NOTAS PARA EL DICTADO DE CLASES DEL CURSO DE POSGRADO TEORÍA DE CATEGORÍAS

(Primera clase: definición y ejemplos)

Introducción

Teoría de Categorías tiene que ver con grafos y tiene que ver con funciones. Tiene que ver con funciones porque pretende abstraer ciertos conceptos y propiedades de funciones. Tiene que ver con grafos porque las categorías son grafos y porque es un lenguaje gráfico, uno en que los diagramas juegan un rol muy destacado.

Hablemos un poco de grafos. ¿Qué tienen que ver las categorías con los grafos? Veremos que las categorías *son* grafos dirigidos.

Hay muchas definiciones de grafos, incluso muchas de grafos dirigidos. Comencemos por ésta:

Definición 1. *Un* ***grafo dirigido*** *es un par ordenado* $G = (N, A)$ *donde* N *es un conjunto de nodos, vértices u* ***objetos*** *y* A*, un conjunto de* ***flechas****, aristas o arcos dirigidos, es decir, pares* (a, b) *donde tanto* a *como* b *(llamados respectivamente origen y destino de la flecha) pertenecen a* N*.*

Esta definición admite, para cada par de objetos a y b a lo sumo una flecha de a a b.

Una variante, a veces llamada **multigrafo dirigido**, es aquélla en que A es un multiconjunto en vez de un conjunto. Así se admite cualquier número de flechas de a a b ya que (a, b) puede ocurrir varias veces en A:

Definición 2. *Un* ***multigrafo dirigido*** *es un par ordenado* $G = (N, A)$ *donde* N *es un conjunto de nodos, vértices u* ***objetos*** *y* A*, un multiconjunto de* ***flechas****, aristas o arcos dirigidos, es decir, pares* (a, b) *donde tanto* a *como* b *(llamados respectivamente origen y destino de la flecha) pertenecen a* N*.*

Sobre finitud del grafo. En teoría de grafos suelen omitirse cuestiones sobre finitud o infinitud, habitualmente los ejemplos son de grafos finitos: tienen un número finito de objetos y entre todo par de objetos, un número finito de flechas. Pero la definición que acabamos de dar permite que N sea infinito ya que no dijimos que deba ser finito.

Tampoco dijimos que A deba ser finito, por lo tanto puede ser infinito. De hecho si hay infinitos objetos es lógico que haya también infinitas flechas, sino casi todos los objetos estarían muy aburridos, sin flechas de llegada ni de salida.

Pero la definición –incluso la de multigrafo dirigido– no permite que fijados los objetos a y b haya infinitas flechas de a a b. Esto es culpa de la noción de multiconjunto que sólo permite que cada elemento se repita un número finito de veces.

Para permitir infinitas flechas con el mismo origen a y destino b, podemos hacer tres cosas: la primera sería afirmar que nuestros multiconjuntos permiten repeticiones arbitrarias (no sólo finitas, sino infinitas). Pero no es el objetivo revisar acá la noción de multiconjunto. Sólo pretendemos tener una definición que permita cantidad arbitraria de flechas. Descartamos este primer enfoque.

La segunda sería retocar la definición de multigrafo dirigido:

Definición 3. *Un **multigrafo dirigido** es un par ordenado $G = (N, A)$ donde N es un conjunto de nodos, vértices u **objetos** y A, una función que aplicada a dos objetos a y b nos devuelve un conjunto (denotado $A(a, b)$) de **flechas**, aristas o arcos dirigidos, de a a b. No decimos que las flechas sean pares.*

La tercera también sería retocar la definición de multigrafo dirigido:

Definición 4. *Un **multigrafo dirigido** es una cuadrupla $G = (N, A, dom, cod)$ donde N es un conjunto de nodos, vértices u **objetos**, A, un conjunto de **flechas**, aristas o arcos dirigidos, y dom y cod, funciones de A en N. No decimos que las flechas sean pares.*

La función *dom* aplicada a una flecha devuelve su origen, y la función *cod*, su destino. La elección de los nombres *dom* y *cod* hacen referencia a las palabras dominio y codominio que son habituales en matemática cuando se habla de funciones en vez de flechas. Se utilizan éstos nombres por coherencia con las definiciones que usaremos en el resto del curso.

Cualquiera de estas dos definiciones admite suficiente flexibilidad para cantidades de objetos, de flechas e incluso de flechas que comparten el mismo origen a y destino b. Personalmente, tengo preferencia por la definición 3, pero para ser coherente con la literatura que utilizaremos como referencia, adoptaremos la definición 4. Además, los llamaremos simplemente **grafos**.

Al conjunto de flechas de a a b (denotado $A(a, b)$ en la definición 3) lo denotaremos $G(a, b) = \{f \in A \mid dom(f) = a \wedge cod(f) = b\}$. Decimos que un grafo es **finito** cuando N y A lo son, y que es **localmente finito** cuando para todo par de objetos $a, b \in N$, el conjunto $G(a, b)$ es finito. Si hubiéramos adoptado la definición 2, todos los grafos serían localmente finitos.

Ejercicio 5. *Dar una definición formal del siguiente grafo utilizando cada una de las definiciones presentadas.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "j"'] & b \arrow[dr, "n"] & \\
& c \arrow[u, "g"] \arrow[ul, "m"] \arrow[r, shift left, "h"] & d \arrow[l, shift left, "k"]
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 6. *Dar un ejemplo de un grafo infinito no trivial que sea localmente finito. Dar luego otro ejemplo de un grafo que no sea localmente finito.*

Hablemos de funciones. Al igual que las flechas, las funciones tienen habitualmente un origen (su dominio) y un destino (su codominio).

Además, las funciones tienen las siguientes propiedades:

- Pueden componerse, eso da una nueva función.
- La composición es asociativa.
- Todo conjunto tiene una función que va de él en sí mismo: la función identidad.
- La función identidad es el elemento neutro de la composición.

Las funciones tienen muchas otras propiedades (por ejemplo, pueden aplicarse a un argumento y devolver un valor). Pero son solo estas cuatro propiedades básicas las que se capturan en la teoría de categorías. Por ello, se trata de una abstracción de la noción de función.

Definición de Categorías. A continuación, la definición de categoría:

Definición 7. *Una categoría* $\mathbf{C}$ *está compuesta por*

- *Una colección* $\mathbf{C}_0$ *de* ***objetos****:* $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$.
- *Una colección* $\mathbf{C}_1$ *de* ***flechas****, morfismos, homomorfismos:* $f, g, h \ldots$.
- *Toda flecha* f *tiene asociado un origen o* ***dominio*** $dom(f)$ *y un destino o* ***codominio*** $cod(f)$*. Escribimos* $f : A \to B$ *ó* $A \xrightarrow{f} B$ *para indicar que* $dom(f) = A$ *y* $cod(f) = B$*.*
- *Dadas* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *hay una flecha* $g \circ f : A \to C$*, llamada la* ***composición*** *de* f *y* g*. La composición de flechas es asociativa.*
- *Para todo objeto* A *existe una flecha* $1_A : A \to A$ *llamada la flecha* ***identidad*** *de* A*. Esta flecha es neutra para la composición.*

Observar que utilizamos la palabra *colección* en vez de conjunto. No vamos a prestar mucha atención a esta distinción, pero en algunos casos, tendrá relevancia. La explicaremos oportunamente.

Salvo por esa distinción, se observa inmediatamente de las tres primeras componentes que toda categoría es un grafo.

Ejercicio 8. *Observar que la definición de categoría es una extensión de la definición 4. Dar una definición alternativa de categoría que sea una extensión de la definición 3.*

En teoría de categorías es común la afirmación de que lo importante son las flechas, no los objetos. Esto significa que la estructura de la categoría está dada por la operación de composición. Los objetos cumplen el rol de condicionar la definición de la composición (una especie de buen tipado de la composición).

Se suele denotar por $\mathbf{C}(A, B)$ ó $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ (o incluso $Hom(A, B)$, si no es necesario mencionar la categoría $\mathbf{C}$) a la colección de flechas de A en B, es decir, a la colección de flechas cuyo dominio es A y cuyo codominio es B.

Que la composición sea asociativa significa que dadas $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, la igualdad $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ vale. Gráficamente, (y utilizando la terminología propia de teoría de categorías) podemos decir que asociatividad significa que el siguiente diagrama siempre conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}
$$

Que un diagrama conmute significa que para todo par de objetos a y b del diagrama, las composiciones que se hagan a lo largo de cualquier camino dirigido de a a b dan idéntico resultado. En el ejemplo, el camino de A a D que se obtiene bajando por $g \circ f$ y luego continuando por h determina la misma flecha que el camino que primero realiza f y luego baja por $h \circ g$. Es decir, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Observar que podríamos haber omitido los rótulos de las flechas $g \circ f$ y $h \circ g$. En efecto, al afirmar que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr] & \\
 & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}
$$

conmuta, también estamos afirmando que la flecha que va de A a C es $g \circ f$, y la que va de B a D es $h \circ g$.

Que la identidad sea elemento neutro de la composición significa que dada $f : A \to B$, las igualdades $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$ se cumplen. Esto se puede expresar afirmando que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, "f"] & B \arrow[d, "1_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Se puede comprobar que para cada objeto, la flecha identidad es única. En efecto, sea A un objeto con dos flechas identidad: 1_A y $1'_A$. La conmutatividad del siguiente diagrama se obtiene como consecuencia de que 1_A es la identidad, tomando $f = 1'_A$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1'_A"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, "1'_A"] & A \arrow[d, "1_A"] \\
A \arrow[r, "1'_A"] & A
\end{tikzcd}
$$

De igual modo, la del siguiente se obtiene como consecuencia de que $1'_A$ es la identidad, tomando $f = 1_A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1'_A"'] \arrow[dr, "1_A"] & A \arrow[d, "1'_A"] \\
A \arrow[r, "1_A"] & A
\end{tikzcd}$$

Observar que el triángulo superior derecho del primer diagrama dice que $1_A \circ 1'_A = 1'_A$, mientras que el inferior izquierdo del segundo expresa que $1_A \circ 1'_A = 1_A$. Por lo tanto $1_A = 1'_A$.

Por supuesto que idéntica conclusión puede obtenerse (y más brevemente) sin apelar a los diagramas, pero es habitual en teoría de categorías utlizar los diagramas en las pruebas.

Ejercicio 9. *Comprobar ecuacionalmente que para cada objeto de una categoría, la flecha identidad es única.*

Ejemplos de Categorías. Existen numerosos ejemplos de categorías. Tantos, que iremos introduciendo nuevas categorías a lo largo de la materia.

Algunos ejemplos con grafos. A continuación algunos ejemplos de categorías a partir de grafos.

Ejemplo 10. *La categoría más sencilla es la categoría vacía* $\mathbf{0}$*: no tiene objetos, ni flechas. Las demás propiedades se satisfacen trivialmente porque están universalmente cuantificadas sobre conjuntos vacíos.*

Ejemplo 11. *La siguiente categoría más sencilla es la categoría* $\mathbf{1}$*: con un único objeto y una única flecha (la identidad de ese objeto). Las demás propiedades se satisfacen trivialmente porque la composición es trivial.*

Es tan sencilla que se la puede graficar:

$$*$$

El asterisco representa el único objeto de la categoría $\mathbf{1}$. Por convención, la flecha identidad no se dibuja. Una categoría que solo tiene flechas identidad se dice **discreta**.

Ejemplo 12. *Un ejemplo sencillo de categoría no discreta es la categoría* $\mathbf{2}$*: tiene dos objetos y una única flecha (además de las dos identidades) de un objeto en el otro.*

También puede graficarse:

$$* \longrightarrow *$$

Acá el asterisco representa un objeto diferente en cada ocurrencia, y la flecha dibujada es la única que no es la identidad.

Observar que decimos “la” categoría $\mathbf{1}$, “la” categoría $\mathbf{2}$, etc., pero en realidad hay infinitas de cada una de ellas: depende de cuáles sean los objetos y las flechas. La categoría $\mathbf{0}$, en cambio, es una sola.

Ejercicio 13. *¿Corresponde el siguiente gráfico a una categoría? Justificar.*

$$* \rightrightarrows *$$

Ejercicio 14. *¿Corresponde el siguiente gráfico a una categoría? Justificar.*

$$* \rightleftarrows *$$

Algunos ejemplos con funciones. A continuación algunos ejemplos de categorías a partir de funciones.

Ejemplo 15. *Seguramente el ejemplo de categoría más importante es* **Set***: la categoría en que los objetos son conjuntos y las flechas son funciones totales, la composición es la usual y la identidad es la función identidad.*

Observar que acá resulta relevante que la definición de categorías requiera una *colección* de objetos en vez de un conjunto. La colección de objetos de la categoría **Set** es la de todos los conjuntos, que no puede a la vez ser un conjunto.

Se pueden derivar otros ejemplos:

Ejemplo 16. *La categoría* $\mathbf{Set_{fin}}$*: la categoría en que los objetos son conjuntos finitos y las flechas son funciones totales.*

Ejemplo 17. *La categoría* **Inj** *(resp.* **Surj***) cuyos objetos son conjuntos y las flechas, funciones totales inyectivas (resp. suryectivas).*

Ejercicio 18. *Comprobar que* $\mathbf{Set_{fin}}$*,* **Inj** *y* **Surj** *son categorías.*

Ejercicio 19. *Las funciones inyectivas* $f : A \to B$ *son aquéllas que satisfacen que* $f^{-1}(b)$ *tiene a lo sumo un elemento, para todo* $b \in B$*. Si tomamos las flechas que satisfacen que* $f^{-1}(b)$ *tiene a lo sumo dos elementos, para todo* $b \in B$*, ¿obtenemos una categoría? ¿Y si pedimos* $f^{-1}(b)$ *finito? ¿o infinito?*

Ejercicio 20. *Las funciones suryectivas satisfacen que* $f^{-1}(b)$ *tiene al menos un elemento. ¿Si pedimos que tenga al menos dos?*

Ejemplo 21. *La categoría* **Pfn***: la categoría en que los objetos son conjuntos y las flechas son funciones parciales.*

Ejemplos de computación.

Ejemplo 22. *La categoría* $\lambda{\rightarrow}$ *de los tipos del cálculo lambda simplemente tipado, donde los objetos son tipos dados por la siguiente gramática*

$$A, B \;\; ::= \;\; \textit{ciertos tipos básicos} \mid A \longrightarrow B \mid \ \ldots$$

y las flechas son términos lambda cerrados correctamente tipados. Los términos del cálculo lambda están dados por la siguiente gramática

$$M, N \;\; ::= \;\; c \mid v \mid M\ N \mid \lambda v.M \mid \ \ldots$$

y satisfacen las ecuaciones $(\lambda x.\ b)\ a = b[a/x]$ *(regla* β*) y* $\lambda x.\ a\ x = a$ *si* x *no está libre en* a *(regla* η*), entre términos de igual tipo.*

Ejercicio 23. *Comprobar que* $\lambda{\rightarrow}$ *es una categoría.*

Ejercicio 24. *Definir una categoría en que los objetos son estados y las flechas son programas imperativos.*