(Décima clase: Exponenciales)

Además de los límites y colimites vistos, hay una construcción muy habitual en **Set**: la de espacio de funciones de un conjunto A en un conjunto B. En realidad, en algún sentido ya lo hemos considerado al tratar la clase pasada el producto generalizado. Dada una familia de conjuntos B_a para $a \in A$, el producto generalizado $\prod_{a\in A} B_a$ puede definirse por $\prod_{a\in A} B_a = \{(b_a|a \in A) \mid \forall a \in A.b_a \in B_a\}$. Para obtener el espacio de funciones de A en B basta considerar que la familia B_a sea constante, $\forall a \in A.B_a = B$. En efecto, la tupla $(b_a|a \in A)$ equivale en ese caso a la función $f(a) = b_a$ que va de A en B.

Denotemos a este conjunto por B^A en vez de $\prod_{a\in A} B$ (ya que la dependecia de a no existe más). Los diagramas que vimos la clase pasada para el producto generalizado, instanciados al caso que estamos considerando, serían:

$$B^A \xrightarrow{\pi_a} B \qquad\qquad a \in A$$

tal que para todo otro objeto que venga equipado también con igual número de flechas

$$C \xrightarrow{f_a} B \qquad\qquad a \in A$$

exista una única flecha

$$C \xrightarrow{<f_a|a\in A>} B^A$$

tal que los triángulos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "<f_a|a\in A>"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\ B^A \arrow[r, "\pi_x"] & B \end{tikzcd}$$

conmuten para todo $x \in A$.

Pero ahora, tener

$$B^A \xrightarrow{\pi_a} B \qquad\qquad a \in A$$

equivale a tener una función de dos argumentos

$$B^A \times A \xrightarrow{\pi} B$$

que satisfacen la correspondencia $\pi((x,a)) = \pi_a(x)$ (esta correspondencia permite definir π a partir de los π_a y viceversa). Algo similar ocurre con el diagrama

$$C \xrightarrow{f_a} B \qquad\qquad a \in A$$

que quedaría

$$C \times A \xrightarrow{f} B$$

La única flecha de C a B^A se denota ahora $\widetilde{f}$

$$C \xrightarrow{\widetilde{f}} B^A$$

Y el triángulo

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "\widetilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A \arrow[r, "\pi"] & B
\end{tikzcd}$$

no funciona porque π y f no tienen esos dominios. Se lo corrige:

$$\begin{tikzcd}
C \times A \arrow[d, "\widetilde{f} \times 1_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A \times A \arrow[r, "\pi"] & B
\end{tikzcd}$$

La última corrección es que la flecha π en realidad se denota ϵ y se lee "evaluación" ya que -en el caso de **Set**- toma dos argumentos, el primero una función y el segundo un argumento, y evalúa la función en el argumento.

Se generaliza la definición para cualquier categoría con productos binarios.

Definición 211. *Sea* **C** *una categoría con productos binarios. Un* ***exponencial*** *entre los objetos A y B es un objeto B^A y una flecha (llamada* ***evaluación****)*

$$B^A \times A \xrightarrow{\epsilon} B$$

tal que para todo objeto C y flecha

$$C \xrightarrow{f_a} B \qquad\qquad a \in A$$

existe una única flecha $C \xrightarrow{\widetilde{f}} B^A$ (llamada ***transpuesta*** *de f) tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \\
C \times A \arrow[u, "\widetilde{f} \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Se suele completar el diagrama con $\widetilde{f}$:

$$\begin{tikzcd}
B^A & B^A \times A \arrow[r, "\epsilon"] & B \\
C \arrow[u, "\widetilde{f}"] & C \times A \arrow[u, "\widetilde{f} \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 212. *¿Es un límite?*

Ejercicio 213. *Demostrar que el exponencial de A y B es único salvo isomorfismo.*

La conmutatividad del diagrama equivale a $\epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_A) = f$. Dada una flecha $C \xrightarrow{g} B^A$, se denota $\overline{g} = \epsilon \circ (g \times 1_A)$ (y también se la llama **transpuesta** de g). Por unicidad, tenemos que $\widetilde{\overline{g}} = g$. Por conmutatividad del triángulo, $\overline{\widetilde{f}} = f$. Es decir que las transpuestas proporcionan el isomorfismo

$$Hom(C \times A, B) \cong Hom(C, B^A).$$

Definición 214. *Una categoría es **cartesiana cerrada** (CCC) si tiene todos los productos finitos y exponenciales.*

Ejemplo 215. *La categoría **Set** es CCC, con $B^A = A \to B$ = conjunto de funciones de A en B.*

Ejemplo 216. *La categoría $\mathbf{Set_{fin}}$ es CCC ya que el cardinal del conjunto de funciones satisface $|B^A| = |B|^{|A|}$, y por lo tanto es finito si A y B lo son.*

Ejemplo 217. *Toda álgebra de Bool B, vista como una categoría (ya que los posets pueden ser vistos como categorías) es cartesiana cerrada. El objeto terminal es el máximo de B, el producto $a \times b$, como vimos, es el ínfimo $a \wedge b$, y el exponencial b^a, también denotado $a \Rightarrow b$ es $\neg a \vee b$.*

La flecha ϵ es $(a \Rightarrow) \wedge a \leq b$ que vale ya que

$$\begin{array}{rcl} (a \Rightarrow b) \wedge a & = & (\neg a \vee b) \wedge a \\ & = & (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a) \\ & = & 0 \vee (b \wedge a) \\ & = & b \wedge a \\ & \leq & b \end{array}$$

También debemos comprobar que satisface la propiedad universal. Si $c \wedge a \leq b$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \neg a \vee (c \wedge a) & \leq & \neg a \vee b \\ & = & a \Rightarrow b \end{array}$$

y también

$$\begin{array}{rcl} c & \leq & \neg a \vee c \\ & = & (\neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee a) \\ & = & \neg a \vee (c \wedge a) \end{array}$$

Por lo tanto, $c \wedge a \leq b$ implica $c \leq a \Rightarrow b$.

Ejercicio 218. *Comprobar que en toda CCC, $B^1 \cong B$ para todo objeto B.*

Ejercicio 219. *Comprobar que en toda CCC, $1^A \cong 1$ para todo objeto A.*

Ejercicio 220. *Comprobar si $\mathbf{C}$ es CCC, entonces $\overbrace{f \circ (g \times 1_A)} = \widetilde{f} \circ g$ (uso llaves cuando necesito un tilde más ancho que el de LaTeX, o sea, llaves = tilde).*

Ejercicio 221. *Comprobar si $\mathbf{C}$ es CCC, entonces $\widetilde{\epsilon} = 1_{B^A}$.*

Ejemplo 222. *Comprobemos que si* $\mathbf{C}$ *es CCC, entonces* $(A\times B)^C \cong A^C\times B^C$*. Para ello, definiremos* i*,* j *y* k *tales que* $A^C\times B^C \xrightarrow{\widetilde{i}} (A\times B)^C$*,* $(A\times B)^C \xrightarrow{\widetilde{j}} A^C$ *y* $(A\times B)^C \xrightarrow{\widetilde{k}} B^C$ *y que* $\widetilde{i}\circ<\widetilde{j},\widetilde{k}> = 1_{(A\times B)^C}$ *y* $<\widetilde{j},\widetilde{k}>\circ\widetilde{i} = 1_{A^C\times B^C}$*:*

$$A \xleftarrow{\epsilon} A^C\times C \xleftarrow{\pi_1\times 1_C} (A^C\times B^C)\times C \xrightarrow{\pi_2\times 1_C} B^C\times C \xrightarrow{\epsilon} B$$

de donde, $(A^C\times B^C)\times C \xrightarrow{i} A\times B$ *para* $i = <i_1,i_2>$ *con* $i_1 = \epsilon\circ(\pi_1\times 1_C)$ *y* $i_2 = \epsilon\circ(\pi_2\times 1_C)$*. Entonces*

$$A^C\times B^C \xrightarrow{\widetilde{i}} (A\times B)^C$$

Por otro lado,

$$\begin{tikzcd}
(A\times B)^C\times C \arrow[r, "\epsilon"] & A\times B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & A \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

de donde, definiendo las flechas $j = \pi_1\circ\epsilon$ *y* $k = \pi_2\circ\epsilon$ *se obtiene* $(A\times B)^C \xrightarrow{\widetilde{j}} A^C$ *y* $(A\times B)^C \xrightarrow{\widetilde{k}} B^C$*.*

Ahora

$$\begin{array}{rcll}
\widetilde{i}\circ<\widetilde{j},\widetilde{k}> & = & \overbrace{i\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)} & \textit{por } \overbrace{f\circ(g\times 1_A)} = \widetilde{f}\circ g \\
 & = & \overbrace{<i_1,i_2>\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)} & \textit{por definición de } i \\
 & = & \overbrace{<i_1\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1), i_2\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)>} & \textit{por props producto} \\
 & = & \overbrace{<\epsilon\circ(\pi_1\times 1)\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1), i_2\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)>} & \textit{por definición de } i_1 \\
 & = & \overbrace{<\epsilon\circ(\widetilde{j}\times 1), i_2\circ(<\widetilde{j},\widetilde{k}>\times 1)>} & \textit{por props producto} \\
 & = & \overbrace{<\epsilon\circ(\widetilde{j}\times 1), \epsilon\circ(\widetilde{k}\times 1)>} & \textit{idem } i_2 \\
 & = & \widetilde{<j,k>} & \textit{por } \epsilon\circ<\widetilde{f},1_A> = f \\
 & = & \overbrace{<\pi_1\circ\epsilon,\pi_2\circ\epsilon>} & \textit{por definición de } j \textit{ y } k \\
 & = & \overbrace{<\pi_1,\pi_2>\circ\epsilon} & \textit{por props producto} \\
 & = & \widetilde{1\circ\epsilon} & \textit{por props producto} \\
 & = & \widetilde{\epsilon} & \\
 & = & 1_{(A\times B)^C} & \textit{por } \widetilde{\epsilon} = 1_{B^A}
\end{array}$$

Componiendo en el otro orden también se obtiene la identidad:

$$
\begin{array}{rcll}
\widetilde{j} \circ \widetilde{i} & = & \overbrace{j \circ (\widetilde{i} \times 1)} & \textit{por } \overbrace{f \circ (g \times 1_A)} = \widetilde{f} \circ g \\
 & = & \overbrace{\pi_1 \circ \epsilon \circ (\widetilde{i} \times 1)} & \textit{por definición de } j \\
 & = & \widetilde{\pi_1 \circ i} & \textit{por } \epsilon \circ <\widetilde{f}, 1_A> = f \\
 & = & \widetilde{i_1} & \textit{por definición de } i \\
 & = & \overbrace{\epsilon \circ (\pi_1 \times 1)} & \textit{por definición de } i_1 \\
 & = & \pi_1 & \textit{por } \overbrace{\epsilon \circ (f \times 1)} = f \\
\widetilde{k} \circ \widetilde{i} & = & \pi_2 & \textit{análogamente} \\
<\widetilde{j}, \widetilde{k}> \circ \widetilde{i} & = & <\widetilde{j} \circ \widetilde{i}, \widetilde{k} \circ \widetilde{i}> & \\
 & = & <\pi_1, \pi_2> & \\
 & = & 1_{A^C \times B^C} &
\end{array}
$$

Ejercicio (posgrado) 223. *Comprobar que si* $\mathbf{C}$ *es CCC, entonces* $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.