quad \textit{conmuta}$$

y es la única que hace conmutar el siguiente diagrama de $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$:

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "<\eta,\eta'>"] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ F & H = F \times G \arrow[l, "\Pi_1"'] \arrow[r, "\Pi_2"] & G \end{tikzcd}$$

Efectivamente, sea $\eta''$ tal que

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "\eta''"] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ F & H = F \times G \arrow[l, "\Pi_1"'] \arrow[r, "\Pi_2"] & G \end{tikzcd}$$

conmuta. Para todo $X \in \mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} & J(X) \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[d, "\eta''_X"] \arrow[dr, "\eta'_X"] & \\ F(X) & H(X) = F(X) \times G(X) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & G(X) \end{tikzcd}$$

de donde por unicidad $\eta''_X = <\eta_X,\eta'_X> = <\eta,\eta'>_X$. Como esto se cumple para todo objeto $X \in \mathbf{C}$, es decir, la igualdad se da para todos los miembros de la familia, $\eta'' = <\eta,\eta'>$. Luego, $<\eta,\eta'>$ es única.

**Ejercicio 241.** *Lo mismo puede hacerse para los demás límites y colímites.*

**Ejercicio (posgrado) 242.** *Si* $\mathbf{D}$ *es CCC, entonces ¿*$\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *también?*

**Definición 243.** *Dada una categoría localmente pequeña* $\mathbf{C}$*, y un objeto* $B \in \mathbf{C}$*, se define el* ***funtor representable contravariante*** $\mathbf{C}^{\mathbf{op}} \xrightarrow{Hom(\_,B)} \mathbf{Set}$ *de la siguiente manera:*

- *dado un objeto* $A \in \mathbf{C}$, $Hom(A,B) = \{f \in \mathbf{C} \mid A \xrightarrow{f} B\}$
- *dada una flecha* $A \xrightarrow{g} A' \in \mathbf{C}$*, se define* $Hom(A',B) \xrightarrow{Hom(g,B)} Hom(A,B)$ *por* $Hom(g,B)(f) = f \circ g$.

**Ejercicio 244.** *Comprobar que* $Hom(\_,B)$ *es un funtor de* $\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ *en* $\mathbf{Set}$.

**Ejemplo 245.** *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría localmente pequeña, y sean* $C \xrightarrow{f} A$ *y* $C \xrightarrow{g} B$ *dos de sus flechas. Se definen los funtores representables contravariantes* $\mathbf{C}^{\mathbf{op}} \xrightarrow{F,G,H} \mathbf{Set}$ *por* $F(X) = Hom(X,A)$, $G(X) = Hom(X,B)$ *y* $H(X) = Hom(X,C)$*. Para todo* $X \in \mathbf{C}$*, definimos* $H(X) \xrightarrow{\eta_X} F(X) \times G(X)$ *(observar que esta flecha y el producto involucrado son en* $\mathbf{Set}$*) por* $\eta_X(h) = (f \circ h, g \circ h)$*. El diagrama*

$$\begin{tikzcd} H(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "H(z)"'] & F(X) \times G(X) \arrow[d, "F(z)\times G(z)"] \\ H(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & F(Y) \times G(Y) \end{tikzcd}$$

*es decir*

$$\begin{tikzcd} Hom(X,C) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Hom(z,C)"'] & Hom(X,A) \times Hom(X,B) \arrow[d, "Hom(z,A)\times Hom(z,B)"] \\ Hom(Y,C) \arrow[r, "\eta_Y"] & Hom(Y,A) \times Hom(Y,B) \end{tikzcd}$$

*conmuta para toda flecha* $X \xrightarrow{z} Y \in \mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ *(o sea,* $Y \xrightarrow{z} X \in \mathbf{C}$*).*

*En efecto, sea* $h \in Hom(X,C)$,

$$\begin{array}{rcl} \eta_Y(Hom(z,C)(h)) & = & \eta_Y(h \circ z) \\ & = & (f \circ h \circ z, g \circ h \circ z) \\ & = & (Hom(z,A) \times Hom(z,B))(f \circ h, g \circ h) \\ & = & (Hom(z,A) \times Hom(z,B))(\eta_X(h)) \end{array}$$

*Luego,* $\eta_Y \circ Hom(z,C) = (Hom(z,A) \times Hom(z,B)) \circ \eta_X$ *y* $\eta$ *es una transformación natural.*

*A la luz de la Proposición 124, una definición alternativa de producto sería la siguiente:* $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ *es un diagrama producto sii* $\eta_X$ *es un isomorfismo natural.*

**Ejemplo 246.** *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría localmente pequeña, y sean* $A$, $B$ *y* $C$ *tres de sus objetos. Sea* $\eta$ *un isomorfismo natural, donde*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "z"'] \\ Y \end{tikzcd} \in \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \Longrightarrow \begin{tikzcd} Hom(X,C) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Hom(z,C)"'] & Hom(X,A) \times Hom(X,B) \arrow[d, "Hom(z,A) \times Hom(z,B)"] \\ Hom(Y,C) \arrow[r, "\eta_Y"] & Hom(Y,A) \times Hom(Y,B) \end{tikzcd}$$

*conmuta. En particular, para* $h \in Hom(X,C)$ *obtenemos el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "h"'] \\ X \end{tikzcd} \in \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \qquad \begin{tikzcd} Hom(C,C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "Hom(h,C)"'] & Hom(C,A) \times Hom(C,B) \arrow[d, "Hom(h,A) \times Hom(h,B)"] \\ Hom(X,C) \arrow[r, "\eta_X"] & Hom(X,A) \times Hom(X,B) \end{tikzcd}$$

*Llamemos* $(f,g) = \eta_C(1_C)$. *La conmutatividad de este diagrama implica que*

$$\begin{array}{rcl} (f \circ h, g \circ h) & = & (Hom(h,A) \times Hom(h,B))(f,g) \\ & = & (Hom(h,A) \times Hom(h,B))(\eta_C(1_C)) \\ & = & \eta_X(Hom(h,C)(1_C)) \\ & = & \eta_X(1_C \circ h) \\ & = & \eta_X(h) \end{array}$$

*¡Estamos en el caso del ejemplo anterior!*

*Conclusión:* $C$ *es un producto entre* $A$ *y* $B$ *sii existe un isomorfismo natural entre los funtores* $Hom(X,C)$ *y* $Hom(X,A) \times Hom(X,B)$. *Las proyecciones se obtienen aplicando el isomorfismo natural a la flecha* $1_C$.

**Ejercicio 247.** *Hacer un análisis similar para el exponencial:*

1. *Asumiendo que* $C \times A \xrightarrow{\epsilon} B$ *es un exponencial, comprobar que la función* $\mu_X : Hom(X \times A, B) \to Hom(X,C)$ *definida por* $\mu_X(f) = \tilde{f}$ *es biyectiva para todo* $X \in \mathbf{C}$ *y su inversa es* $\nu_X(f) = \overline{f} = \epsilon \circ (f \times 1_A)$.
2. *Comprobar el recíproco: si* $\nu_X$ *es biyectiva para todo* $X \in \mathbf{C}$, $C \times A \xrightarrow{\epsilon} B$ *es un exponencial (la suryectividad de* $\nu_X$ *implica la existencia de la transpuesta mientras que la inyectividad, su unicidad).*
3. *Comprobar que* $Hom(\_, C) \xrightarrow{\eta} Hom(\_ \times A, B)$ *es una transformación natural, donde* $\eta_X = \nu_X$. *Concluir que es un isomorfismo natural.*
4. *Comprobar que se puede deducir que* $C$ *es un objeto exponencial a partir de la existencia de un isomorfismo natural arbitrario* $Hom(\_, C) \xrightarrow{\eta} Hom(\_ \times A, B)$.
5. *Concluir que* $C$ *es* $B^A$ *sii existe un iso natural* $Hom(\_, C) \xrightarrow{\eta} Hom(\_ \times A, B)$.

**Ejercicio 248.** *Hacer un análisis similar para el coproducto: un* $C$ *es un coproducto entre* $A$ *y* $B$ *sii existe un isomorfismo natural entre cuáles funtores representables?*

(DECIMOCUARTA CLASE: $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ ES EL EXPONENCIAL DE $\mathbf{Cat}$)

**Lema 249.** *(Lema Bifuntor) Dadas las categorías* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$, *y*

$$\begin{array}{l} F_0 : \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0 \to \mathbf{C}_0 \\ F_1 : \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1 \to \mathbf{C}_1 \end{array}$$

*entonces* $F = (F_0, F_1) : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *es un funtor sii las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $F$ *es* ***funtorial*** *en ambos argumentos, es decir, para todo* $A \in \mathbf{A}$ *y* $B \in \mathbf{B}$, $F(A, \_) : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *y* $F(\_, B) : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *son funtores, y*
2. $F$ *satisface la siguiente* ***regla de intercambio****: Dados* $A \xrightarrow{\alpha} A' \in \mathbf{A}$ *y* $B \xrightarrow{\beta} B' \in \mathbf{B}$, *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} F_0((A,B)) \arrow[r, "F(A,\beta)"] \arrow[d, "F(\alpha,B)"'] \arrow[dr, "F_1((\alpha,\beta))"] & F_0((A,B')) \arrow[d, "F(\alpha,B')"] \\ F_0((A',B)) \arrow[r, "F(A',\beta)"] & F_0((A',B')) \end{tikzcd}$$

*conmuta, donde* $F(A, \_)$ *y* $F(\_, B)$ *se de*

Las definiciones de $F(A, \_)$ y $F(\_, B)$ a partir de $F_0$ y $F_1$ (y las notaciones utilizadas en esta prueba) son las obvias:

$$\begin{array}{rcl} F(A,\_)(B) & = & F_0((A,B)) \\ F(A,\_)(\beta) = F(A,\beta) & = & F_1((1_A,\beta)) \\ F(\_,B)(A) & = & F_0((A,B)) \\ F(\_,B)(\alpha) = F(\alpha,B) & = & F_1((\alpha,1_B)) \end{array}$$

Demostración del lema: Asumimos que $F$ es funtor y demostramos las dos condiciones. Es fácil comprobar que $F(A, \_)$ es funtor:

$$\begin{array}{rcll} dom(F(A,\_)(\beta)) & = & dom(F_1((1_A,\beta))) & \text{def } F(A,\_) \\ & = & F_0((A, dom(\beta))) & F \text{ funtor} \\ & = & F(A,\_)(dom(\beta)) & \text{def } F(A,\_) \\ cod(F(A,\_)(\beta)) & = & F(A,\_)(cod(\beta)) & \text{similar} \\ F(A,\_)(1_B) & = & F_1((1_A,1_B)) & \text{def } F(A,\_) \\ & = & F_1(1_{(A,B)}) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\ & = & 1_{F_0((A,B))} & F \text{ funtor} \\ & = & 1_{F(A,\_)(B)} & \text{def } F(A,\_) \\ F(A,\beta'\circ\beta) & = & F_1((1_A,\beta'\circ\beta)) & \text{def } F(A,\_) \\ & = & F_1((1_A\circ 1_A,\beta'\circ\beta)) & \\ & = & F_1((1_A,\beta')\circ(1_A,\beta)) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\ & = & F_1((1_A,\beta'))\circ F_1((1_A,\beta)) & F \text{ funtor} \\ & = & F(A,\beta')\circ F(A,\beta) & \text{def } F(A,\_) \end{array}$$

Análogamente para $F(\_, B)$. Por lo tanto, se cumple la primera condición.

Por otro lado, dada una flecha cualquiera $(A,B) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} (A',B') \in \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ se cumple también la segunda condición:

$$
\begin{array}{rcll}
F(\alpha,B')\circ F(A,\beta) & = & F_1((\alpha,1_{B'}))\circ F_1((1_A,\beta)) & \text{def } F(\_,B') \text{ y } F(A,\_) \\
& = & F_1((\alpha,1_{B'})\circ(1_A,\beta)) & F \text{ funtor} \\
& = & F_1((\alpha,\beta)) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
& = & F(A',\beta)\circ F(\alpha,B) & \text{similar}
\end{array}
$$

Recíprocamente, asumamos ahora que ambas condiciones se cumplen y demostremos que $F$ es funtor. Se verifica

$$
\begin{array}{rcll}
dom(F_1((\alpha,\beta))) & = & F_0((A,B)) & \text{condición 2} \\
& = & F_0((dom(\alpha),dom(\beta))) & \\
& = & F_0(dom((\alpha,\beta))) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
cod(F_1((\alpha,\beta))) & = & F_0(cod((\alpha,\beta))) & \text{similar} \\
F_1(1_{(A,B)}) & = & F_1((1_A,1_B)) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
& = & F(A,1_B)\circ F(1_A,B) & \text{condición 2} \\
& = & 1_{F_0((A,B))}\circ 1_{F_0((A,B))} & \text{condición 1} \\
& = & 1_{F_0((A,B))} & \\
F_1((\alpha',\beta')\circ(\alpha,\beta)) & = & F_1((\alpha'\circ\alpha,\beta'\circ\beta)) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
& = & F(A'',\beta'\circ\beta)\circ F(\alpha'\circ\alpha,B) & \text{condición 2} \\
& = & F(A'',\beta')\circ F(A'',\beta)\circ F(\alpha',B)\circ F(\alpha,B) & \text{condición 1} \\
& = & F(A'',\beta')\circ F(\alpha',B')\circ F(A',\beta)\circ F(\alpha,B) & \text{condición 2} \\
& = & F_1((\alpha',\beta'))\circ F_1((\alpha,\beta)) & \text{condición 2}
\end{array}
$$

Esto se expresa en la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F_0(A,B) \arrow[d, "F(\alpha,B)"'] \arrow[dr, "F_1((\alpha,\beta))"] & & \\
F_0(A',B) \arrow[r, "F(A',\beta)"] \arrow[d, "F(\alpha',B)"'] & F_0(A',B') \arrow[d, "F(\alpha',B')"'] \arrow[dr, "F_1((\alpha',\beta'))"] & \\
F_0(A'',B) \arrow[r, "F(A'',\beta)"] & F_0(A'',B') \arrow[r, "F(A'',\beta')"] & F_0(A'',B'')
\end{tikzcd}
$$

**Prop 250.** *Dadas las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$*es el objeto exponencial.*

Demostración. Comenzamos demostrando que $\epsilon : \mathbf{D}^{\mathbf{C}}\times\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ definida por

$$
\begin{array}{rcll}
\epsilon_0((F,C)) & = & F(C) & \\
\epsilon_1((F \xrightarrow{\eta} F', C \xrightarrow{\gamma} C')) & = & F'(\gamma)\circ\eta_C & \quad (= \eta_{C'}\circ F(\gamma) \text{ por ser } \eta \text{ natural})
\end{array}
$$

es un funtor. Para ello utilizamos el lema. Claramente $\epsilon(F, \_)$ es funtorial, ya que

$$\begin{array}{rcl} \epsilon(F, \_)(C) & = & \epsilon_0((F, C)) \\ & = & F(C) \\ \epsilon(F, C \xrightarrow{\gamma} C') & = & \epsilon_1((1_F, \gamma)) \\ & = & F(\gamma) \circ 1_{F(C)} \\ & = & F(\gamma) \end{array}$$

es decir, $\epsilon(F, \_) = F$ que es un funtor. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} \epsilon(\_, C)(F) & = & F(C) \\ \epsilon(F \xrightarrow{\eta} F', C) & = & \epsilon_1((\eta, 1_C)) \\ & = & F'(1_C) \circ \eta_C \\ & = & 1_{F'(C)} \circ \eta_C \\ & = & \eta_C \end{array}$$

es decir, $\epsilon(\_, C) =$ "seleccionar la componente $C$ de la transformación natural", que también es funtorial ya que $\epsilon(1_F, C) = (1_F)_C = 1_{F(C)}$ y $\epsilon(\eta' \circ \eta, C) = (\eta' \circ \eta)_C = \eta'_C \circ \eta_C = \epsilon(\eta', C) \circ \epsilon(\eta, C)$.

Como además se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \epsilon_0(F, C) \arrow[r, "\epsilon(\eta, C) = \eta_C"] \arrow[d, "\epsilon(F,\gamma) = F(\gamma)"'] \arrow[dr, "\epsilon_1((\eta,\gamma))"] & \epsilon_0(F', C) \arrow[d, "\epsilon(F',\gamma) = F'(\gamma)"] \\ \epsilon_0(F, C') \arrow[r, "\epsilon(\eta, C') = \eta_{C'}"] & \epsilon_0(F', C') \end{tikzcd}$$

conmuta por naturalidad de $\eta$ y definición de $\epsilon_1$, obtenemos por el lema que $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1)$ es un funtor.

En segundo lugar, debemos probar la existencia de la transpuesta. Dado un funtor $\mathbf{X} \times \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ se define $\mathbf{X} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. Aplicada a un objeto $X \in \mathbf{X}$, $\tilde{F}(X)$ es el siguiente funtor de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{F}(X)_0(C) & = & F(X, C) \\ \tilde{F}(X)_1(C \xrightarrow{\gamma} C') & = & F(X, \gamma) \end{array}$$

que es un funtor gracias al lema, ya que $\tilde{F}(X) = F(X, \_)$. Como $\tilde{F}(X)$ y $\tilde{F}(X')$ son funtores de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, dada una flecha $X \xrightarrow{\tau} X' \in \mathbf{X}$, $\tilde{F}(\tau)$ debe ser una transformación natural de $\tilde{F}(X) \longrightarrow \tilde{F}(X')$. La acción de $\tilde{F}$ sobre las flechas está dada por

$$\tilde{F}(X \xrightarrow{\tau} X')_C = F(X, C) \xrightarrow{F(\tau, C)} F(X', C)$$

con lo cual $\tilde{F}(\tau)$ es, como pretendíamos, una transformación natural de $\tilde{F}(X)$ en $\tilde{F}(X')$, ya que por ser $F$ funtor, la condición 2 del lema lo garantiza:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{F}(X)(C) = F(X,C) \arrow[r, "F(\tau,C) = \tilde{F}(\tau)_C"] \arrow[d, "\tilde{F}(X)(\gamma) = F(X,\gamma)"'] & F(X',C) = \tilde{F}(X')(C) \arrow[d, "F(X',\gamma) = \tilde{F}(X')(\gamma)"] \\
\tilde{F}(X)(C') = F(X,C') \arrow[r, "F(\tau,C') = \tilde{F}(\tau)_{C'}"] & F(X',C') = \tilde{F}(X')(C')
\end{tikzcd}$$

La naturalidad de $\tilde{F}(\tau)$ confirma que efectivamente $\tilde{F}$ es un funtor de $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

El siguiente paso es comprobar que $\epsilon \circ (\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}}) = F$:

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon((\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}})((X,C))) & = & \epsilon_0((\tilde{F}(X), C)) \\
& = & \tilde{F}(X)(C) \\
& = & F(X,C) \\
\epsilon((\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}})((\tau,\gamma))) & = & \epsilon_1((\tilde{F}(\tau), \gamma)) \\
& = & \tilde{F}(X')(\gamma) \circ \tilde{F}(\tau)_C \\
& = & F(X',\gamma) \circ F(\tau, C) \\
& = & F(\tau,\gamma)
\end{array}$$

y con ello la igualdad $\epsilon \circ (\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}}) = F$ vale.

Para ver unicidad de $\tilde{F}$, sea $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ tal que $\epsilon \circ (G \times 1_{\mathbf{C}}) = F : \mathbf{X} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, veamos que $G = \tilde{F}$. Sea $X \in \mathbf{X}$, veamos que $G(X)$ y $\tilde{F}(X)$ son el mismo funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Cuando los aplicamos a un objeto de $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{F}(X)(C) & = & F(X,C) \\
& = & \epsilon_0((G \times 1_{\mathbf{C}})((X,C))) \\
& = & \epsilon_0((G(X), C)) \\
& = & G(X)(C)
\end{array}$$

Cuando lo aplicamos a una flecha de $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{F}(X)(\gamma) & = & F(X,\gamma) \\
& = & F((1_X, \gamma)) \\
& = & \epsilon_1((G \times 1_{\mathbf{C}})((1_X,\gamma))) \\
& = & \epsilon_1((G(1_X), \gamma)) \\
& = & \epsilon_1((1_{G(X)}, \gamma)) \\
& = & G(X)(\gamma) \circ (1_{G(X)})_C \\
& = & G(X)(\gamma)
\end{array}$$

Por lo tanto, $G(X)$ y $\tilde{F}(X)$ son el mismo funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Sea ahora $X \xrightarrow{\tau} X'$, veamos que $G(\tau)$ y $\tilde{F}(\tau)$ son la misma transformación natural de $G(X) = \tilde{F}(X)$ en

$G(X') = \tilde{F}(X')$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\tau)_C &= F(\tau, C) \\
&= F((\tau, 1_C)) \\
&= \epsilon_1((G \times 1_{\mathbf{C}})((\tau, 1_C))) \\
&= \epsilon_!((G(\tau), 1_C)) \\
&= G(X')(1_C) \circ G(\tau)_C \\
&= 1_{G(X')(C)} \circ G(\tau)_C \\
&= G(\tau)_C
\end{aligned}$$

Obteniendo lo que se buscaba $G = \tilde{F}$.

**Ejemplo 251.** $\mathbf{C^1} \cong \mathbf{C}$. *En realidad, es una propiedad general del exponencial: Si* $\mathbf{C}$ *tiene objeto terminal, entonces para todo* $B \in \mathbf{C}$, $B^1$ *existe y* $B^1 \cong B$.

*De todas formas, analizando el caso particular de* $\mathbf{Cat}$, *un objeto de* $\mathbf{C^1}$ *es un funtor de* $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}$, *como* $\mathbf{1}$ *tiene un sólo objeto (*) y la flecha identidad* $1_*$, ***definir ese funtor*** $F$ ***equivale a seleccionar un objeto*** $F(*)$ ***de*** $\mathbf{C}$ *(y* $F(1_*)$ *obligatoriamente es* $1_{F(*)}$*).*

*En* $\mathbf{Set}$ *ocurre lo mismo: hay una correspondencia entre flechas (funciones) de* $1 \to A$ *y los elementos de* $A$. *Esta correspondencia da lugar a que en todas las categorías con objeto terminal se interpreten las flechas de* $1 \to A$ *como "elementos" de* $A$, *a pesar de que uno pueda estar considerando una categoría en que los objetos no tengan elementos.*

**Ejemplo 252.** $\mathbf{C^2} \cong \mathbf{C}^{\to}$. *En efecto, como la categoría* $\mathbf{2}$ *es* $* \xrightarrow{f} \square$, ***definir un funtor de*** $\mathbf{2} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ ***equivale a elegir una flecha*** $F(*) \longrightarrow F(\square)$ ***en*** $\mathbf{C}$, *es decir, un objeto de* $\mathbf{C}^{\to}$. *Una transformación natural* $F \xrightarrow{\eta} G$ *equivale a dos flechas* $\eta_*$ *y* $\eta_\square$ *tales que*

$$\begin{tikzcd}
F(*) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(*) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(\square) \arrow[r, "\eta_\square"] & G(\square)
\end{tikzcd}$$

*que es exactamente la condición para ser flecha en la categoría* $\mathbf{C}^{\to}$.

**Ejercicio 253.** *Si* $\mathbf{J}$ *es la categoría discreta con dos objetos, entonces* $\mathbf{C^J} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

**Ejemplo 254.** *Se generaliza: si* $\mathbf{J}$ *es una categoría discreta, entonces* $\mathbf{C^J} \cong \prod_{j \in \mathbf{J}} \mathbf{C}$.

**Ejemplo 255.** *¿Cuáles son los objetos de la categoría* $\mathbf{D^C}$*? Son funtores de* $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$. *Como dijimos que los objetos de una categoría son identificables con los funtores de* $\mathbf{1}$ *en ella, también podemos decir que los objetos de* $\mathbf{D^C}$ *son funtores de* $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{D^C}$.

**Ejemplo 256.** *¿Cuáles son las flechas de la categoría* $\mathbf{D^C}$*? Son transformaciones naturales entre funtores de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{D}$. *Dijimos que las flechas de una categoría pueden identificarse con funtores de* $\mathbf{2}$ *en ella. Entonces, las flechas de* $\mathbf{D^C}$ *son funtores de* $\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{D^C}$, *o funtores de* $\mathbf{1} \longrightarrow (\mathbf{D^C})^{\mathbf{2}}$, *o funtores* $\mathbf{C} \times \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{D}$ *o funtores* $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D^2}$.

(DECIMOQUINTA CLASE: CATEGORÍAS FUNTORIALES. FUNTORES FULL Y FAITHFUL. EQUIVALENCIA ENTRE CATEGORÍAS)

Una categoría funtorial es una categoría de la forma $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. En cierta forma, todas las categorías lo son ya que $\mathbf{C} \cong \mathbf{C}^{\mathbf{1}}$. Vimos que $\mathbf{C}^{\rightarrow} \cong \mathbf{C}^{\mathbf{2}}$, o sea que $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ es una categoría funtorial. Vimos que los productos de la forma $\prod_{i \in I} \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ no depende de $i \in I$, son categorías funtoriales. Veremos que **Graph** también es una categoría funtorial.

**Ejemplo 257.** *Si recordamos la definición 4, un grafo es una cuadrupla $G = (N, A, dom, cod)$ donde $N$ es un conjunto de nodos, $A$, un conjunto de aristas o arcos dirigidos, y dom y cod, funciones de $A$ en $N$.*

*Es decir, un grafo consiste de dos conjuntos y dos funciones:*

$$A \underset{cod}{\overset{dom}{\rightrightarrows}} N$$

*Hay una correspondencia directa entre grafos y funtores de $* \underset{c}{\overset{d}{\rightrightarrows}} \Box$ en* **Set**. *Llamemos $\Gamma$ a la categoría $* \underset{c}{\overset{d}{\rightrightarrows}} \Box$. El grafo de arriba corresponde al funtor $\Gamma \xrightarrow{G} \mathbf{Set}$ definido por $G(*) = A$, $G(\Box) = N$, $G(d) = dom$ y $G(c) = cod$.*

*De acuerdo a la definición 44, un homomorfismo de grafos es un par de funciones $F_0 : N \to N'$ y $F_1 : A \to A'$ tal que para toda arista $a \in A$, $dom'(F_1(a)) = F_0(dom(a))$ y $cod'(F_1(a)) = F_0(cod(a))$. Gráficamente, esto equivale a que $F_0$ y $F_1$ hagan conmutar los diagramas*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "dom"'] & A' \arrow[d, "dom'"] \\ N \arrow[r, "F_0"] & N' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "cod"'] & A' \arrow[d, "cod'"] \\ N \arrow[r, "F_0"] & N' \end{tikzcd}$$

*En términos de funtores, si además de $\Gamma \xrightarrow{G} \mathbf{Set}$ tenemos $\Gamma \xrightarrow{G'} \mathbf{Set}$ definido por $G'(*) = A'$, $G'(\Box) = N'$, $G'(d) = dom'$ y $G'(c) = cod'$, $F_0$ y $F_1$ hacen conmutar los diagramas*

$$\begin{tikzcd} G(*) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "G(d)"'] & G'(*) \arrow[d, "G'(d)"] \\ G(\Box) \arrow[r, "F_0"] & G'(\Box) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(*) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "G(c)"'] & G'(*) \arrow[d, "G'(c)"] \\ G(\Box) \arrow[r, "F_0"] & G'(\Box) \end{tikzcd}$$

*Esta propiedad equipara a las funciones $F_1$ y $F_0$ con una transformación natural $\eta$, donde $\eta_* = F_1$ y $\eta_\Box = F_0$. Es decir: los grafos son funtores de $\Gamma$ en* **Set**, *y los homomorfismos de grafos, transformaciones naturales entre tales funtores. Luego* $\mathbf{Graph} \cong \mathbf{Set}^{\Gamma}$ *y* **Graph** *es una categoría funtorial.*

**Ejemplo 258.** *La categoría* **Poset** *cuyos objetos son conjuntos parcialmente ordenados y cuyas flechas son funciones monótonas, es CCC. En efecto, el objeto terminal es el poset unitario* $\{*\}$ *con el único orden parcial posible* ($* \leq *$)*. El producto cartesiano de dos posets se obtiene haciendo el producto cartesiano de los conjuntos subyacentes y tomando el orden entre los pares resultantes, componente a componente. El exponencial entre dos posets* $P$ *y* $Q$ *se obtiene considerando el conjunto de funciones monótonas de* $P$ *a* $Q$ *y tomando como orden entre dos tales funciones,* $f \leq g$ *sii* $f(p) \leq_Q g(p)$ *para todo* $p \in P$*. En suma,* **Poset** *es CCC.*

*También vimos que un poset* $P$ *puede ser visto como categoría donde los objetos son los elementos de* $P$*, y una flecha (a lo sumo) entre dos objetos* $x, y \in P$ *expresa que* $x \leq_P y$*. Esto determina un funtor trivial, llamado funtor inclusión* $I$*, de* **Poset** *en* **Cat***.*

*Ahora sabemos que* **Cat** *también es CCC. Más aún, la categoría* **1** *es en realidad un poset, ¡y es el poset 1! O sea que* $I(1) = \mathbf{1}$*. Si consideramos dos posets* $P$ *y* $Q$*, da lo mismo hacer el producto cartesiano de la manera que acabamos de explicar que hacerlo utilizando la definición de producto de categorías. O sea que* $I(P \times Q) = I(P) \times I(Q)$*.*

*Por último, sean* $P$ *y* $Q$ *posets vistos como categorías (por simplicidad, omitimos* $I$*). Un funtor* $F$ *de* $P$ *en* $Q$ *debe enviar flechas* $x \leq_P y \in P$ *en flechas* $F(x) \leq_Q F(y) \in Q$*. Luego, ser un tal funtor equivale a ser una función monótona. Dados dos de esos funtores* $P \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} Q$*, una transformación natural* $F \xrightarrow{\eta} G$ *es una familia de flechas de* $Q$ *indexada por* $x \in P$ *de la forma* $F(x) \xrightarrow{\eta_x} G(x)$ *tales que ciertos cuadrados en* $Q$ *conmutan. Como la conmutatividad en la categoría* $Q$ *no me dice nada (sus flechas son a lo sumo únicas)* $\eta$ *sólo establece que para todo* $x \in P$*,* $F(x) \leq_Q G(x)$*. ¡Esto coincide con el exponencial entre* $P$ *y* $Q$ *en la categoría* **Poset***! O sea que* $I(Q^P) = I(Q)^{I(P)}$*.*

*Conclusión: el funtor de inclusión* **Poset** $\xrightarrow{I}$ **Cat** *preserva la estructura CCC.*

**Ejercicio 259.** *Demostrar, como se afirmó en el ejemplo anterior, que el objeto exponencial de la categoría* **Poset** *se obtiene tomando las funciones monótonas ordenadas punto a punto (*$f \leq g$ *sii* $f(p) \leq_Q g(p)$*).*

**Funtores inyectivos, suryectivos, faithful y full.** Dada una categoría $\mathbf{C}$, la categoría $\mathbf{C} + \mathbf{C}$ consiste de dos copias de $\mathbf{C}$. Existe un único funtor $\mathbf{C} + \mathbf{C} \xrightarrow{\nabla} \mathbf{C}$ (el funtor codiagonal) tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "1\mathbf{C}"'] & \mathbf{C} + \mathbf{C} \arrow[d, "\nabla"] & \mathbf{C} \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "1\mathbf{C}"] \\
 & \mathbf{C} &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

El funtor $\nabla$ no es inyectivo. Dado un objeto $A \in \mathbf{C}$, $\nabla((1, A)) = A = \nabla((2, A))$. Dada una flecha $A \xrightarrow{f} B \in \mathbf{C}$, $\nabla((1, f)) = f = \nabla((2, f))$. Pero dados dos objetos

$A$ y $B$ de la categoría $\mathbf{C}+\mathbf{C}$, la restricción de $\nabla$ a $Hom(A,B)$ sí es inyectiva. A los funtores que satisfacen esta propiedad se los llama **faithful**.

Algo similar puede ocurrir con suryectividad. Sea $\mathbf{Set_{fin}} \xrightarrow{I} \mathbf{Set}$ el funtor inclusión de la categoría $\mathbf{Set_{fin}}$ en la categoría $\mathbf{Set}$. Claramente $I$ no es suryectivo en objetos ni en flechas. Pero dado un par de objetos (conjuntos finitos) $A$ y $B$ de $\mathbf{Set_{fin}}$, la restricción de $I$ a $Hom(A,B)$ es suryectiva. A los funtores que satisfacen esta propiedad se los llama **full**.

**Definición 260.** *Un funtor* $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ *se dice*

- ***(in/sur)yectivo sobre objetos*** *si* $F_0 : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{D}_0$ *es (in/sur)yectiva,*
- ***(in/sur)yectivo sobre flechas*** *si* $F_1 : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{D}_1$ *es (in/sur)yectiva,*
- ***(in/sur)yectivo*** *si es (in/sur)yectivo sobre objetos y sobre flechas,*
- ***faithful*** *si para todo* $A,B \in \mathbf{C}_0$*, la restricción de* $F$ *a* $Hom_{\mathbf{C}}(A,B)$*, denotada* $F_{A,B} : Hom_{\mathbf{C}}(A,B) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(A),F(B))$ *es inyectiva, y*
- ***full*** *si para todo* $A,B \in \mathbf{C}_0$*,* $F_{A,B}$ *es suryectiva.*

**Ejercicio 261.** *¿Qué se puede decir de los funtores* $\iota_1$ *y* $\iota_2$*? ¿Son inyectivos, suryectivos, faithful o full? ¿Es* $[F,G]$ *inyectivo/suryectivo/faithful/full si* $F$ *y* $G$ *lo son?*

**Ejercicio 262.** *Construir el funtor diagonal* $\mathbf{C} \xrightarrow{\triangle} \mathbf{C}\times\mathbf{C}$*. ¿Qué puede decir sobre él, y sobre los funtores* $\pi_1$ *y* $\pi_2$*? ¿Y sobre* $<F,G>$*?*

**Ejercicio 263.** *¿Es el funtor codiagonal* $\mathbf{C}+\mathbf{C} \xrightarrow{\nabla} \mathbf{C}$ *full?*

**Ejercicio 264.** *¿Cuáles de las siguientes combinaciones son posibles para un funtor* $F$*?*

1. $F$ *es inyectivo sobre objetos pero no sobre flechas.*
2. $F$ *es inyectivo sobre flechas pero no sobre objetos.*
3. $F$ *es suryectivo sobre objetos pero no sobre flechas.*
4. $F$ *es suryectivo sobre flechas pero no sobre objetos*
5. $F$ *es inyectivo sobre flechas pero no es faithful.*
6. $F$ *es faithful pero no es inyectivo sobre flechas.*
7. $F$ *es suryectivo sobre flechas pero no es full.*
8. $F$ *es full pero no es suryectivo sobre flechas.*

**Ejemplo 265.** *¿Cuándo es faithful el funtor* $\mathbf{C} \xrightarrow{Hom(A,\_)} \mathbf{Set}$*? Recordemos que aplicado a una flecha* $B \xrightarrow{g} B'$*, se había definido* $Hom(A,B) \xrightarrow{Hom(A,g)} Hom(A,B')$ *por* $Hom(A,g)(f) = g \circ f$*. Que* $Hom(A,\_)$ *sea faithful significa que para todo* $B$ *y* $B'$*, y para todo* $B \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} B'$*, si* $Hom(A,g) = Hom(A,g')$ *entonces* $g = g'$*. La igualdad* $Hom(A,g) = Hom(A,g')$ *equivale a* $\forall x \in Hom(A,B).\ g\circ x = g'\circ x$*. Entonces,* $Hom(A,\_)$ *es faithful sii para todo* $B$ *y* $B'$*, y para todo* $B \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} B'$ *el objeto* $A$ *satisface*

$$(\forall A \xrightarrow{x} B.\ g\circ x = g'\circ x) \Longrightarrow g = g'$$

*Observar la similaridad con la igualdad extensional de funciones (acá* $g$ *y* $g'$ *son flechas). Cuando el objeto* $A$ *satisface esta propiedad se dice que es un* ***generador*** *de* $\mathbf{C}$*.*

*En la categoría* **Set***, por ejemplo, cualquier objeto (salvo el conjunto vacío) es un generador. Por ello,* $\mathbf{Set} \xrightarrow{Hom(A,\_)} \mathbf{Set}$ *es faithful para todo conjunto no vacío* $A$.

Las categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son isomorfas ($\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$) si existen funtores $\mathbf{C} \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $1_{\mathbf{C}} = F \circ E$ y $1_{\mathbf{D}} = E \circ F$. Con frecuencia uno se encuentra frente a dos categorías que, sin ser isomorfas, se asemejan lo suficiente como para considerarse equivalentes.

**Definición 266.** *Las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *son* ***equivalentes*** *(*$\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$*) si existen funtores* $\mathbf{C} \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ *e isomorfismos naturales* $1_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\alpha} F \circ E$ *y* $1_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\beta} E \circ F$.

Como puede apreciarse, a partir de la definición de isomorfismo entre categorías, la de equivalencia se obtiene reemplazando (relajando) las igualdades por isomorfismos naturales. Trivialmente, si $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$ entonces $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

**Prop 267.** *Sea* $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ *un funtor full, faithful y "esencialmente suryectivo" sobre los objetos, es decir, tal que* $\forall D \in \mathbf{D}.\ \exists C \in \mathbf{C}.\ D \cong F(C)$. *Entonces* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

**Ejemplo 268.** *Consideremos el funtor* $F$ *de* $\mathbf{Set}*$ *en* $\mathbf{Pfn}$*:*

- $F_0((a, A)) = A - \{a\}$
- $F_1((a, A) \xrightarrow{f} (b, B)) = \{(x, y) \in f \mid y \neq b\}$.

*En el parcial, se demostró que* $F$ *es un funtor y se definió un funtor* $G$ *de* $\mathbf{Pfn}$ *a* $\mathbf{Set}*$ *tal que* $F \circ G = 1_{\mathbf{Pfn}}$. *Las categorías no son isomorfas ya que* $F$ *no es inyectivo, por ejemplo:* $F_0(a, \{a\}) = \{\} = F_0(b, \{b\})$. *Por ello,* $G \circ F \neq 1_{\mathbf{Set}*}$.

*Pero sin embargo* $\mathbf{Set}* \simeq \mathbf{Pfn}$.

*Se puede ver que* $F$ *es esencialmente suryectivo sobre los objetos. En realidad es más que eso, es suryectivo sobre los objetos: sea* $A \in \mathbf{Set}$, $A = F_0((*, A \cup \{*\}))$ *para cualquier* $* \notin A$.

*Además,* $F$ *es full: sean* $(a, A), (b, B) \in \mathbf{Set}*$ *y* $f \in Hom_{\mathbf{Pfn}}(A - \{a\}, B - \{b\})$, *definimos* $f' \in Hom_{\mathbf{Set}*}((a, A), (b, B))$ *por* $f' = f \cup \{(x, b) \mid x \in A - dominio(f)\}$ *(no confundir con* $dom(f) = A - \{a\}$*). Se comprueba que* $F_1(f') = f$.

*Por último,* $F$ *es faithful: sean* $(a, A), (b, B) \in \mathbf{Set}*$ *y* $f, g \in Hom_{\mathbf{Set}*}((a, A), (b, B))$ *tales que* $F_1(f) = F_1(g)$. *Sea* $x \in A$. *Como* $f$ *y* $g$ *son totales* $f(x)$ *y* $g(x)$ *están definidas. Debemos demostrar que* $f(x) = g(x)$. *Si* $f(x) \neq b$, *entonces* $F_1(f)(x)$ *está definida y* $f(x) = F_1(f)(x) = F_1(g)(x) = g(x)$. *Análogamente, si* $g(x) \neq b$, $g(x) = f(x)$. *El único caso que resta es cuando* $f(x) = b = g(x)$.

*Por la proposición 267,* $\mathbf{Set}* \simeq \mathbf{Pfn}$.

**Ejercicio 269.** *En el parcial, se definió un funtor* $G$ *tal que* $F \circ G = 1_{\mathbf{Pfn}}$. *Demostrar que* $\mathbf{Set}* \simeq \mathbf{Pfn}$ *de forma directa, comprobando que* $G \circ F \cong 1_{\mathbf{Set}*}$.

(Decimosexta clase: Categorías equivalentes. Embedding de Yoneda.)

La clase pasada se formuló y usó la siguiente

**Prop 270.** *Sea* $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ *un funtor full, faithful y "esencialmente suryectivo" sobre los objetos, es decir, tal que* $\forall D \in \mathbf{D}.\ \exists C \in \mathbf{C}.\ D \cong F(C)$*. Entonces* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$*.*

que a continuación demostraremos.

Demostración: Como $F$ es esencialmente suryectivo sobre los objetos, sea $E_0 : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{C}_0$ tal que $\forall D \in \mathbf{D}$. $\exists \beta_D$ iso tal que $D \xrightarrow{\beta_D} F(E_0(D))$. Queremos que $\beta$ sea un isomorfismo natural (como los $\beta_D$ son isos, restaría naturalidad): dada $D \xrightarrow{h} D' \in \mathbf{D}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta_D"] \arrow[d, "h"'] & F(E_0(D)) \arrow[d, "\beta_{D'} \circ h \circ \beta_D^{-1}"] \\ D' \arrow[r, "\beta_{D'}"] & F(E_0(D')) \end{tikzcd}$$

conmuta. ¿Es la flecha $\beta_{D'} \circ h \circ \beta_D^{-1}$ la imagen por $F$ de alguien? Sí, porque $F$ es full. Llamemos $E_1(h)$ a ese alguien, que además es único por ser $F$ faithful. Reescribimos el diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta_D"] \arrow[d, "h"'] & F(E_0(D)) \arrow[d, "F(E_1(h))"] \\ D' \arrow[r, "\beta_{D'}"] & F(E_0(D')) \end{tikzcd}$$

Es fácil comprobar que $\mathbf{D} \xrightarrow{E=(E_0,E_1)} \mathbf{C}$ es un funtor.

**Ejercicio 271.** *Probar que* $E$ *es un funtor.*

Demostrado eso, la conmutatividad del diagrama, unida a que las $\beta_D$ eran isos, expresa que $1_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\beta} F \circ E$ es un isomorfismo natural.

Para hallar $\alpha$, sea $C \in \mathbf{C}$ y consideremos $D = F(C) \in \mathbf{D}$. Sabemos que hay un iso $F(C) = D \xrightarrow{\beta_D} F(E(D))$. Como $F$ es full, existe $\alpha_C$ tal que $F(\alpha_C) = \beta_D$.

**Ejercicio 272.** *Probar que* $\alpha_C$ *es iso.*

Este ejercicio es un caso particular del siguiente resultad: si $F$ es full y faithful y $F(f)$ es iso entonces

**Ejercicio 273.** *Probar que* $1_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\alpha} E \circ F$ *es natural.*

De donde se concluye que $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

En realidad el recíproco también vale:

**Prop 274.** *Sean* $\mathbf{C} \underset{E}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ *tales que* $1_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\alpha} E \circ F$ *y* $1_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\beta} F \circ E$ *son isomorfismos naturales. Entonces* $E$ *y* $F$ *son full, faithful y esencialmente suryectivos.*

Demostración: Sea $D \in \mathbf{D}$, entonces $D \xrightarrow{\beta_D} F(E(D))$ iso, o sea, $D \cong F(E(D))$, luego $F$ es esencialmente suryectivo. Análogamente, $E$ es esencialmente suryectivo.

Sea $C \xrightarrow{f} C' \in \mathbf{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"'] & E(F(C)) \arrow[d, "E(F(f))"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & E(F(C')) \end{tikzcd}$$

conmuta. Por ser $\alpha$ iso, $f = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(F(f)) \circ \alpha_C$. Si ahora $F(f) = F(g)$ se obtiene $f = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(F(f)) \circ \alpha_C = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(F(g)) \circ \alpha_C = g$. Luego, $F$ es faithful. Análogamente, $E$ es faithful.

Sea ahora $F(C) \xrightarrow{h} F(C')$ y $f = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(h) \circ \alpha_C$. Entonces, los diagramas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"'] & E(F(C)) \arrow[d, "E(h)"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & E(F(C')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"'] & E(F(C)) \arrow[d, "E(F(f))"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & E(F(C')) \end{tikzcd}$$

conmutan (el primero por definición de $f$ y el segundo por ser $1_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\alpha} E \circ F$). Por ser $\alpha$ iso, $E(h) = E(F(f))$. Como $E$ es faithful, $F(f) = h$. Luego, $F$ es full. Análogamente, $E$ es full.

**Ejemplo 275.** *Sea un conjunto* $I$*, y consideremos la categoría* $\mathbf{Set}^I$ *cuyos objetos son familias de conjuntos* $(A_i)_{i \in I}$ *y cuyas flechas (de* $(A_i)_{i\in I}$ *en* $(B_i)_{i\in I}$*) son familias de funciones* $(f_i)_{i\in I}$ *tales que* $\forall i \in I. A_i \xrightarrow{f_i} B_i$.

**Ejercicio 276.** *¿Por qué la notación* $\mathbf{Set}^I$*? ¿Es una categoría funtorial?*

*Consideremos también la categoría* $\mathbf{Set}/I$*: sus objetos son funciones* $A \xrightarrow{f} I$ *y sus flechas (de* $A \xrightarrow{f} I$ *en* $B \xrightarrow{g} I$*) son funciones* $A \xrightarrow{h} B$ *tales que* $g \circ h = f$.

*Se puede comprobar que* $\mathbf{Set}^I \simeq \mathbf{Set}/I$*. En efecto, sea* $\mathbf{Set}^I \xrightarrow{F} \mathbf{Set}/I$ *definida por*

$$\begin{array}{rcl} F((A_i)_{i\in I}) & = & \sum_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi} I \\ F((f_i)_{i\in I}) & = & \sum_{i\in I} f_i \end{array}$$

*donde* $\sum_{i\in I} A_i = \{(i,a) \mid i \in I \wedge a \in A_i\}$, $\pi((i,a)) = i$ *y* $\sum_{i\in I} A_i \xrightarrow{\sum_{i\in I} f_i} \sum_{i\in I} B_i$ *se define por* $(\sum_{i\in I} f_i)((i,a)) = (i, f_i(a))$. *Sea además* $\mathbf{Set}/I \xrightarrow{E} \mathbf{Set}^I$ *definida por*

$$\begin{array}{rcl} E(A \xrightarrow{f} I) & = & (f^{-1}(i))_{i\in I} \\ E(f \xrightarrow{h} g) & = & (h/f^{-1}(i))_{i\in I} \end{array}$$

*donde / es el operador de restricción de una función a un subconjunto del dominio.*

**Ejercicio 277.** *¿Es* $1_{\mathbf{Set}^I} = E \circ F$*? ¿Es* $1_{\mathbf{Set}/I} = F \circ E$*?*

*Para cada* $A = (A_i)_{i\in I}$*, sea* $A \xrightarrow{\beta_A} E(F(A))$ *definida por* $\beta_A = ((\beta_A)_i)_{i\in I}$ *donde* $(\beta_A)_i(a) = (i,a)$.

**Ejercicio 278.** *Comprobar que* $A \xrightarrow{\beta_A} E(F(A))$*, que* $\beta_A$ *es un isomorfismo y que* $\beta$ *es natural.*

*También para cada* $A \xrightarrow{f} I$*, sea* $f \xrightarrow{\alpha_f} F(E(f))$ *(en realidad,* $\alpha_f : A \longrightarrow \sum_{i\in I} f^{-1}(i)$*) definida por* $\alpha_f(a) = (f(a), a)$.

**Ejercicio 279.** *Comprobar que* $f \xrightarrow{\alpha_f} F(E(f))$*, que* $\alpha_f$ *es un isomorfismo y que* $\alpha$ *es natural.*

*La solución de estos ejercicios establece que* $1_{\mathbf{Set}^I} \xrightarrow{\beta} E \circ F$ *y* $1_{\mathbf{Set}/I} \xrightarrow{\alpha} F \circ E$ *son isomorfismos naturales. Luego,* $\mathbf{Set}^I \simeq \mathbf{Set}/I$.

**Ejercicio 280.** *Demostrar que* $\mathbf{Set}^I \simeq \mathbf{Set}/I$ *utilizando la proposición 267.*

**Ejercicio 281.** *¿Se cumple que* $\mathbf{Set}^I \cong \mathbf{Set}/I$*?*

**Ejercicio 282.** *Demostrar que una transformación natural es iso sii es una familia de isomorfismos.*

**Ejercicio 283.** *¿Se cumple lo mismo para transformaciones naturales mono? Una transformación natural, ¿es mono sii es una familia de monos? ¿Y para epi?*

**Yoneda.** Recordemos que dado el objeto $C$ de una categoría localmente pequeña $\mathbf{C}$, se obtiene el funtor representable covariante $Hom(C, \_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$:

$$\begin{array}{rcl} Hom(C,\_)(X) & = & Hom(C,X) \\ Hom(C,\_)(X \xrightarrow{f} X') & = & Hom(C,f) \\ & = & h \mapsto f \circ h : Hom(C,X) \longrightarrow Hom(C,X') \end{array}$$

que se suele escribir más brevemente $Hom(C,f)(h) = f \circ h$. Si ahora tomamos dos objetos $C, D \in \mathbf{C}$ tendremos dos funtores de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$: $Hom(C,\_)$ y $Hom(D,\_)$. Es más, dado $C \xrightarrow{h} D$ definimos, para cada $X \in \mathbf{C}$ una función de $Hom(D,X)$ en $Hom(C,X)$ que manda $f$ en $f \circ h$. A esta función ya la conocemos y la habíamos denotado $Hom(h,X)$: el funtor representable contravariante $Hom(\_,X) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ aplicado a la flecha $h$.

Tenemos, entonces, para cada $X \in \mathbf{C}$ una función $Hom(h,X) : Hom(D,X) \longrightarrow Hom(C,X)$. Entonces tenemos una familia de funciones indexada por los objetos de $\mathbf{C}$, la denotamos

$Hom(h,\_)$. Si esta familia es una transformación natural de $Hom(D,\_)$ en $Hom(C,\_)$ tenemos que $k$, definido por $k(C) = Hom(C,\_)$ es un funtor $\mathbf{C^{op}} \longrightarrow \mathbf{Set^C}$.

Veamos que efectivamente es una transformación natural: Sea $X \xrightarrow{f} X'$

$$\begin{tikzcd}
Hom(D,X) \arrow[r, "{Hom(h,X)}"] \arrow[d, "{Hom(D,f)}"'] & Hom(C,X) \arrow[d, "{Hom(C,f)}"] \\
Hom(D,X') \arrow[r, "{Hom(h,X')}"] & Hom(C,X')
\end{tikzcd}$$

conmuta, ya que para todo $g \in Hom(D,X)$,

$$\begin{array}{rcl}
Hom(C,f)(Hom(h,X)(g)) & = & Hom(C,f)(g \circ h) \\
& = & (g \circ h) \circ f \\
& = & g \circ (h \circ f) \\
& = & Hom(h,X')(f \circ g) \\
& = & Hom(h,X')(Hom(D,f)(g))
\end{array}$$

Luego, $k$ es un funtor $\mathbf{C^{op}} \xrightarrow{k} \mathbf{Set^C}$. Es contravariante porque lleva una flecha $C \xrightarrow{h} D$ en una transformación natural $Hom(h,\_) : Hom(D,\_) \longrightarrow Hom(C,\_)$. El funtor $k$ es la transpuesta del bifuntor $Hom(\_,\_) : \mathbf{C^{op}} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

**Ejercicio 284.** *Utilizar el lema bifuntor 249 para demostrar que $Hom(\_,\_)$ es un funtor.*

También se puede transponer el bifuntor con respecto al otro argumento, obteniendo ahora un funtor covariante $y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set^{C^{op}}}$:

$$\begin{array}{rcl}
y(C) & = & Hom(_,C) \\
y(C \xrightarrow{h} D) & = & Hom(_,h)
\end{array}$$

donde $Hom(\_,h)$ es una transformación natural entre $Hom(\_,C)$ y $Hom(\_,D)$ definida por $Hom(X,h)(X \xrightarrow{f} C) = h \circ f$.

**Definición 285.** *El* ***embedding de Yoneda*** *es el funtor $\mathbf{C} \xrightarrow{y} \mathbf{Set^{C^{op}}}$ que lleva $C \in \mathbf{C}$ al funtor representable contravariante:*

$$y(C) = Hom(\_,C) : \mathbf{C^{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

*y $C \xrightarrow{f} D$ a la transformación natural*

$$y(f) = Hom(\_,f) : Hom(\_,C) \longrightarrow Hom(\_,D)$$

(Decimoséptima clase: Lema de Yoneda)

Repasemos el embedding de Yoneda.

Dado un objeto $B \in \mathbf{C}$, vimos el funtor representable contravariante $Hom(\_,B):$ $\mathbf{C^{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ definido por

$$\begin{aligned}
Hom(_,B)(A) &= Hom(A,B)\\
Hom(_,B)(A' \xrightarrow{f} A \in \mathbf{C^{op}}) &= Hom(_,B)(A \xrightarrow{f} A' \in \mathbf{C})\\
&= Hom(f,B)\\
&= Hom(A',B) \xrightarrow{Hom(f,B)} Hom(A,B)\\
&= h \mapsto h \circ f
\end{aligned}$$

Es decir que $Hom(\_,B)$ es un objeto de la categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$. El embedding de Yoneda $y:\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$, aplicado a un objeto $B \in \mathbf{C}$ devuelve precisamente dicho objeto $Hom(\_,B)$ de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$. Para que este embedding sea un funtor es necesario definirlo también sobre las flechas $B \xrightarrow{h} B' \in \mathbf{C}$ de forma que de también una flecha de $y(B) = Hom(\_,B)$ en $y(B') = Hom(\_,B')$, es decir, una transformación natural de $y(B)$ en $y(B')$. Es fácil comprobar que si definimos $y(h)_A = Hom(A,h) = f \mapsto h \circ f$, entonces $y(h)$ es la transformación natural deseada:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \in \mathbf{C^{op}} \quad \Rightarrow & y(B)(A) \arrow[r, "y(h)_A"] \arrow[d, "y(B)(f)"'] & y(B')(A) \arrow[d, "y(B')(f)"] \\
A' & & y(B)(A') \arrow[r, "y(h)_{A'}"] & y(B')(A')
\end{tikzcd}$$

o sea,

$$\begin{tikzcd}
Hom(A,B) \arrow[r, "Hom(A,h)"] \arrow[d, "Hom(f,B)"'] & Hom(A,B') \arrow[d, "Hom(f,B')"] \\
Hom(A',B) \arrow[r, "Hom(A',h)"] & Hom(A',B')
\end{tikzcd}$$

cuya conmutatividad es obvia: sea $g \in Hom(A,B)$, $Hom(f,B')(Hom(A,h)(g)) = h \circ g \circ f = Hom(A',h)(Hom(f,B)(g))$.

**Ejercicio 286.** *Completar la prueba de que el embedding de Yoneda es un funtor: comprobar que preserva identidad y composición.*

**Lema 287.** *(Yoneda) Sea $\mathbf{C}$ localmente pequeña. Para todo objeto $C \in \mathbf{C}$ y funtor $\mathbf{C^{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$ hay un iso $Hom(y(C),F) \xrightarrow{\eta_{C,F}} F(C)$ que es natural en $C$ y en $F$. Además, $\eta_{C,F}(\mu) = \mu_C(1_C)$ y $\eta^{-1}_{C,F}(a)_X(h) = F(h)(a)$.*

Observemos que tanto $F$ como $y(C)$ son funtores de $\mathbf{C^{op}}$ en $\mathbf{Set}$, por lo tanto, son objetos en la categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ y por lo tanto, $Hom(y(C),F)$ tiene sentido, en realidad es, $Hom_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}}(y(C), F)$. Tanto $Hom(y(C), F)$ como $F(C)$ son objetos de **Set**, o sea que $\eta_{C,F}$ es una función, que el lema dice que es biyectiva y natural en $C$ y en $F$. Es decir que, si dejamos por un momento de lado dicha naturalidad, el lema dice que hay exactamente una transformación natural del funtor $y(C)$ (es decir, del funtor $Hom(\_, C)$) en $F$ por cada elemento de $F(C)$.

¿Cuál sería la transformación natural de $Hom(\_, C)$ en $F$ asociada a $a \in F(C)$? Tal transformación natural $\nu$ debe ser una familia de funciones $Hom(X, C) \xrightarrow{\nu_X} F(X)$, una función $\nu_X$ para cada $X \in {\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}_0 = \mathbf{C}_0$. Sea $h \in Hom(X, C)$, debemos definir $\nu_X(h) \in F(X)$. Como $F \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ es contravariante, $F(C) \xrightarrow{F(h)} F(X)$, luego podemos definir $\nu_X(h) = F(h)(a)$.

Veamos que $\nu$ es natural: sea $X \xrightarrow{f} X' \in \mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ (o $X' \xrightarrow{f} X \in \mathbf{C}$), debemos ver que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Hom(X,C) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "Hom(f,C)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
Hom(X',C) \arrow[r, "\nu_{X'}"] & F(X')
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Sea $h \in Hom(X, C)$:

$$
\begin{array}{rcl}
\nu_{X'}(Hom(f,C)(h)) & = & \nu_{X'}(h \circ f) \\
& = & F(h \circ f)(a) \\
& = & (F(f) \circ F(h))(a) \\
& = & F(f)(F(h)(a)) \\
& = & F(f)(\nu_X(h))
\end{array}
$$

O sea que $\nu$ es una transformación natural de $Hom(\_, C)$ en $F$ construida a partir de $a \in F(C)$. Por ello, se define $\eta^{-1}_{C,F}(a) = \nu$, es decir, $\eta^{-1}_{C,F}(a)_X(h) = F(h)(a)$.

Recíprocamente, dada una transformación natural $Hom(\_, C) \xrightarrow{\mu} F$ se obtiene fácilmente un elemento en $F(C)$. Basta con instanciarla en $C$ mismo: $Hom(C, C) \xrightarrow{\mu_C} F(C)$ obtenemos $\mu_C(1_C) \in F(C)$. Por ello, se define $\eta_{C,F}(\mu) = \mu_C(1_C)$.

No hay que dejarse engañar por la notación: hemos definido $\eta_{C,F}$ y $\eta^{-1}_{C,F}$ pero no hemos demostrado que son inversas mutuas. Debemos demostrar que $\eta_{C,F} \circ \eta^{-1}_{C,F} = 1_{F(C)}$ y $\eta^{-1}_{C,F} \circ \eta_{C,F} = 1_{Hom(y(C),F)}$.

Demostrar que $\eta_{C,F} \circ \eta^{-1}_{C,F} = 1_{F(C)}$ es sencillo:

$$
\begin{array}{rcl}
\eta_{C,F}(\eta^{-1}_{C,F}(a)) & = & \eta^{-1}_{C,F}(a)_C(1_C) \\
& = & F(1_C)(a) \\
& = & 1_{F(C)}(a) \\
& = & a
\end{array}
$$

Para ver que $\eta^{-1}_{C,F} \circ \eta_{C,F}$ conviene observar primero que si $y(C) \xrightarrow{\mu} F$ es transformación natural, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom(C,C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "Hom(h,C)"'] & F(C) \arrow[d, "F(h)"] \\ Hom(X,C) \arrow[r, "\mu_X"] & F(X) \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $h \in Hom(X,C)$. En particular, obtenemos que $F(h)(\mu_C(1_C)) = \mu_X(Hom(h,C)(1_C)) = \mu_X(h)$.

Observemos entonces: toda $\mu \in Hom(y(C),F)$ satisface $\mu_X(h) = F(h)(\mu_C(1_C))$.

Ahora sí

$$\begin{aligned} \eta^{-1}_{C,F}(\eta_{C,F}(\mu))_X(h) &= F(h)(\eta_{C,F}(\mu)) \\ &= F(h)(\mu_C(1_C)) \\ &= \mu_X(h) \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $X$ y todo $h$, $\eta^{-1}_{C,F} \circ \eta_{C,F} = 1_{Hom(y(C),\,F)}$. Luego, $\eta_{C,F}$ y $\eta^{-1}_{C,F}$ son, tal como la notación lo sugiere, inversas mutuas.

Habiendo entendido la biyección $\eta_{C,F}$, resta comprobar su naturalidad, cosa que habíamos decidido dejar momentáneamente de lado. Que $\eta_{C,F}$ sea natural en $C$ significa que para todo par de objetos $C, D \in \mathbf{C}$, y toda flecha $C \xrightarrow{h} D \in \mathbf{C^{op}}$ ($D \xrightarrow{h} C \in \mathbf{C}$) el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom(y(C),F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "Hom(y(h),F)"'] & F(C) \arrow[d, "F(h)"] \\ Hom(y(D),F) \arrow[r, "\eta_{D,F}"] & F(D) \end{tikzcd}$$

conmuta. Que $\eta_{C,F}$ sea natural en $F$ significa que para todo par de funtores $F, G \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$, y toda transformación natural $F \xrightarrow{\alpha} G$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom(y(C),F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "Hom(y(C),\alpha)"'] & F(C) \arrow[d, "\alpha_C"] \\ Hom(y(D),F) \arrow[r, "\eta_{C,G}"] & G(C) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Para ver la conmutatividad del primer diagrama, sea $\mu \in Hom(y(C), F)$:

$$\begin{array}{rcl} \eta_{D,F}(Hom(y(h), F)(\mu)) & = & \eta_{D,F}(\mu \circ y(h)) \\ & = & \eta_{D,F}(\mu \circ Hom(\_, h)) \\ & = & (\mu_D \circ Hom(D, h))(1_D) \\ & = & \mu_D(Hom(D, h))(1_D)) \\ & = & \mu_D(h) \\ & = & F(h)(\mu_C(1_C)) \\ & = & F(h)(\eta_{C,F}(\mu)) \end{array}$$

Para ver la conmutatividad del segundo diagrama, sea nuevamente $\mu \in Hom(y(C), F)$:

$$\begin{array}{rcl} \eta_{C,G}(Hom(y(C), \alpha)(\mu)) & = & \eta_{C,G}(\alpha \circ \mu) \\ & = & (\alpha_C \circ \mu_C)(1_C) \\ & = & \alpha_C(\mu_C(1_C)) \\ & = & \alpha_C(\eta_{C,F}(\mu)) \end{array}$$

Concluyendo de esta manera la prueba del lema de Yoneda.

**Ejercicio 288.** *Si $F$ es full y faithfull, entonces $F(A) \cong F(B)$ implica $A \cong B$.*

Como el embedding de Yoneda es full y faithful (cosa que demostraremos pronto), este ejercicio, permite utilizar Yoneda de la siguiente manera: si quiero demostrar que $A \cong B$ demuestro $y(A) \cong y(B)$.

**Ejemplo 289.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría cartesiana cerrada. Entonces $(A^B)^C \cong A^{B\times C}$.*

*Demostrar esto usando la definición de exponencial y de producto puede ser muy complicado. Gracias a Yoneda, sin embargo, resulta consecuencia de que $y((A^B)^C) \cong y(A^{B\times C})$. Para demostrar este isomorfismo, sea $X \in \mathbf{C}$:*

$$\begin{array}{rcl} y((A^B)^C)(X) & = & Hom(X, (A^B)^C) \\ & \cong & Hom(X \times C, A^B) \\ & \cong & Hom((X \times C) \times B, A) \\ & \cong & Hom(X \times (B \times C), A) \\ & \cong & Hom(X, A^{B\times C}) \\ & = & y(A^{B\times C})(X) \end{array}$$

Como son isomorfismos en **Set** significan biyecciones y son fáciles de probar porque conocemos cómo manipular funciones. Para deducir de $y((A^B)^C)(X) \cong y(A^{B\times C})(X)$ que $y((A^B)^C) \cong y(A^{B\times C})$ necesitamos ver que cada uno de las ecuaciones anteriores son “naturales”.

Por ejemplo, para la primera ecuación se debe demostrar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X & Hom(X, (A^B)^C) \arrow[r, "h \mapsto \epsilon \circ (h \times 1_C)"] \arrow[d, "h \mapsto h \circ f"'] & Hom(X \times C, A^B) \arrow[d, "h \mapsto h \circ (f \times 1_C)"] \\ X' \arrow[u, "f"] & Hom(X', (A^B)^C) \arrow[r, "h \mapsto \epsilon \circ (h \times 1_C)"] & Hom(X' \times C, A^B) \end{tikzcd}$$

que equivale a demostrar $\epsilon \circ (h \times 1_C) \circ (f \times 1_C) = \epsilon \circ ((h \circ f) \times 1_C)$.

Para la segunda ecuación y para la cuarta, es similar. Por último, para la tercera, se debe demostrar la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
Hom((X \times C) \times B, A) \arrow[r, "h \mapsto h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2>"] \arrow[d, "h \mapsto h \circ ((f \times 1_C) \times 1_B)"] & Hom(X \times (B \times C), A) \arrow[d, "h \mapsto h \circ (f \times 1_{B\times C})"] \\
Hom((X' \times C) \times B, A) \arrow[r, "h \mapsto h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2>"] & Hom(X' \times (B \times C), A)
\end{tikzcd}$$

que equivale a demostrar

$$h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \circ (f \times 1_{B\times C}) = h \circ ((f \times 1_C) \times 1_B) \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2>$$

que es sencillo pues

$$\begin{aligned}
h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \circ (f \times 1_{B\times C}) &= h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \circ <f \circ \pi_1, \pi_2> \\
&= h \circ <<f \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \\
&= h \circ ((f \times 1_C) \times 1_B) \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2>
\end{aligned}$$

usando las ecuaciones que vimos cuando definimos producto.

**Ejercicio 290.** *Demostrar (utilizando el lema de Yoneda), que en toda categoría cartesiana cerrada* $\mathbf{C}$*:*

- $B^1 \cong B$
- $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$
- *si* $\mathbf{C}$ *tiene además coproductos:* $(A \times B) + (A \times C) \cong A \times (B + C)$.

(Decimoctava clase: Aplicaciones de Yoneda)

**Prop 291.** *El embedding de Yoneda* $\mathbf{C} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ *es full y faithful.*

Dados $C, D \in \mathbf{C}$, debemos comprobar que $y$ restringido a $Hom(C, D)$ es inyectivo y suryectivo (sobre $Hom(y(C), y(D))$). Podemos aplicar el lema de Yoneda tomando $F = y(D)$, eso nos da un isomorfismo $Hom(y(C), y(D)) \underset{\eta^{-1}_{C,y(D)}}{\overset{\eta_{C,y(D)}}{\rightleftarrows}} y(D)(C) = Hom(C, D)$. Demostraremos que $y$ (restringido a $Hom(C, D)$) satisface $y = \eta^{-1}_{C,y(D)}$.

Por el lema de Yoneda, $\eta^{-1}_{C,y(D)}(a)_X(h) = y(D)(h)(a)$ para $a \in y(D)(C) = Hom(C, D)$ y $h \in Hom(X, C)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \eta^{-1}_{C,y(D)}(a)_X(h) &= y(D)(h)(a) \\ &= Hom(h, D)(a) \\ &= a \circ h \end{aligned}$$

Por otro lado, por ser $y$ funtor, $y(a)$ es una transformación natural de $y(C)$ en $y(D)$, es decir, $y(a) = Hom(\_, a) : Hom(\_, C) \longrightarrow Hom(\_, D)$. Para poder aplicarlo a $h$ seleccionamos la componente correspondiente a $X$:

$$\begin{aligned} y(a)_X(h) &= Hom(X, a)(h) \\ &= a \circ h \\ &= \eta^{-1}_{C,y(D)}(a)_X(h) \end{aligned}$$

Por lo tanto $y(a) = \eta^{-1}_{C,y(D)}(a)$ y luego, $y = \eta^{-1}_{C,y(D)}$ que, por Yoneda, es iso, es decir, biyectiva. Luego $y$ es full y faithfull.

Observar que $y$ es además inyectivo sobre objetos: si $y(C) = y(D)$, entonces $1_C \in Hom(C, C) = y(C)(C) = y(D)(C) = Hom(C, D)$. Entonces, $C = D$.

¡Menos mal! La palabra *embedding* está reservada para funtores full y faithful, que sean inyectivos sobre objetos. Es un alivio haber podido comprobar que no fue un error llamar a $y$ el *embedding* de Yoneda.

Una categoría se dice **completa** si tiene todos los límites pequeños. Demostraremos que para toda categoría localmente pequeña $\mathbf{C}$, la categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ es completa. Para ello, recordemos el concepto de límite.

**Ejercicio 292.** *Alternativamente, demostrarlo en forma directa. Ya vimos que si* $\mathbf{D}$ *tiene productos binarios, también lo tiene* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$*. Demostrar que* $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ *tiene objeto terminal y ecualizadores. ¿Vale en general? Es decir, si* $\mathbf{D}$ *tiene objeto terminal, ¿también lo tiene* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$*? ¿y para ecualizadores?*

**Límites, revisitado.** Recordemos que dadas dos categorías $\mathbf{J}$ y $\mathbf{C}$

- un diagrama de tipo $\mathbf{J}$ en $\mathbf{C}$ es un funtor $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$
- un cono a $D$ consiste de un objeto $C \in \mathbf{C}$ y una familia de flechas $C \xrightarrow{c_j} D(j)$ en $\mathbf{C}$ indexada por los objetos $j \in \mathbf{J}_0$ tal que todos los triángulos formados por estas flechas con las del diagrama $D$ conmutan: $D(\alpha) \circ c_i = c_j$ para todo $i \xrightarrow{\alpha} j \in \mathbf{J}_1$.

- los conos forman una categoría $\mathbf{Cone}(D)$, donde una flecha $h$ del cono

$$C \xrightarrow{c_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

  al cono

$$C' \xrightarrow{c'_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

  es una flecha $C \xrightarrow{h} C' \in \mathbf{C}$ tal que para todo $j \in \mathbf{J}_0$ el triángulo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

  conmuta.
- un límite $\varprojlim_j D(j)$ para $D$ es un objeto terminal de la categoría $\mathbf{Cone}(D)$.

Veamos que

**Prop 293.** *El funtor representable covariante $Hom(A, \_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.*

Sea $D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$ un funtor, $D' = Hom(A, \_) \circ D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Set}$ también lo es. Sea $C \xrightarrow{c_j} D(j)$ para $j \in \mathbf{J}_0$ un cono, también $Hom(A, C) \xrightarrow{Hom(A, c_j)} D'(j)$ para $j \in \mathbf{J}_0$ lo es ya que $Hom(A, \_)$ preserva la conmutatividad de los triángulos del cono $C \xrightarrow{c_j} D(j)$ por ser un funtor. Por la misma razón, $Hom(A, \_)$ es también un funtor de $\mathbf{Cone}(D)$ en $\mathbf{Cone}(D')$. Si $L = \varprojlim_j D(j)$ existe con proyecciones $L \xrightarrow{p_j} D(j)$, $L' = Hom(A, L) \in \mathbf{Cone}(D')$ y $L' \xrightarrow{p'_j} D'(j)$ con $p'_j = Hom(A, p_j)$ que es, por lo ya explicado, un cono.

Para ver que $L'$ es el límite de $D'$, sea $B \xrightarrow{f_j} D'(j)$ para $j \in \mathbf{J}_0$ un cono en $\mathbf{Cone}(D')$, es decir, tal que $f_j = D'(\alpha) \circ f_i = Hom(A, D(\alpha)) \circ f_i$ para todo $i \xrightarrow{\alpha} j \in \mathbf{J}$. Como estamos en $\mathbf{Set}$, para cada $b \in B$, $f_j(b) \in D'(j) = Hom(A, D(j))$, es decir, $A \xrightarrow{f_j(b)} D(j) \in \mathbf{C}$, y $f_j(b) = Hom(A, D(\alpha))(f_i(b)) = D(\alpha) \circ f_i(b)$. Por lo tanto, para cada $b \in B$, $A \xrightarrow{f_j(b)} D(j)$ $(j \in \mathbf{J}_0)$ es un cono en $\mathbf{Cone}(D)$ y por ser $L$ el límite, existe una única flecha $A \xrightarrow{h_b} L$ tal que $f_j(b) = p_j \circ h_b$. Definimos la función $h : B \longrightarrow L'$ por $h(b) = h_b$. Es claro que es una flecha en $\mathbf{Cone}(D')$: $f_j = p'_j \circ h$ ya que para todo $b \in B$, $p'_j(h(b)) = p'_j(h_b) = Hom(A, p_j)(h_b) = p_j \circ h_b = f_j(b)$.

Esto demuestra la existencia de la flecha $h$ del cono $B \xrightarrow{f_j} D'(j)$ en el cono $L' \xrightarrow{p'_j} D'(j)$. Para ver unicidad, sea $h' : B \longrightarrow L'$ tal que $f_j = p'_j \circ h$ para todo $j \in \mathbf{J}_0$. Luego, para todo $b \in B$, $f_j(b) = p'_j(h'(b)) = Hom(A, p_j)(h'(b)) = p_j \circ h'(b)$. Por ser $L$ un límite existe una única flecha $h_b$ que satisface $f_j(b) = p_j \circ h_b$, luego $h'(b) = h_b = h(b)$. Por lo tanto, $h$ es única.

Esto finaliza la demostración de que $Hom(A,\_)$ preserva límite. Suele escribirse

$$Hom(A, \varprojlim_j D(j)) = \varprojlim_j Hom(A, D(j)).$$

**Definición 294.** *Una categoría se dice* ***completa*** *si tiene todos los límites pequeños, es decir, para* $\mathbf{J}$ *categoría pequeña.*

A continuación demostramos la proposición

**Prop 295.** *Para toda categoría localmente pequeña* $\mathbf{C}$*, la categoría* $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ *es completa.*

Sea $\mathbf{J}$ pequeña y $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$. El límite de $D$, si existe, es un objeto de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$, es decir, un funtor:

$$\varprojlim_j D(j) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

Por el lema de Yoneda, si tuviéramos ese funtor, para cada objeto $C \in \mathbf{C}$ tendríamos un isomorfismo natural

$$(\varprojlim_j D(j))(C) \cong Hom(y(C), \varprojlim_j D(j))$$

Como el funtor representable covariante preserva límites, tendríamos

$$Hom(y(C), \varprojlim_j D(j)) = \varprojlim_j Hom(y(C), D(j)) \cong \varprojlim_j D(j)(C)$$

donde el segundo isomorfismo natural es por aplicar otra vez Yoneda para cada $j$.

Estos isomorfismos nos indican cómo definir el funtor

$$\varprojlim_j D(j) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$(\varprojlim_j D(j))(C) = \varprojlim_j D(j)(C)$$

Para definir la acción del funtor sobre las flechas, debemos conseguir

$$(\varprojlim_j D(j))(C \xrightarrow{f} C' \in \mathbf{C}) : \varprojlim_j D(j)(C') \longrightarrow \varprojlim_j D(j)(C)$$

Sean

$$L = \varprojlim_j D(j)(C)$$

y

$$L' = \varprojlim_j D(j)(C')$$

y sean $L \xrightarrow{c_j} D(j)(C)$ y $L' \xrightarrow{c'_j} D(j)(C')$ sus respectivos conos. Como $D(j) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es un funtor contravariante, $D(j)(f) : D(j)(C') \longrightarrow D(j)(C)$. Luego, $D(j)(f) \circ c'_j : L' \longrightarrow D(j)(C)$ para todo $j$. Por ser $L$ límite, existe una única flecha $L' \xrightarrow{h_f} L$ tal que $D(j)(f) \circ c'_j = c_j \circ h_f$ para todo $j$. Definimos

$$\varprojlim_j D(j)(f) = h_f$$

**Ejercicio 296.** *Demostrar que si para todo $j \in \mathbf{J}_0$ $D(j) \cong D'(j)$ entonces*

$$\varprojlim_j D(j) \cong \varprojlim_j D'(j)$$

*¿En qué parte de la prueba anterior hemos usado esto?*

**Límites, más abstractamente.** Dado el producto de categorías $\mathbf{C} \times \mathbf{J}$, se define el funtor proyección $\mathbf{C} \times \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$. Su transpuesta es el funtor $\mathbf{C} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$. Para cada $C \in \mathbf{C}$, el funtor $\Delta(C) : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$ es el funtor constante $C$:

$$\begin{aligned} \Delta(C)(i) &= C \\ \Delta(C)(i \xrightarrow{\alpha} j) &= \Delta(C)(\alpha) \\ &= 1_C \end{aligned}$$

Dado $C \xrightarrow{f} C'$, $\Delta(f)$ es una transformación natural de $\Delta(C)$ en $\Delta(C')$. Estos funtores son constantes $C$ y $C'$ respectivamente. Por ello, la transformación natural es la constante $f$, es decir, $\Delta(f)_i = f$ para todo $i \in \mathbf{J}_0$.

**Ejercicio 297.** *Comprobar que $\Delta$ es la transpuesta del funtor primera proyección.*

Sea ahora un funtor $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ y una transformación natural $\Delta(C) \xrightarrow{\nu} D$. Como $\Delta(C)(i) = C$, todas las componentes de $\nu$ tienen la forma: $C \xrightarrow{\nu_i} D(i)$. Por naturalidad, tenemos además

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\alpha"'] & \in \mathbf{J} & \Rightarrow & C \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d, "1_C"'] & D(i) \arrow[d, "D(\alpha)"] \\ j & & & C \arrow[r, "\nu_j"] & D(j) \end{tikzcd}$$

es decir, una transformación natural $\Delta(C) \xrightarrow{\nu} D$ es un cono

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\nu_j"] \arrow[d, "\nu_i"'] & D(j) \\ D(i) \arrow[ur, "D(\alpha)"'] & \end{tikzcd}$$

Una flecha entre dos conos $\nu : \Delta(C) \longrightarrow D$ y $\nu' : \Delta(C') \longrightarrow D$ en realidad es una transformación natural constante, de la forma $\Delta(h) : \Delta(C) \longrightarrow \Delta(C')$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Delta(C) \arrow[rr, "\Delta(h)"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \Delta(C') \arrow[dl, "\nu'"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

conmuta. Un límite $L = \lim\limits_{\overleftarrow{j}} D(j)$ es un cono $\nu : \Delta(L) \longrightarrow D$ tal que para todo otro cono $\nu' : \Delta(C) \longrightarrow D$ existe un único $\Delta(h) : \Delta(C) \longrightarrow \Delta(L)$ tal que $\nu' = \nu \circ \Delta(h)$.

(DECIMONOVENA CLASE: DEFINICIÓN DE ADJUNCIÓN)

Primero vimos la definición de isomorfismo en general, que para el caso de las categorías dice que dos categorías **C** y **D** son isomorfas ($\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$) cuando existen dos funtores $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $1_{\mathbf{C}} = G \circ F$ y $1_{\mathbf{D}} = F \circ G$.

Luego vimos una relación más relajada: **C** y **D** son equivalentes ($\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$) cuando existen dos funtores $\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ y dos isomorfismos naturales $1_{\mathbf{C}} \cong G \circ F$ y $1_{\mathbf{D}} \cong F \circ G$. Los isomorfismos naturales son los isomorfismos de la categorías exponenciales $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$. Eso explica el uso de $\cong$ entre funtores para expresar $\simeq$ entre categorías.

A continuación vamos por una relación aún más relajada: la de adjunción. En realidad, no es una relación entre categorías sino entre funtores, entre los funtores $F$ y $G$ de los párrafos anteriores. Funtores adjuntos no son funtores inversos (porque volveríamos a la relación $\cong$ entre categorías), ni los llamados pseudo-inversos (porque volveríamos a la relación $\simeq$ entre categorías).

Veamos un ejemplo. Consideremos el monoide formado por el conjunto de las palabras $\Sigma^*$ sobre un alfabeto dado $\Sigma$, con la operación de concatenación y la cadena vacía como elemento neutro. A este monoide se lo llama el **monoide libre generado** por el conjunto $\Sigma$. Una letra puede ser vista como una cadena de longitud 1, esto determina la función de inclusión $i : \Sigma \longrightarrow \Sigma^*$ definida por $i(a) = a$ (inserción de los generadores). Son los generadores, ya que toda palabra puede escribirse como concatenación de los mismos.

Dado un monoide $M$ y definida una función de $f : \Sigma \longrightarrow M$, hay una única manera de extender $f$ a $\Sigma^*$ de modo de que dicha extensión sea un homomorfismo de monoides. En efecto, debe cumplir $f(a_1a_2 \ldots a_{n-1}) = f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \ldots \cdot f(a_{n-1})$ para ser homomorfismo.

A continuación vamos a expresar esta propiedad de los monoides libres categóricamente. No es del todo elemental ya que las afirmaciones que hemos hecho mezclan dos categorías: la de los conjuntos (por ejemplo, cuando decimos que $f : \Sigma \longrightarrow M$) y la de los monoides. Afortunadamente conocemos un funtor, el de olvido, que va de $\mathbf{Mon} \xrightarrow{U} \mathbf{Set}$.

También tenemos el funtor $\mathbf{Set} \xrightarrow{F} \mathbf{Mon}$ que devuelve el monoide libremente generado por un conjunto: $F(\Sigma) = \Sigma^*$ y $F(\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma') = F(\Sigma) \xrightarrow{f^*} F(\Sigma')$ definido por $f^*(a_1a_2 \ldots a_{n-1}) = f(a_1)f(a_2) \ldots f(a_{n-1})$. Es muy fácil comprobar que es efectivamente un funtor.

La función de inclusión mencionada más arriba es una flecha en **Set**: $\Sigma \xrightarrow{i_\Sigma} U(F(\Sigma))$. La extensión de $f$ se formula así: dado un monoide $M$ y definida una flecha en **Set** $\Sigma \xrightarrow{f} U(M)$ existe una única $F(\Sigma) \xrightarrow{g} M \in \mathbf{Mon}$ tal que $U(g) \circ i = f$.

Gráficamente:

$$\Sigma \xrightarrow{i_\Sigma} U(F(\Sigma))$$

y para toda $\Sigma \xrightarrow{f} U(M) \in \mathbf{Set}$, existe un único $F(\Sigma) \xrightarrow{g} M$ tal que

$$F(\Sigma) \xrightarrow{\quad g \quad} M \quad \in \mathbf{Mon}$$

$$\begin{tikzcd}
U(F(\Sigma)) \arrow[r, "U(g)"] & U(M) \in \mathbf{Set} \\
\Sigma \arrow[u, "i_\Sigma"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Los funtores $F$ y $U$ no son inversos ni pseudo-inversos mutuos. Pero en algún sentido cada uno hace una trabajo contrario al que hace el otro: $F$ construye un monoide bastante natural a partir de un conjunto, y $U$ un conjunto muy natural a partir de un monoide.

Decimos que $F$ y $U$ forman una adjunción.

**Definición 298.** *Una **adjunción** entre los funtores* $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ *es una transformación natural* $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$ *con la siguiente propiedad (llamada la propiedad universal de* $\eta$*): dados* $C \in \mathbf{C}$*,* $D \in \mathbf{D}$ *y* $C \xrightarrow{f} U(D)$ *existe una única* $F(C) \xrightarrow{g} D$ *tal que* $f = U(g) \circ \eta_C$*.*

Gráficamente:

$$C \xrightarrow{\eta_C} U(F(C))$$

y para toda $C \xrightarrow{f} U(D) \in \mathbf{C}$, existe un único $F(C) \xrightarrow{g} D$ tal que $f = U(g) \circ \eta_C$, es decir, el diagrama

$$F(C) \xrightarrow{\quad g \quad} D \qquad \in \mathbf{D}$$

$$\begin{tikzcd}
U(F(C)) \arrow[r, "U(g)"] & U(D) \quad \in \mathbf{C} \\
C \arrow[u, "\eta_C"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta

Terminología: $F$ se llama el adjunto izquierdo de $U$ y $U$ el derecho de $F$, y $\eta$ es la unidad o unit de la adjunción. Se escribe $F \dashv U$ para decir que $F$ es el adjunto izquierdo de $U$.

Es una generalización de la noción de equivalencia entre categorías (que a su vez es una generalización de la de isomorfismo entre categorías): más adelante veremos que si $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $1_{\mathbf{C}} \cong U \circ F$ y $1_{\mathbf{D}} \cong F \circ U$, entonces $F \dashv U$.

Una diferencia importante, sin embargo, es que mientras que isomorfismo y equivalencia son relaciones entre categorías, en el caso de adjunciones se trata de una relación entre los funtores. Lo que interesa es si un cierto funtor tiene adjunto a derecha o a izquierda, y cuál es ese adjunto.

La propiedad universal de $\eta$ implica que la función

$$\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$$

definida por $\phi(g) = U(g) \circ \eta_C$ es un isomorfismo.

Esta biyección se suele escribir con la siguiente regla bidireccional:

$$\frac{F(C) \longrightarrow D}{C \longrightarrow U(D)}\ \phi$$

y frecuentemente se omite $\phi$.

**Ejemplo 299.** *Sea* $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *el funtor diagonal*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(C) & = & (C, C) \\ \Delta(C \xrightarrow{f} C') & = & (C, C) \xrightarrow{(f,f)} (C', C') \end{array}$$

*¿Tiene este funtor adjunto a derecha? ¿Cuál sería ese adjunto?*

*Debería ser un funtor* $R : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ *tal que para todo* $C \in \mathbf{C}$ *y* $(X, Y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *haya una biyección*

$$\frac{\Delta(C) \longrightarrow (X, Y)}{C \longrightarrow R(X, Y)}$$

*es decir,*

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(C, R(X, Y)) & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}(\Delta(C), (X, Y)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((C, C), (X, Y)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}}(C, X) \times Hom_{\mathbf{C}}(C, Y) \end{array}$$

*Es decir,* $R(X, Y) = X \times Y$ *es el adjunto a derecha de* $\Delta$*. Escribimos* $\Delta \dashv \times$*.*

*Tenemos que definir* $\eta_C : C \longrightarrow R(\Delta(C))$*, es decir,* $\eta_C : C \longrightarrow C \times C$*. Definimos* $\eta_C = <1_C, 1_C>$*. Debemos comprobar que dado* $C \xrightarrow{f} X \times Y$ *existe una única flecha* $(C, C) \xrightarrow{(f_1, f_2)} (X, Y)$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \times C \arrow[r, "R((f_1, f_2))"] & X \times Y \\ C \arrow[u, "\eta_C"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

*conmuta. En efecto, dada* $C \xrightarrow{f} X \times Y$ *existen* $f_1$ *y* $f_2$ *únicas tales que* $f = <f_1, f_2>$*. Para ellas se cumple*

$$\begin{array}{rcl} (f_1 \times f_2) \circ \eta_C & = & (f_1 \times f_2) \circ <1_C, 1_C> \\ & = & <f_1 \circ 1_C, f_2 \circ 1_C> \\ & = & <f_1, f_2> \\ & = & f \end{array}$$

*O sea que $\Delta$ tiene adjunto a derecha si y sólo si* $\mathbf{C}$ *tiene productos binarios.*

Habíamos observado que si $F \dashv U$ entonces

$$\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$$

definida por $\phi(g) = U(g) \circ \eta_C$ es un isomorfismo. La siguiente proposición dice que el mismo es natural.

**Prop 300.** *Si $F \dashv U$, entonces para todo $C \in \mathbf{C}$ y $D \in \mathbf{D}$ la función $\phi_{C,D}(g) = U(g) \circ \eta_C$ es un isomorfismo $\phi_{C,D} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ que es natural en $C$ y en $D$.*

La propiedad universal de $\eta$ dice que dado $f \in Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ existe un único $g \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tal que $f = \phi_{C,D}(g)$. La existencia equivale a suryectividad. La unicidad equivale a inyectividad. Por lo tanto $\phi_{C,D}$ es iso.

Para la naturalidad en $C$, sea $h : C' \longrightarrow C$, queremos comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(h), D)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\phi_{C',D}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C', U(D))
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $f : F(C) \longrightarrow D$:

$$\begin{array}{rcl}
Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))(\phi_{C,D}(f)) & = & Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))(U(f) \circ \eta_C) \\
& = & U(f) \circ \eta_C \circ h \\
& = & U(f) \circ U(F(h)) \circ \eta_{C'} \\
& = & U(f \circ F(h)) \circ \eta_{C'} \\
& = & \phi_{C',D}(f \circ F(h)) \\
& = & \phi_{C',D}(Hom_{\mathbf{D}}(F(h), D)(f))
\end{array}$$

Para la naturalidad en $D$, sea $g : D \longrightarrow D'$, queremos comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D') \arrow[r, "\phi_{C,D'}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D'))
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $f : F(C) \longrightarrow D$:

$$\begin{array}{rcl}
Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))(\phi_{C,D}(f)) & = & U(g) \circ \phi_{C,D}(f) \\
& = & U(g) \circ U(f) \circ \eta_C \\
& = & U(g \circ f) \circ \eta_C \\
& = & \phi_{C,D'}(g \circ f) \\
& = & \phi_{C,D'}(Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)(f))
\end{array}$$

Luego, $\phi_{C,D}$ es natural en $C$ y $D$.

(VIGÉSIMA CLASE: ADJUNCIONES, DEFINICIÓN EQUIVALENTE)

El recíproco de la última proposición también vale, dando lugar a una definición de la noción de adjunción simétrica en $F$ y $U$.

**Prop 301.** *Si $\phi_{C,D} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ es natural en $C$ y en $D$, entonces $F \dashv U$ con $\eta_C = \phi(1_{F(C)})$.*

Sea $\phi_{C,D}$ una biyección $\phi_{C,D} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ natural en $C$ y en $D$. Naturalidad en $D$ es la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D') \arrow[r, "\phi_{C,D'}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D'))
\end{tikzcd}$$

que expresa que para todo $F(C) \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} D'$, $\phi_{C,D'}(g \circ f) = U(g) \circ \phi_{C,D}(f)$. Naturalidad en $C$ es la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(h), D)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\phi_{C',D}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C', U(D))
\end{tikzcd}$$

que expresa que para todo $C' \xrightarrow{h} C \xrightarrow{f} U(D)$, $\psi_{C',D}(f \circ h) = \psi_{C,D}(f) \circ F(h)$, donde $\psi_{C,D} = \phi^{-1}_{C,D}$.

Para construir el isomorfismo natural $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$. Consideremos $D = F(C)$. La biyección $\phi_{C,F(C)} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), F(C)) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(F(C)))$ nos permite definir $\eta_C = \phi_{C,F(C)}(1_{F(C)})$.

La naturalidad de $\eta$ se expresa por

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & U(F(C)) \arrow[d, "U(F(f))"] \\
C' \arrow[r, "\eta_{C'}"] & U(F(C'))
\end{tikzcd}$$

para toda flecha $C \xrightarrow{f} C'$. Para demostrarla veamos que $U(F(f)) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ f$

$$\begin{aligned}
U(F(f)) \circ \eta_C &= U(F(f)) \circ \phi_{C,F(C)}(1_{F(C)}) \\
&= \phi_{C,F(C')}(F(f) \circ 1_{F(C)}) \\
&= \phi_{C,F(C')}(F(f))
\end{aligned}$$

Resta ver que $\phi_{C,F(C')}(F(f)) = \eta_{C'} \circ f$. Para comprobarlo usamos que $\phi_{C,F(C')}$ es una biyección:

$$\begin{array}{rcl} \psi_{C,F(C')}(\eta_{C'} \circ f) & = & \psi_{C,F(C')}(\phi_{C',F(C')}(1_{F(C')}) \circ f) \\ & = & \psi_{C',F(C')}(\phi_{C',F(C')}(1_{F(C')})) \circ F(f) \\ & = & 1_{F(C')} \circ F(f) \\ & = & F(f) \end{array}$$

Resta ver la propiedad universal de $\eta$: para todo $f : C \longrightarrow U(D)$ existe un único $g : F(C) \longrightarrow D$ (sí: $f = \phi_{C,D}(g)$ que al ser biyectiva garantiza existencia y unicidad) tal que $U(g) \circ \eta_C = f$. Veamos:

$$\begin{array}{rcl} U(g) \circ \eta_C & = & U(g) \circ \phi_{C,F(C)}(1_{F(C)}) \\ & = & \phi_{C,D}(g \circ 1_{F(C)}) \\ & = & \phi_{C,D}(g) \\ & = & f \end{array}$$

La equivalencia entre $F \dashv U$ y la naturalidad de $Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ es muy importante: proporciona una definición de adjunción, simétrica en $F$ y $U$.

**Definición 302.** *Dados* $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$*, se dice que* $F$ *es adjunto izquierdo de* $U$ *y* $U$ *adjunto derecho de* $F$ *si existe un isomorfismo de* $Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ *natural en* $C$ *y en* $D$*. Se lo sigue denotando* $F \dashv U$*.*

A veces se explicita el isomorfismo natural $\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$, y a veces también su inverso $\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) : \psi$. Además del unit $\eta_C = \phi(1_{F(C)}) : C \longrightarrow U(F(C))$ está el dual, counit, $\epsilon_D = \psi(1_{U(D)}) : F(U(D)) \longrightarrow D$.

**Ejercicio 303.** *Inspirandose en la definición asimétrica de adjunción (de la clase pasada), dé otra también asimétrica en la que los roles de* $F$ *y de* $U$ *estén intercambiados.*

Veamos que es una relación más relajada que la de equivalencia.

**Prop 304.** *Si* $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ *tal que* $1_{\mathbf{C}} \cong U \circ F$ *y* $1_{\mathbf{D}} \cong F \circ U$*, entonces* $F \dashv U$*.*

Sean $\mu$ y $\nu$ isomorfismos naturales de $1_{\mathbf{C}}$ a $U \circ F$ y de $1_{\mathbf{D}}$ a $F \circ U$ respectivamente. Es decir, para todo $C$ y $D$, $C \xrightarrow{\mu_C} U(F(C))$ y $D \xrightarrow{\nu_D} F(U(D))$ son isos.

Sea $F(C) \xrightarrow{h} D$, para definir $\phi_{C,D}(h) : C \longrightarrow U(D)$ componemos $U(h) : U(F(C)) \longrightarrow U(D)$ con $\mu_C$ así $\phi_{C,D}(h) = U(h) \circ \mu_C$.

Sabemos que $\mu$ y $\nu$ son naturales, es decir, para todo $C \xrightarrow{f} C'$ y $D \xrightarrow{g} D'$ los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "f"'] & U(F(C)) \arrow[d, "U(F(f))"] \\ C' \arrow[r, "\mu_{C'}"] & U(F(C')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\nu_D"] \arrow[d, "g"'] & F(U(D)) \arrow[d, "F(U(g))"] \\ D' \arrow[r, "\nu_{D'}"] & F(U(D')) \end{tikzcd}$$

Esto debería ayudarnos a comprobar que $\phi_{C,D}$ también es natural. Primero vemos que $\phi_{C,D}$ es natural en $C$ (observar que los funtores $Hom_{\mathbf{D}}(F(\_), D)$ y $Hom_{\mathbf{C}}(\_, U(D))$ son contravariantes:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \\ Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\phi_{C',D}"] \arrow[u, "Hom_{\mathbf{D}}(F(f), D)"] & Hom_{\mathbf{C}}(C', U(D)) \arrow[u, "Hom_{\mathbf{C}}(f, U(D))"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, ya que para $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D)$:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(f, U(D))(\phi_{C',D}(h)) & = & Hom_{\mathbf{C}}(f, U(D))(U(h) \circ \mu_{C'}) \\ & = & U(h) \circ \mu_{C'} \circ f \\ & = & U(h) \circ U(F(f)) \circ \mu_C \\ & = & U(h \circ F(f)) \circ \mu_C \\ & = & \phi_{C,D}(h \circ F(f)) \\ & = & \phi_{C,D}(Hom_{\mathbf{D}}(F(f), D)(h)) \end{array}$$

por la naturalidad de $\mu$. Ahora vemos que $\phi_{C,D}$ es natural en $D$:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))"] \\ Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D') \arrow[r, "\phi_{C,D'}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D')) \end{tikzcd}$$

también conmuta ya que para $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))(\phi_{C,D}(h)) & = & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))(U(h) \circ \mu_C) \\ & = & U(g) \circ U(h) \circ \mu_C \\ & = & U(g \circ h) \circ \mu_C \\ & = & \phi_{C,D'}(g \circ h) \\ & = & \phi_{C,D'}(Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)(h)) \end{array}$$

Resta ver que $\phi_{C,D}$ es biyectiva. Sean $h, h' \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tales que $\phi_{C,D}(h) = \phi_{C,D}(h')$, es decir, $U(h) \circ \mu_C = U(h') \circ \mu_C$. Como $\mu_C$ es iso, $U(h) = U(h')$. Por lo tanto, $F(U(h)) = F(U(h'))$. Por ser $\nu$ natural, los diagramas

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\nu_{F(C)}"] \arrow[d, "h"'] & F(U(F(C))) \arrow[d, "F(U(h))"] \\ D \arrow[r, "\nu_D"] & F(U(D)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\nu_{F(C)}"] \arrow[d, "h'"'] & F(U(F(C))) \arrow[d, "F(U(h'))"] \\ D \arrow[r, "\nu_D"] & F(U(D)) \end{tikzcd}$$

conmutan. Como $\nu_D$ y $\nu_{F(C)}$ son iso, $F(U(h)) = F(U(h'))$ implica $h = h'$.

**Ejercicio 305.** *Demostrar que $\phi_{C,D}$ es suryectiva.*

Sea $f \in Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$. Debemos demostrar que existe $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tal que $f = \phi_{C,D}(h) = U(h) \circ \mu_C$. Sabemos que $f \circ \mu_C^{-1} : U(F(C)) \longrightarrow U(D)$. Como $F$ y $U$ realizan la equivalencia entre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, por la proposición 274 son full. En particular, $U$ lo es, luego existe $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tal que $U(h) = f \circ \mu_C^{-1}$, luego $f = U(h) \circ \mu_C$.

**Ejemplo 306.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con productos binarios, sea $A \in \mathbf{C}$ y consideremos el funtor $\_ \times A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$:*

$$\begin{array}{rcl} (\_ \times A)(X) & = & X \times A \\ (\_ \times A)(X \xrightarrow{f} Y) & = & f \times 1_A : X \times A \longrightarrow Y \times A \end{array}$$

*¿Tiene adjunto derecho? Debería ser un funtor $U : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que haya un isomorfismo natural $\phi$*

$$Hom_{\mathbf{C}}(X \times A, Y) \cong Hom_{\mathbf{C}}(X, U(Y))$$

*Observamos que $U$ debería ser*

$$\begin{array}{rcl} U(Y) & = & Y^A \\ U(Y \xrightarrow{g} Z) & = & g^A : Y^A \longrightarrow Z^A \end{array}$$

**Ejercicio 307.** *Definir $g^A$ y $\phi$ y completar la prueba de que efectivamente $\phi$ es un isomorfismo natural. ¿Cuál es la counit?*

Concluimos que $\_ \times A \dashv \_^A$.

**Ejemplo 308.** *Sea $\mathbf{C} \xrightarrow{!} \mathbf{1}$ el único funtor a la categoría $\mathbf{1}$. ¿Cuándo tiene adjunto a derecha?*

*Debería ser un objeto $\mathbf{1} \xrightarrow{U} \mathbf{C}$ de la categoría $\mathbf{C}$ tal que haya un iso natural*

$$Hom_{\mathbf{1}}(!(C), *) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$$

*es decir, entre*

$$Hom_{\mathbf{1}}(*, *) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$$

*Para ello, $Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$ debe tener un único elemento, para cada $C \in \mathbf{C}$. Es decir, $U(*) \in \mathbf{C}$ debe ser un objeto terminal de $\mathbf{C}$.*

*Por ello, un adjunto a derecha de ! es un (funtor que devuelve constantemente el mismo) objeto terminal.*

**Ejercicio 309.** *¿Qué sería un adjunto a izquierda del funtor ! del ejemplo anterior?*

**Prop 310.** *Los adjoints son únicos (salvo isomorfismo). Dado $\mathbf{C} \underset{U,V}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $F \vdash U$ y $F \dashv V$, entonces $U \cong V$.*

Para todo $C \in \mathbf{C}$ y $D \in \mathbf{D}$

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) & \cong & Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \\ & \cong & Hom_{\mathbf{C}}(C, V(D)) \end{array}$$

ambos iso naturales. Es decir, $y(U(D)) \cong y(V(D))$. Por Yoneda, $U(D) \cong V(D)$ también natural en $D$. Por lo tanto $U \cong V$.

(Vigesimoprimera clase: Más ejemplos de adjunciones)

La clase pasada vimos algunos ejemplos de adjunciones. Uno de ellos era que el adjunto a derecha de $\mathbf{C} \xrightarrow{!} \mathbf{1}$ es el funtor $U(*) = 1$ donde 1 es el objeto terminal de $\mathbf{C}$ (si existe):

$$Hom_{\mathbf{1}}(*,*) = Hom_{\mathbf{1}}(!(C),*) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$$

Es decir, $! \dashv 1$. Ahora, el funtor $!$, ¿tiene adjunto a izquierda? Para responder la pregunta, hay que encontrar $F$ tal que

$$Hom_{\mathbf{1}}(*,*) = Hom_{\mathbf{1}}(*, !(D)) \cong Hom_{\mathbf{1}}(F(*), D)$$

hay que elegir $F(*)$ tal que haya una única flecha de $F(*)$ en $D$. Tal objeto es el objeto inicial de $\mathbf{C}$: $F(*) = 0$. Es decir, $0 \dashv !$.

También vimos que si se define $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ como el funtor diagonal, $\Delta \dashv \times$:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}(\Delta(C), (X,Y)) & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((C,C),(X,Y)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}}(C,X) \times Hom_{\mathbf{C}}(C,Y) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}}(C, X \times Y) \end{array}$$

Es decir, $\Delta \dashv \times$.

De la misma manera se obtiene $+ \dashv \Delta$:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(X+Y, C) & = & Hom_{\mathbf{C}}(X,C) \times Hom_{\mathbf{C}}(Y,C) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((X,Y),(C,C)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((X,Y),\Delta(C)) \end{array}$$

Acabamos de obtener $+ \dashv \Delta \dashv \times$, donde $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathbf{2}}$. Se puede generalizar:

**Ejemplo 311.** *Sea* $\mathbf{J}$ *una categoría y* $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ *el funtor diagonal definido por*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(C)(j) & = & C \\ \Delta(C)(\alpha) & = & 1_C \\ \Delta(f)_j & = & f \end{array}$$

*Entonces, el operador de límite y colímite son las adjunciones a derecha e izquierda respectivamente del funtor* $\Delta$*:*

$$\lim_{\rightarrow} \dashv \Delta \dashv \lim_{\leftarrow}$$

Revisando los ejemplos, podemos ver cuáles son las units y counits. En el caso de $! \dashv 1$, el unit es $\mu : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow 1\circ!$, o sea, $\mu_C : C \longrightarrow 1(!(C)) = 1(*) = 1$ es la única flecha al objeto terminal. El counit es $\epsilon : ! \circ 1 \longrightarrow 1_{\mathbf{1}}$, es decir, $\epsilon_* : * \longrightarrow *$ es la flecha $1_*$, identidad de $*$.

En el caso de $0 \dashv !$, el unit es $\mu : 1_{\mathbf{1}} \longrightarrow ! \circ 0$, o sea, $\mu_* : * \longrightarrow *$, la identidad de $*$. El counit es $\epsilon : 0\circ! \longrightarrow 1_{\mathbf{C}}$, o sea, $\epsilon_C : 0 = 0(*) = 0(!(C)) \longrightarrow C$ es la única flecha desde el objeto inicial.

Para $\Delta \dashv \times$, el unit es $\mu : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow \times\circ\Delta$, es decir, $\mu_C : C \longrightarrow C \times C$, $\mu_C = <1_C, 1_C>$. El counit es $\epsilon : \Delta \circ \times \longrightarrow 1_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}$, es decir, $\epsilon_{(X,Y)} : (X \times Y, X \times Y) \longrightarrow (X,Y)$, o sea, las proyecciones $\epsilon_{(X,Y)} = (\pi_1^{X,Y}, \pi_2^{X,Y})$.

**Ejercicio 312.** *Hallar el unit y counit de la adjunción* $+ \dashv \Delta$.

**Ejercicio 313.** *Detallar*

$$\varinjlim \dashv \Delta \dashv \varprojlim$$

*para el caso de ecualizadores y coecualizadores. Dar el unit y el counit.*

**Ejercicio 314.** *¿Qué es en general el unit y el counit de la adjunción*

$$\varinjlim \dashv \Delta?$$

*¿Qué es en general el unit y el counit de la adjunción*

$$\Delta \dashv \varprojlim?$$

**Ejemplo 315.** *Sean $P$ y $Q$ conjuntos con preórdenes vistos como categorías, y sean $P \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} Q$ dos funtores (funciones que preservan sus preórdenes) tales que $F \dashv U$. Entonces $Hom_Q(F(a), x) \cong Hom_P(a, U(x))$ equivale a $F(a) \leq x \Leftrightarrow a \leq U(x)$, que se escribe también con la regla bidireccional*

$$\frac{F(a) \leq x}{a \leq U(x)}$$

*Se infiere que $F(p)$ es el menor de los $x$ que satisfacen que $p \leq U(x)$. En efecto, leyendo la regla de abajo hacia arriba, $F(p) \leq x$ para todos tales $x$. Además, la unit dice que hay una flecha $p \leq U(F(p))$, por lo tanto $F(p)$ es un tal $x$. De la misma manera, se obtiene que $U(q)$ es el mayor de los $y$ tales que $F(y) \leq q$.*

Las adjunciones entre preórdenes se llaman conexiones de Galois.

**Ejemplo 316.** *Un ejemplo particular de conexión de Galois es la inclusión $U : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$. La función $\lceil \_ \rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es adjunto izquierdo de $U$, es decir, $\lceil \_ \rceil \dashv U$. El unit $\mu_x : x \leq U(\lceil x \rceil)$ expresa que $x \leq \lceil x \rceil$. El counit $\epsilon_i : \lceil U(i) \rceil \leq i$ expresa que $i \leq i$.*

**Ejercicio 317.** *¿Cuál es el adjunto derecho de $U$? ¿Cuál el unit? ¿y el counit?*

**Ejemplo 318.** *Dada una función $f : A \longrightarrow B$, hay una adjunción $im(f) \dashv f^{-1}$. Tenemos $\mathcal{P}(A) \underset{f^{-1}}{\overset{im(f)}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(B)$ definidos por:*

$$\begin{array}{rcl}
im(f)(X \in \mathcal{P}(A)) & = & \{f(x) \mid x \in X\} \in \mathcal{P}(B) \\
im(f)(X \subseteq X') & = & im(f)(X) \subseteq im(f)(X') \\
f^{-1}(Y \in \mathcal{P}(B)) & = & \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \in \mathcal{P}(A) \\
f^{-1}(Y \subseteq Y') & = & f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')
\end{array}$$

*Debemos comprobar que $Hom_{\mathcal{P}(B)}(im(f)(X), Y) \cong Hom_{\mathcal{P}(A)}(X, f^{-1}(Y))$, es decir,*

$$\frac{im(f)(X) \subseteq Y}{X \subseteq f^{-1}(Y)}$$

*que vale claramente.*

**Ejemplo 319.** *Dado un lenguaje de primer orden, sea $Form(x_1, \ldots, x_{n-1})$ el conjunto de fórmulas de la lógica de primer orden que a lo sumo tienen a $x_1, \ldots, x_{n-1}$ como variables libres. Este conjunto es una categoría con la relación de consecuencia lógica $\vdash$ entre fórmulas.*

*Se puede definir la operación $* : Form(x_1, \ldots, x_{n-1}) \longrightarrow Form(x_1, \ldots, x_n)$ por*

$$\begin{aligned} *(\phi) &= \phi \\ *(\phi \vdash \psi) &= \phi \vdash \psi \end{aligned}$$

*es el funtor de inclusión, que surge de observar simplemente que si las variables libres de $\phi$ se encuentran en $x_1, \ldots, x_{n-1}$, también se encuentran en $x_1, \ldots, x_n$.*

*En el sentido opuesto, sea ahora $\phi \in Form(x_1, \ldots, x_n)$, si cuantificamos sobre $x_n$ obtenemos fórmulas en $Form(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ya que la variable $x_n$ deja de estar libre: $\forall x_n.\phi, \exists x_n.\phi \in Form(x_1, \ldots, x_{n-1})$.*

*Las reglas lógicas para los cuantificadores son equivalentes a:*

$$\frac{*\phi \vdash \psi \in Form(x_1, \ldots, x_n)}{\phi \vdash \forall x_n.\psi \in Form(x_1, \ldots, x_{n-1})}$$

*y a:*

$$\frac{\exists x_n.\phi \vdash \psi \in Form(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\phi \vdash *\psi \in Form(x_1, \ldots, x_n)}$$

*Estas equivalencias son adjunciones. Tenemos entonces $\exists \dashv * \dashv \forall$.*

**Ejercicio 320.** *¿Qué expresan el unit y counit de $* \dashv \forall$? ¿Y los de $\exists \dashv *$?*

Así como tenemos las secuencia $\exists \dashv * \dashv \forall$, y $+ \dashv \Delta \dashv \times$, y $0 \dashv ! \dashv 1$, pueden existir secuencias de mayor longitud aún.

**Ejemplo 321.** *Se pueden definir cuatro funtores $\mathbf{Cat} \underset{F,R}{\overset{U,V}{\rightleftarrows}} \mathbf{Set}$ tales que $V \dashv F \dashv U \dashv R$, donde $U$ es el funtor de olvido dado por*

$$\begin{aligned} U(\mathbf{C}) &= \mathbf{C}_0 \\ U((F_0, F_1)) &= F_0 \end{aligned}$$

**Ejercicio 322.** *Encontrar $R : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ tal que $U \dashv R$.*

**Ejercicio 323.** *Encontrar $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ tal que $F \dashv U$. Encontrar $V : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Set}$ tal que $V \dashv F$.*

¿Podemos estirar la secuencia $\ldots V \dashv F \dashv U \dashv R \ldots$? El siguiente resultado dice que no:

**Prop 324.** *Los adjuntos derechos preservan límites (RAPL = Right Adjoint Preserve Limits). Los adjuntos izquierdos preservan colímites.*

Sean $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $F \dashv U$ y sea $D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{D}$ un diagrama tal que $\varprojlim_j D(j)$ existe en $\mathbf{D}$. Para todo $X \in \mathbf{C}$ tenemos:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{C}}(X, U(\varprojlim_j D(j))) &\cong Hom_{\mathbf{D}}(F(X), \varprojlim_j D(j)) \\ &\cong \varprojlim_j Hom_{\mathbf{D}}(F(X), D_j) \\ &\cong \varprojlim_j Hom_{\mathbf{C}}(X, U(D_j)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{C}}(X, \varprojlim_j U(D_j)) \end{aligned}$$

de donde por Yoneda, $U(\varprojlim_j D(j)) \cong \varprojlim_j U(D_j)$.

Por dualidad, adjuntos a izquierda preserva colímites.

Volviendo a la pregunta anterior a la proposición, podría responderse negativamente la posibilidad de estirar la secuencia $\ldots V \dashv F \dashv U \dashv R \ldots$ si se comprueba que $R$ no preserva colímites y $V$ no preserva límites.

(VIGESIMOSEGUNDA CLASE: MÓNADAS)

Dada una adjunción $F \dashv U$ podemos definir un **endofuntor** $\mathbf{C} \xrightarrow{T} \mathbf{C}$ por $T = U \circ F$. Por lo que sabemos de adjunciones, hay una transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow T$$

a la que llamábamos unit. De la transformación natural (counit) $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$, se obtiene $\epsilon_{F(C)} : F(U(F(C))) \longrightarrow F(C)$, y de ahi, aplicando el funtor $U$, la flecha $U(\epsilon_{F(C)}) : U(F(U(F(C)))) \longrightarrow U(F(C))$, es decir, $U(\epsilon_{F(C)}) : T(T(C)) \longrightarrow T(C)$, que es natural, la escribimos

$$\mu : T \circ T \longrightarrow T.$$

¿Qué propiedades conocemos de la terna $(T, \eta, \mu)$? Por empezar, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} T \circ T \circ T \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\ T \circ T \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd}$$

donde $(T\mu)_C$ se define por $(T\mu)_C = T(\mu_C) : T(T(T(C))) \longrightarrow T(T(C))$ y $\mu_{TC}$ por $\mu_{TC} = \mu_{T(C)} : T(T(T(C))) \longrightarrow T(T(C))$.

En efecto, demostrar la conmutatividad de este diagrama significa demostrar, para todo $C \in \mathbf{C}$, la igualdad

$$\mu_C \circ T(\mu_C) = \mu_C \circ \mu_{T(C)}$$

es decir,

$$U(\epsilon_{F(C)}) \circ U(F(U(\epsilon_{F(C)}))) = U(\epsilon_{F(C)}) \circ U(\epsilon_{F(U(F(C)))})$$

Para demostrar esta igualdad, primero observamos que por ser $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$ natural, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(U(F(U(F(C))))) \arrow[r, "\epsilon_{F(U(F(C)))}"] \arrow[d, "F(U(\epsilon_{F(C)}))"'] & F(U(F(C))) \arrow[d, "\epsilon_{F(C)}"] \\ F(U(F(C))) \arrow[r, "\epsilon_{F(C)}"] & F(C) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\epsilon_{F(C)} \circ F(U(\epsilon_{F(C)})) = \epsilon_{F(C)} \circ \epsilon_{F(U(F(C)))}$, y si aplicamos $U$ a ambos miembros obtenemos trivialmente la igualdad deseada.

Otra propiedad que conocemos sobre $(T, \eta, \mu)$ es la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

donde, como antes, $(T\eta)_C$ se define por $(T\eta)_C = T(\eta_C) : T(C) \longrightarrow T(T(C))$ y $\eta_{TC}$ por $\eta_{TC} = \eta_{T(C)} : T(C) \longrightarrow T(T(C))$.

Demostrar la conmutatividad de este diagrama significa demostrar, para todo $C \in \mathbf{C}$, las igualdades

$$\mu_C \circ \eta_{T(C)} = 1_{T(C)} = \mu_C \circ T(\eta_C)$$

es decir,

$$U(\epsilon_{F(C)}) \circ \eta_{U(F(C))} = 1_{U(F(C))} = U(\epsilon_{F(C)}) \circ U(F(\eta_C))$$

Recordemos la definición del counit $\epsilon_D = \psi_{U(D),D}(1_{U(D)})$, donde $\psi_{U(D),D} = \phi^{-1}_{U(D),D}$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} 1_{U(D)} & = & \phi_{U(D),D}(\epsilon_D) \\ & = & U(\epsilon_D) \circ \eta_{U(D)} \end{array}$$

Tomando $D = F(C)$ obtenemos la primera igualdad. La segunda sale del mismo modo:

$$\begin{array}{rcl} 1_{F(C)} & = & \psi_{C,F(C)}(\eta_C) \\ & = & \epsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) \end{array}$$

aplicando $U$ a ambos miembros.

La terna $(T, \eta, \mu)$ es una **mónada**:

**Definición 325.** *Una **mónada** sobre la categoría $\mathbf{C}$, consiste de un endofuntor $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ y dos transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow T$ y $\mu : T \circ T \longrightarrow T$ tales que $\mu \circ \mu_T = \mu \circ T\mu$ y $\mu \circ \eta_T = 1_T = \mu \circ T\eta$.*

Las igualdades equivalen a la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
T \circ T \circ T \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\
T \circ T \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}$$

que expresa que $\mu$ es asociativa, y

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

que expresa que $\eta$ es neutro de $\mu$ a izquierda y a derecha. Esto explica el uso de la palabra mónada, por su proximidad con monoide. A la transformación natural $\mu$ se la llama multiplicación.

**Ejemplo 326.** *En un poset $P$, una mónada es una función monótona $T : P \longrightarrow P$. El unit $\eta$ dice que $x \leq T(x)$ y $\mu$, que $T(T(x)) \leq T(x)$, ambas para todo $x \in P$. Esta dos desigualdades implican que $T(T(x)) = T(x)$, es decir, $T$ es idempotente, el funtor $T \circ T = T$. Un operador idempotente $T : P \longrightarrow P$ tal que $x \leq T(x)$ se llama* ***operador de clausura****.*

*Un ejemplo es si $P = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, por ejemplo, y $T(A \subseteq P) =$ el menor subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ que contiene a $A$.*

*Otro ejemplo es si $P = \mathcal{P}(X \times X)$ y $T(\rightarrow \subseteq P) = \xrightarrow{+}$, la clausura transitiva de $\rightarrow$, o $T'(\rightarrow \subseteq P) = \xrightarrow{*}$, la clausura reflexiva y transitiva de $\rightarrow$.*

*Por ser idempotente, $T$ posee puntos fijos: sus puntos fijos son exactamente los que están en la imagen de $im(T)(P)$ de $T$. Esto permite reconstruir una adjunción $F \dashv U$ tal que $T = U \circ F$ de la siguiente manera. Sea $K = im(T)(P)$ (el conjunto de puntos fijos de $T$) y $U : K \longrightarrow P$ la inclusión. Sea $F : P \longrightarrow K$ definida por $F(x) = T(x)$. Claramente obtenemos $T = U \circ F$.*

*Si $p \leq U(k)$ entonces $F(p) \leq F(U(k)) = k$ por ser $U(k)$ un punto fijo de $T$.*

*Si $F(p) \leq k$, entonces $p \leq T(p) = U(F(p)) \leq U(k)$.*

*Luego, $F \dashv U$.*

**Ejercicio 327.** *Sea $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ el funtor definido por $\mathcal{P}(X \xrightarrow{f} Y) = im(f) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$. Sea $\eta_X : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $\eta_X(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ y $\mu_X : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $\mu_X(\alpha) = \bigcup \alpha \in \mathcal{P}(X)$.*

*Comprobar la naturalidad de $\eta$ y $\mu$, y que $(\mathcal{P}, \{\_\}, \bigcup)$ es una mónada.*

*¿Proviene esta mónada de una adjunción?*

**Ejercicio 328.** *Vimos que $\Delta \dashv \times$ era una adjunción. Identificar el unit y la multiplicación de la mónada $\times \circ \Delta$. Identificar el significado de la conmutatividad de los diagramas. Realizar la misma tarea para la mónada $\Delta \circ +$, $\forall \circ *$ y $* \circ \exists$.*

**Ejercicio 329.** *Lo mismo para la adjunción $F \dashv U$ para $\mathbf{Set} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{Mon}$.*

**Ejemplo 330.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con coproducto y objeto terminal. Sea $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ definido por*

$$\begin{aligned} T(C) &= C + 1 \\ T(C \xrightarrow{f} C') &= [\iota_1 \circ f, \iota_2] : C + 1 \longrightarrow C' + 1 \end{aligned}$$

*El funtor $T$ es una mónada. Para ello definimos $\eta_C : C \longrightarrow C + 1$ por $\eta_C = \iota_1$ y $\mu_C : (C + 1) + 1 \longrightarrow C + 1$ por $\mu_C = [1_{C+1}, \iota_2]$.*

*Resta demostrar la naturalidad de $\eta$ y $\mu$ y la conmutatividad de los diagramas.*

**Ejemplo 331.** *Un caso particular del ejemplo anterior es cuando se considera $\mathbf{C} = \lambda\!\rightarrow$, con un tipo $1$ (llamado en algunos lenguajes el tipo unit).*

*La mónada $T(C) = C + 1$ es una versión simplificada de la mónada error que se utiliza en programación funcional para programar en presencia de errores sin necesidad de hacer constantemente explícita la propagación de errores.*

(Vigesimotercera clase: Mónadas en la programación)

Las mónadas en programación están muy bien explicadas en numerosos trabajos científicos, por ejemplo, "The essence of functional programming" de Philip Wadler (1992).

En el ejemplo que sigue, usaré la notación que se obtiene con las mónadas como las hemos definido, es decir, una mónada es un funtor $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ junto a dos transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow T$ y $\mu : T \circ T \longrightarrow T$ tales que ciertos diagramas, que expresan la asociatividad de la "multiplicación" $\mu$ y la "neutralidad" de $\eta$, conmutan.

Las mónadas han sido utilizadas con mucho éxito en programación funcional para obtener código más reusable. Sigue un ejemplo.

Sea el sencillo lenguaje de expresiones dado por la gramática

$$
\begin{array}{lcl}
< exp > & ::= & i \qquad i \in \mathbb{Z} \\
 & | & < exp > + < exp > \\
 & | & < exp > - < exp > \\
 & | & < exp > * < exp >
\end{array}
$$

Si queremos hacer un evaluador en Haskell para este lenguaje, primero escribiríamos el tipo de estas expresiones

```
data Exp = Val Integer
         | Mas Exp Exp
         | Menos Exp Exp
         | Por Exp Exp
```

El evaluador, por supuesto, resulta muy sencillo:

```
eval :: Exp → Integer
eval (Val i) = i
eval (Mas a b) = eval a + eval b
eval (Menos a b) = eval a - eval b
eval (Por a b) = eval a * eval b
```

Si más adelante se quiere extender el lenguaje, es posible descubrir que es necesario reescribir todo el programa. Por ejemplo, si agregamos al lenguaje la división:

$$
\begin{array}{lcl}
< exp > & ::= & \ldots \\
 & | & < exp > / < exp >
\end{array}
$$

eso dará lugar a la modificación correspondiente en la definición del tipo Exp:

```
data Exp = ...
         | Div Exp Exp
```

Pero el evaluador no es tan sencillo, si simplemente agragáramos la línea de código

```
eval (Div a b) = eval a `div` eval b
```

el programa daría un runtime error al evaluar, por ejemplo, Div (Val 1) (Val 0). Es deseable que el evaluador sea robusto (por ejemplo, si se quiere luego agregar algún mecanismo de manejo de excepciones). Esto sí nos lleva a reescribir todo el evaluador. Sea Maybe el constructor de tipos definido por

```
data Maybe a = Just a | Nothing
```

el evaluador se reescribe como sigue

```
eval :: Exp → Maybe Integer
eval (Val i) = Just i
eval (Mas a b) = case eval a of
                   Just x → case eval b of
                              Just y → Just (x + y)
                              Nothing → Nothing
                   Nothing → Nothing
```

y de manera similar para los casos correspondientes a los constructores Menos y Por. Para el constructor Div:

```
eval (Div a b) = case eval a of
                   Just x → case eval b of
                              Just y → if y == 0 then Nothing
                                       else Just (x `div` y)
                              Nothing → Nothing
                   Nothing → Nothing
```

Ahora el evaluador se puede correr incluso sobre expresiones como la del ejemplo anterior, Div (Val 1) (Val 0), en cuyo caso devuelve Nothing, pero por lo menos su ejecución no resulta interrumpida por un runtime error.

El resultado es satisfactorio, pero esto nos llevó a reescribir todo el programa. Si ahora quisiera agregar nuevas expresiones, como por ejemplo, que incluyeran variables, o la posibilidad de tener efectos laterales como modificación de la memoria, o entrada y salida, o no determinismo, etc. cada una de ellas daría lugar a una modificación de todo o casi todo el código.

Las mónadas vienen en nuestra ayuda. En efecto, si observamos el tipo de eval antes y después del cambio (Integer antes, y Maybe Integer, después) podemos notar que estamos en presencia de mónadas aplicadas a Integer. En el primer caso se trata de la mónada identidad (aplicada a Integer). Y en el segundo se trata de la mónada Maybe (también aplicada a Integer). Dicho sea de paso, la mónada Maybe es simplemente una representación en Haskell de la mónada $T(C) = C + 1$ que vimos la clase pasada.

**Ejercicio 332.** *Comprobar que el funtor identidad* $I : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es una mónada.*

Vale la pena mencionar que las demás posibles extensiones mencionadas en el párrafo anterior también dan lugar a mónadas.

¿Y para qué sirve esta observación?

Bueno, si hubiéramos escrito nuestra función eval utilizando únicamente las operaciones de mónadas (el funtor mismo y las transformaciones naturales $\eta$ y $\mu$) al cambiar una mónada por otra, se podría reutilizar todo, ya que la nueva mónada también tendrá el funtor, $\eta$ y $\mu$.

Volvamos a nuestro ejemplo. Si originalmente hubiéramos definido la mónada identidad así:

```
type T a = a

t :: (a → b) → T a → T b
```

```
t f = f

η :: a → T a
η a = a

μ :: T (T a) → T a
μ tta = tta
```

y a continuación hubiéramos escrito el evaluador usando solamente la mónada:

```
eval :: Exp → T Integer
eval (Val i) = η i
eval (Mas a b) = μ $ t (λx → μ $ t (λy → η (x+y)) (eval b)) (eval a)
eval (Menos a b) = μ $ t (λx → μ $ t (λy → η (x-y)) (eval b)) (eval a)
eval (Por a b) = μ $ t (λx → μ $ t (λy → η (x*y)) (eval b)) (eval a)
```

al agregar división, el cambio necesario se localizaría en redefinir la mónada

```
type T a = Maybe a

t :: (a → b) → T a → T b
t f = λta → case ta of
                Just a → Just (f a)
                Nothing → Nothing

η :: a → T a
η = Just

μ :: T (T a) → T a
μ tta = case tta of
            Just ta → ta
            Nothing → Nothing
```

agregar la constante

```
div0 :: T a
div0 = Nothing
```

y la ecuación correspondiente a la división

```
eval (Div a b) =
μ $ t (λx → μ $ t (λy → if y == 0 then div0 else η (x `div` y)) (eval b)) (eval a)
```

Este enfoque presenta al menos dos problemas: el cambio en la definición de la mónada también requirió reescribir código y la notación es menos comprensible.

Sobre el primer problema, nos limitamos a mencionar que en la práctica son apenas unas pocas líneas de código que definen los operadores, y muchas líneas de código que los utilizan. Resulta muy conveniente limitar a unas pocas líneas (aquéllas donde se define la mónada) los cambios futuros.

Sobre el segundo problema, es posible utilizar mónadas con una notación más conveniente que la de los operadores t, $\eta$ y $\mu$. En la práctica, se define el operador $\leadsto$ (llamado "bind"), que puede definirse con los de la mónada:

```
(⇝) :: T a → (a → T b) → T b
ta ⇝ f = μ $ t f ta
```

Con esta notación, el evaluador resulta

```
eval :: Exp → T Integer
eval (Val i) = η i
eval (Mas a b) = eval a ⇝ (λx → eval b ⇝ (λy → η (x+y)))
eval (Menos a b) = eval a ⇝ (λx → eval b ⇝ (λy → η (x-y)))
eval (Por a b) = eval a ⇝ (λx → eval b ⇝ (λy → η (x*y)))
eval (Div a b) = eval a ⇝ (λx → eval b ⇝ (λy → if y == 0 then div0 else η (x ‘div‘ y)))
```

**Ejercicio 333.** *¿Cómo puede definirse* $\mu$ *a partir de* $t$*,* $\eta$ *y* $\rightsquigarrow$*?*

**Ejercicio 334.** *¿Qué ecuaciones puede derivar de la combinación de* $t$*,* $\eta$ *y* $\rightsquigarrow$ *(deducibles de la definición de mónada)?*

El uso de mónadas se ha difundido lo suficiente como para justificar la inclusión, en la sintaxis de Haskell, de notación especial para facilitar su legibilidad:

```
eval :: Exp → T Integer
eval (Val i) = η i
eval (Mas a b) = do
                   x ← eval a
                   y ← eval b
                   η (x+y)
...
eval (Div a b) = do
                   x ← eval a
                   y ← eval b
                   if y == 0 then div0 else η (x ‘div‘ y)
```

Ahora podríamos querer agregar variables al lenguaje:

```
data Exp = ...
         | Var String
```

Esto da lugar a una nueva complicación ya que para evaluar variables necesitamos consultar su valor en la memoria, para ello la función eval debería recibir un argumento más. Aparentemente no queda otra que reescribir todo el código de eval ya que ahora tiene un argumento más.

Sin embargo, las mónadas nos permiten evitar esa reescritura. Claro que para ello tenemos que redefinir la mónada

```
type Mem = String → Maybe Integer
type T a = Mem → Maybe a

t :: (a → b) → T a → T b
t f = λta mem → case ta mem of
                    Just a → Just (f a)
                    Nothing → Nothing
```

$\eta$ :: a → T a
$\eta$ a mem = Just a

$\mu$ :: T (T a) → T a
$\mu$ tta mem = case tta mem of
    Just ta → ta mem
    Nothing → Nothing

div0 :: T a
div0 mem = Nothing

consultar :: String → T Integer
consultar v mem = mem v

Todas las líneas del evaluador quedan intactas y se agrega la que corresponde a las variables:
eval :: Exp → T Integer
...
eval (Var v) = consultar v

**Ejercicio 335.** *Demostrar que en una categoría con exponenciales, $T(C) = C^M$ es una mónada.*

Ahora podríamos querer agregar la posibilidad de modificar variables:
data Exp = ...
    | Asig String Exp
Nuevamente redefinimos la mónada
type Mem = String → Maybe Integer
type T a = Mem → (Mem, Maybe a)

t :: (a → b) → T a → T b
t f = $\lambda$ta mem → case ta mem of
    (mem2, Just a) → (mem2, Just (f a))
    (mem2, Nothing) → (mem2, Nothing)

$\eta$ :: a → T a
$\eta$ a mem = (mem, Just a)

$\mu$ :: T (T a) → T a
$\mu$ tta mem = case tta mem of
    (mem2, Just ta) → ta mem2
    (mem2, Nothing) → (mem2,Nothing)

div0 :: T a
div0 mem = (mem,Nothing)

consultar :: String → T Integer
consultar v mem = (mem, mem v)

modificar :: String → Integer → T Integer
modificar v i mem = (mem2, Just i)
    **where** mem2 w = **if** v == w **then** Just i **else** mem w

Nuevamente, todas las líneas del evaluador quedan intactas y se agrega

eval :: Exp → T Integer
...
eval (Asig v a) = **do**
    x ← eval a
    modificar x

**Ejercicio 336.** *Demostrar que en una categoría con exponenciales,* $T(C) = (M \times C)^M$ *es una mónada.*

**Ejercicio 337.** *Agregar al lenguaje expresiones de la forma a□b de no determinismo. El valor de esta expresión es el valor de a o el de b. Se quiere definir eval de modo de que devuelva ahora una lista de todos los valores posibles de una expresión. Modificar la mónada y reescribir las ecuaciones de eval que resulten necesarias (además de escribir la correspondiente al operador □).*

*Una posibilidad es definir type T a = Mem → [(Mem,Maybe a)]. Otra posibilidad es considerar solo los valores no erróneos: type T a = Mem → [(Mem,a)].*

**Ejercicio 338.** *En el lenguaje sin □, considerar expresiones que generan output. Se agrega la expresión !a que genera como output el valor de a y devuelve dicho valor.*

*Una posibilidad es definir type T a = Mem → (Mem,[Integer],Maybe a).*

**Ejercicio 339.** *Además de output, agregarle input. La expresión ?v, donde v es una variable, lee un entero de entrada, se lo asigna a v en la memoria y devuelve dicho valor como resultado.*

*Una posibilidad es definir type T a = Mem → [Integer] → (Mem,[Integer],Maybe a).*

(VIGESIMOCUARTA CLASE: LAS MÓNADAS SON ADJUNCIONES)

Vimos que toda adjunción $F \dashv U$ con $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$ y $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$ da lugar a una mónada $(T, \eta, \mu)$ con $T = U \circ F$ y $\mu_C = U(\epsilon_{F(C)})$.

El recíproco también vale: toda mónada $(T, \eta, \mu)$ proviene de una adjunción $F \dashv U$. Para ello, el primer paso es la construcción de la categoría $\mathbf{D}$, ausente en la definición de la mónada:

**Definición 340.** *Dada la mónada $(T, \eta, \mu)$ sobre la categoría $\mathbf{C}$, se define la categoría $\mathbf{C}^T$ llamada la **categoría de Eilenberg-Moore de** $T$. Sus objetos se llaman $T$-**álgebras**, y son pares $(A, \alpha)$ con $\alpha : T(A) \longrightarrow A \in \mathbf{C}$ tales que*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "1_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

*conmutan. Una flecha $h : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta) \in \mathbf{C}^T$ es una flecha $h : A \longrightarrow B \in \mathbf{C}$ tal que*

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

**Ejercicio 341.** *Comprobar que $\mathbf{C}^T$ es una categoría.*

Hay un funtor del olvido obvio de la categoría $\mathbf{C}^T$ en la categoría $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} U((A, \alpha)) &= A \\ U((A, \alpha) \xrightarrow{h} (B, \beta)) &= h \end{aligned}$$

También hay un funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}^T$:

$$\begin{aligned} F(C) &= (T(C), \mu_C) \\ F(C \xrightarrow{h} D) &= T(h) \end{aligned}$$

Para ver que es un funtor, veamos primero que $(T(C), \mu_C) \in \mathbf{C}^T$, es decir, que los diagramas

$$\begin{tikzcd} T(C) \arrow[r, "\eta_{T(C)}"] \arrow[dr, "1_{T(C)}"'] & T(T(C)) \arrow[d, "\mu_C"] \\ & T(C) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(T(T(C))) \arrow[r, "T(\mu_C)"] \arrow[d, "\mu_{T(C)}"'] & T(T(C)) \arrow[d, "\mu_C"] \\ T(T(C)) \arrow[r, "\mu_C"] & T(C) \end{tikzcd}$$

conmutan. Esto es directo de la definición de mónada. Por último, hay que ver que toda $h : C \longrightarrow D \in \mathbf{C}$ satisface $T(h) : F(C) \longrightarrow F(D)$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(C)) \arrow[r, "T(T(h))"] \arrow[d, "\mu_C"'] & T(T(D)) \arrow[d, "\mu_D"] \\ T(C) \arrow[r, "T(h)"] & T(D) \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es claro ya que $\mu : T \circ T \longrightarrow T$ es natural.

Tenemos entonces dos funtores $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{C}^T$.

**Prop 342.** *Si $(T, \eta, \mu)$ es una mónada, entonces $F \dashv U$ es una adjunción.*

Como para todo $C \in \mathbf{C}$,

$$U(F(C)) = U((T(C), \mu_C)) = T(C)$$

y para todo $C \xrightarrow{f} D \in \mathbf{C}$,

$$U(F(f)) = U(T(f)) = T(f)$$

obtenemos $U \circ F = T$ y por ello, podemos tomar la propia transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow T = U \circ F$$

como el unit de la adjunción.

Sea ahora $(A, \alpha) \in \mathbf{C}^T$. Por definición de objeto de $\mathbf{C}^T$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por definición de flecha de $\mathbf{C}^T$, implica que $\alpha : (T(A), \mu_A) \longrightarrow (A, \alpha) \in \mathbf{C}^T$. Como $F(U((A, \alpha))) = F(A) = (T(A), \mu_A)$, tomamos como counit $\epsilon_{(A,\alpha)} = \alpha$ cuya naturalidad se expresa por el diagrama

$$\begin{tikzcd} (T(A), \mu_A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(U(h))"'] & (A, \alpha) \arrow[d, "h"'] \\ (T(B), \mu_B) \arrow[r, "\beta"] & (B, \beta) \end{tikzcd}$$

donde $F(U(h)) = F(h) = T(h)$. El diagrama conmuta pues $h : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta) \in \mathbf{C}^T$. Luego, $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{C}^T}$ es natural.

**Ejercicio 343.** *Completar la prueba de que $F \dashv U$ es una adjunción.*

**Ejercicio 344.** *Para la mónada identidad $I$, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^I$? Identificar $F$, $U$, $\eta$ y $\epsilon$.*

**Ejercicio 345.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con coproductos y objeto terminal, y $T$ la mónada error $T(C) = C + 1$, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^T$? Identificar $F$, $U$, $\eta$ y $\epsilon$.*

**Ejercicio 346.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con exponenciales y $T$ la mónada memoria $T(C) = C^M$, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^T$? Identificar $F$, $U$, $\eta$ y $\epsilon$.*

**Ejercicio 347.** *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con exponenciales y $T$ la mónada estado $T(C) = (M \times C)^M$, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^T$? Identificar $F$, $U$, $\eta$ y $\epsilon$.*

**Ejercicio 348.** *Idéntico ejercicio para las mónadas de los ejercicios 327, 328 y 329.*

Hemos demostrado que dada una mónada $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ existen una categoría $\mathbf{D}$ y funtores $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $T = U \circ F$ y $F \dashv U$. No son únicos ya que se podría construir una categoría diferente y los funtores van a resultar necesariamente diferentes. De hecho hay una categoría, llamada **de Kleisli**, diferente de $\mathbf{C}^T$ que también da lugar a una adjunción para $T$.

De todas formas, puede demostrarse que si $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tal que $T = U \circ F$, entonces existe un funtor de comparación $\Phi : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}^T$ tal que $U^T \circ \Phi = U$ y $\Phi \circ F = F^T$ donde $U^T$ y $F^T$ son los funtores obtenidos de la mónada $T$ usando la categoría $\mathbf{C}^T$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathbf{C}^T \arrow[dl, "U^T"] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathbf{C}^T \\
& \mathbf{C} \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "F^T"'] &
\end{tikzcd}$$

El funtor $\Phi$ que satisface esta propiedad es único. Dado $U$, si tiene adjunto $F$, es único. Si el funtor $\Phi$ que se obtiene es una equivalencia entre $\mathbf{D}$ y $\mathbf{C}^T$ se dice que $U$ es monádico. Ejemplos de funtores monádicos son los que se obtienen como funtores de olvido de categorías algebraicas: aquéllas categorías que sirven de modelos para teorías ecuacionales como las de monoide, grupo, etc.

Un ejemplo de funtor $U$ que no es monádico es el de olvido de $\mathbf{Poset} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

**Ejercicio 349.** *Demostrar que el adjunto a izquierda $F$ de $U$ es el funtor que devuelve el poset discreto. Demostrar que $\mathbf{C}^T$ con $T = U \circ F$ es $\mathbf{Set}$ y concluir que $\Phi$ no puede ser equivalencia.*

**Definición 350.** *una **comónada** en una categoría $\mathbf{C}$ es una mónada en la categoría $\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$. Es decir, es un endofuntor $G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ junto con dos transformaciones naturales*

$$\epsilon : G \longrightarrow 1$$
$$\delta : G \longrightarrow G \circ G$$

*tales que*

$$\delta_G \circ \delta = G\delta \circ \delta$$
$$\epsilon_G \circ \delta = 1_G = G\epsilon \circ \delta$$

Como en el caso de las mónadas, una adjunción $F \dashv U$ , $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$ y $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{C}}$ da lugar a una comónada $(G, \epsilon, \delta)$ donde

$$G = F \circ U : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$$
$$\epsilon : G \longrightarrow 1$$
$$\delta_D = F(\eta_{U(D)}) : G(D) \longrightarrow G(G(D))$$

Surge también la noción de coálgebra correspondiente a una comónada, y la de funtor comonádico.

(Vigesimoquinta clase: Tipos inductivos y coinductivos, álgebras y coálgebras)

Podemos definir inductivamente el tipo de los números naturales a través de sus constructores: $0 : \mathbb{N}$ y $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Así definido, $\mathbb{N} \in \mathbf{Set}$ y 0 y $s$ son funciones (al constructor 0 se lo puede ver como función $0 : 1 \to \mathbb{N}$).

Se puede ver que el tipo definido es el óbjeto inicial de una categoría de álgebras. Una **(0,s)-álgebra** es un conjunto $U \in \mathbf{Set}$ junto con dos operaciones $0_U : 1 \to U$ y $s_U : U \to U$. Una flecha o (0,s)-morfismo $h$ entre dos (0,s)-álgebras $(U, 0_U, s_U)$ y $(V, 0_V, s_V)$ es una función $h : U \to V$ tal que

$$\begin{array}{rcl} h(0_U) & = & 0_V \\ h(s_U(x)) & = & s_V(h(x)) \end{array}$$

que puede visualizarse como diagramas que conmutan:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "0_U"'] & 1 \arrow[d, "0_V"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s_U"'] & V \arrow[d, "s_V"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd}$$

**Ejercicio 351.** *Comprobar que las (0,s)-álgebras, forman una categoría con los (0,s)-morfismos.*

Además, la (0,s)-álgebra $(\mathbb{N}, 0, s)$ es el objeto inicial de dicha categoría. En efecto, sea $(U, 0_U, s_U)$ una (0,s)-álgebra, la función $h : \mathbb{N} \to U$ definida recursivamente por

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0_U \\ h(s(n)) & = & s_U(h(n)) \end{array}$$

es el único (0,s)-morfismo de $(\mathbb{N}, 0, s) \to (U, 0_U, s_U)$.

Para obtener mayor generalidad, se puede observar que la existencia de dos funciones $0_U : 1 \to U$ y $s_U : U \to U$ es equivalente a la existencia de una única función de la forma $[0_U, s_U] : 1 + U \to U$. Un (0,s)-morfismo $h$ es una función $h : U \to V$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 + U \arrow[r, "1_1 + h"] \arrow[d, "{[0_U, s_U]}"'] & 1 + V \arrow[d, "{[0_V, s_V]}"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea el endofuntor $\mathbf{Set} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$ definido por

$$\begin{array}{rcl} F(X) & = & 1 + X \\ F(X \xrightarrow{f} Y) & = & F(X) \xrightarrow{1_1 + f} F(Y) \end{array}$$

el diagrama queda

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "{[0_U, s_U]}"'] & F(V) \arrow[d, "{[0_V, s_V]}"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd}$$

Podemos observar que una (0,s)-álgebra (que llamaremos $F$-álgebra de ahora en adelante) se parece a lo que definimos como álgebras para una mónada la clase pasada (salvo que en aquel caso se exigían condiciones adicionales relacionadas con la idea de mónada). En efecto, una $F$-álgebra es un par $(A, \alpha)$ donde $A \in \mathbf{Set}$ y $\alpha : F(A) \to A$ y $F$ está definido por $F(X) = 1 + X$. Una función $h : A \to B$ es un morfismo entre $F$-álgebras $(A, \alpha)$ y $(B, \beta)$ si

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "\alpha"'] & F(B) \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Como hemos comprobado, $(\mathbb{N}, [0, s])$ es el objeto inicial de esta categoría.

Podemos definir la noción dual: la de coálgebra. Una $F$-coálgebra es un par $(A, \alpha)$ tal que $\alpha : A \to F(A)$, es decir, $\alpha : A \to 1 + A$. Una flecha $h$ entre las $F$-coálgebras $(A, \alpha)$ y $(B, \beta)$ es una función $h : A \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(h)"] & F(B) \\ A \arrow[r, "h"] \arrow[u, "\alpha"] & B \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Se verifica también que las $F$-coálgebras forman una categoría.

Por ejemplo, $\mathbb{N}$ es una $F$-coalgebra con $\alpha : \mathbb{N} \to 1 + \mathbb{N}$ definida por:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \iota_1(*) \\ \alpha(s(n)) &= \iota_2(n) \end{aligned}$$

**Ejercicio 352.** *¿Sigue siendo inicial? Es decir, ¿es $\mathbb{N}$ inicial en la categoría de las $F$-coálgebras?*

Otro ejemplo de $F$-coálgebra es el conjunto unitario $\{\infty\}$ con $\alpha(\infty) = \iota_2(\infty)$.

**Ejercicio 353.** *¿Se puede ver al conjunto $\{\infty\}$ como una $F$-álgebra? ¿Puede verse a $\{0, \infty\}$ como un $F$-álgebra, $F$-coálgebra, ambas o ninguna?*

Una $F$-coálgebra particularmente interesante se obtiene definiendo $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y $\nu : \mathbb{N}_\infty \to 1 + \mathbb{N}_\infty$ por

$$\begin{array}{rcl} \nu(0) & = & \iota_1(*) \\ \nu(s(n)) & = & \iota_2(n) \\ \nu(\infty) & = & \iota_2(\infty) \end{array}$$

Con esta definición, $(\mathbb{N}_\infty, \nu)$ es el objeto terminal de la categoría de las $F$-coálgebras. En efecto, sea $(A, \alpha)$ una $F$-coálgebra, podemos definir inductivamente subconjuntos $A(n) \subseteq A$ para cada $n \in \mathbb{N}$ como sigue

$$\begin{array}{rcl} A(0) & = & \{a \in A \mid \alpha(a) = \iota_1(*)\} \\ A(s(n)) & = & \{a \in A \mid \exists a' \in A(n).\alpha(a) = \iota_2(a')\} \end{array}$$

**Ejercicio 354.** *Demostrar que si $n \neq m$ entonces $A(n) \cap A(m) = \{\}$.*

Ahora sea $h : A \to \mathbb{N}_\infty$ definida por

$$\begin{array}{rcll} h(a) & = & n & \text{si } a \in A(n) \\ h(a) & = & \infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}.a \notin A(n) \end{array}$$

Podemos comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 + A \arrow[r, "1_1 + h"] & 1 + \mathbb{N}_\infty \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "h"] & \mathbb{N}_\infty \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

Sea $a \in A(0)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} (1_1 + h)(\alpha(a)) & = & (1_1 + h)(\iota_1(*)) \\ & = & \iota_1(*) \\ & = & \nu(0) \\ & = & \nu(h(a)) \end{array}$$

Sea ahora $a \in A(s(n))$, entonces para algún $a' \in A(n)$,

$$\begin{array}{rcl} (1_1 + h)(\alpha(a)) & = & (1_1 + h)(\iota_2(a')) \\ & = & \iota_2(h(a')) \\ & = & \iota_2(n) \\ & = & \nu(s(n)) \\ & = & \nu(h(a)) \end{array}$$

Por último, sea $a \notin \bigcup_n A(n)$. Entonces para algún $a' \notin \bigcup_n A(n)$,

$$\begin{array}{rcl} (1_1 + h)(\alpha(a)) & = & (1_1 + h)(\iota_2(a')) \\ & = & \iota_2(h(a')) \\ & = & \iota_2(\infty) \\ & = & \nu(\infty) \\ & = & \nu(h(a)) \end{array}$$

Esto demuestra la conmutatividad del diagrama. Para demostrar que $(\mathbb{N}_\infty, \nu)$ es objeto terminal, resta comprobar la unicidad de $h$. Sea entonces $g$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1+A \arrow[r, "1_1+g"] & 1+\mathbb{N}_\infty \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{N}_\infty \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Demostraremos por inducción en $n$ que para todo $a \in A(n)$, $g(a) = n$. Sea $a \in A(0)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \nu(g(a)) & = & (1_1+g)(\alpha(a)) \\ & = & (1_1+g)(\iota_1(*)) \\ & = & \iota_1(*) \\ & = & \nu(0) \end{array}$$

de donde se deduce que $g(a) = 0 = h(a)$ porque $\nu$ es obviamente inyectiva. Sea ahora $a \in A(s(n))$, entonces para algún $a' \in A(n)$ (para el que asumimos que por hipótesis inductiva $g(a') = n$),

$$\begin{array}{rcl} \nu(g(a)) & = & (1_1+g)(\alpha(a)) \\ & = & (1_1+g)(\iota_2(a')) \\ & = & \iota_2(g(a')) \\ & = & \iota_2(n) \\ & = & \nu(s(n)) \end{array}$$

de donde nuevamente por inyectividad de $\nu$ obtenemos $g(a) = s(n) = h(a)$. Esto termina la prueba de que $a \in A(n) \Rightarrow g(a) = n$. El recíproco también vale: demostremos que $g(a) = n \Rightarrow a \in A(n)$ por inducción en $n$. Si $g(a) = 0$,

$$\begin{array}{rcl} \iota_1(*) & = & \nu(0) \\ & = & \nu(g(a)) \\ & = & (1_1+g)(\alpha(a)) \end{array}$$

de donde $\alpha(a) = \iota_1(*)$, luego $a \in A(0)$. A continuación asumimos que por hipótesis inductiva $g(a') = n \Rightarrow a' \in A(n)$ y sea $g(a) = s(n)$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \iota_2(n) & = & \nu(s(n)) \\ & = & \nu(g(a)) \\ & = & (1_1+g)(\alpha(a)) \\ & = & (1_1+g)(\iota_2(a')) \\ & = & \iota_2(g(a')) \end{array}$$

de donde $g(a') = n$ y $a' \in A(n)$, luego $a \in A(s(n))$. Conclusión: $a \in A(n) \Leftrightarrow g(a) = n$.

Por ello, si $a \notin \bigcup_n A(n)$, la única posibilidad que hay es $g(a) = \infty$. Luego, $g = h$ es única y $(\mathbb{N}_\infty, \nu)$ es objeto terminal.

Cuando definimos en Haskell

data N = Z | S N

¿cuál estamos definiendo, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_\infty$? Por la semántica del lenguaje, el tipo N que acabamos de definir incluye objetos infinitos, tales como

inf :: N
inf = S inf

o

inf1, inf2 :: N
inf1 = S inf2
inf2 = S inf1

Por ello, la definición del tipo N es una definición coinductiva. En lenguajes no perezosos, la misma definición sería inductiva.

**Ejercicio 355.** *¿Existe $\alpha : F(\mathbb{N}_\infty) \to \mathbb{N}_\infty$ tal que $\mathbb{N}_\infty$ sea un $F$-álgebra?*

**Ejercicio 356.** *¿Qué define inductivamente data $I\ a = I\ a$? En otras palabras, ¿cuál es el objeto inicial en la categoría de las $I$-álgebras para el endofuntor identidad $I$ : $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$? ¿qué define coinductivamente? Es decir, ¿cuál es el objeto terminal en la categoría de las $I$-coálgebras?*

Otro ejemplo de tipo definido inductivamente es el de las listas de elementos de un conjunto $\Sigma \in \mathbf{Set}$. En este caso los constructores son $[\,] : 1 \to \Sigma^*$ y $\triangleright : \Sigma \times \Sigma^* \to \Sigma^*$.

**Ejercicio 357.** *Sea $F_\Sigma : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ definido por $F_\Sigma(X) = 1 + \Sigma \times X$. Demostrar que $\{*\}$ con un $\alpha$ apropiado es un $F_\Sigma$-álgebra. Demostrar que $\Sigma^*$ con un $\alpha$ apropiado es un $F_\Sigma$-álgebra inicial. ¿Quién es el $F_\Sigma$-coálgebra terminal? Dada otra $F_\Sigma$-coálgebra $(A, \alpha)$, definir la única flecha de la $F_\Sigma$-coálgebra $(A.\alpha)$ en la $F_\Sigma$-coálgebra terminal (no se pide demostrar que es terminal).*

**Ejercicio 358.** *¿Cómo podría modificar el funtor del ejercicio anterior para obtener sólo los objetos infinitos en la $F_\Sigma$-coálgebra terminal?*

**Ejercicio 359.** *Definir un funtor $T$ : $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ de modo de que la $T$-álgebra inicial sea el conjunto de árboles binarios. ¿Qué se obtiene como $T$-coálgebra terminal?*