(Duodécima clase: Transformaciones naturales)

Límites en la categoría Cat. Vimos que la categoría **Cat** tiene objeto terminal, la categoría **1**, y productos binarios, que pueden generalizarse a productos finitos e infinitos. También tiene ecualizadores, y por lo tanto, todos los límites:

Sean **C** y **D** dos categorías, y F y G funtores $\mathbf{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathbf{D}$. Se define la categoría **E**, cuyos objetos son aquellos objetos de **C** para los cuales F_0 y G_0 coinciden, y cuyas flechas son aquellas flechas de **C** para las cuales F_1 y G_1 coinciden (si F_1 y G_1 coinciden en una flecha, entonces F_0 y G_0 coinciden en su dominio y codominio).

Se puede comprobar que es una categoría ya que para cualquier objeto A de **E**, $F(A) = G(A)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)} = 1_{G(A)} = G(1_A)$. Además, si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en **E**, se cumple $F(f) = G(f)$ y $F(g) = G(g)$, luego $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = G(g) \circ G(f) = G(g \circ f)$.

Se define el funtor $\mathbf{E} \xrightarrow{E} \mathbf{C}$ por $E(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B$ dado que **E** es una subcategoría de **C**. Es obvio que $F \circ E = G \circ E$, por definición de **E**.

E es la subcategoría de **C** de los objetos y flechas sobre los que F y G coinciden. La propiedad universal dice que toda subcategoría de **C** donde F y G coincidan, es también subcategoría de **E**:

Para ver que se satisface la propiedad universal, sea el funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{Y} \mathbf{C}$ tal que $F \circ Y = G \circ Y$. Veremos que existe un único funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{U} \mathbf{E}$ tal que $E \circ U = Y$. Sea X un objeto de **X**. Como $F(Y(X)) = G(Y(X))$, $Y(X)$ es un objeto de **E**. Definimos $U(X) = Y(X)$. Sea ahora $X \xrightarrow{f} X' \in \mathbf{X}$. Nuevamente $F(Y(f)) = G(Y(f))$, luego $Y(f)$ es una flecha de **E**. Definimos $U(f) = Y(f)$. Obviamente se cumple $E \circ U = Y$. La unicidad es clara, ya que estuvimos obligados a definir U como lo hicimos.

Como conclusión, la categoría **Cat** tiene ecualizadores y por lo tanto todos los límites.

Colímites en la categoría Cat. Ya vimos que tiene objeto inicial, la categoría **0**. También tiene coproductos, que se obtienen haciendo la unión disjunta entre las colecciones de objetos y también la unión disjunta entre las colecciones de flechas de las categorías participantes; en suma, vista como grafo, juntando los dos grafos sin conectar uno con el otro.

Ejercicio 233. *Definir el coproducto de categorías, comprobar que es una categoría y que satisface la propiedad que define el coproducto.*

También pueden definirse coecualizadores, con ello **Cat** tiene todos los colímites.

Ejercicio 234. *Definir el coecualizador entre dos funtores.*

Transformaciones naturales. Veremos que dadas las categorías **C** y **D** existe el exponencial $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. Los objetos de esta categoría serán los funtores de **C** en **D**. Una flecha entre dos funtores será un operador capaz de transformar (la imagen de) un funtor en (la imagen de) el otro. Para ello se define la noción de transformación natural entre dos funtores.

Definición 235. *Dadas las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$*, y dos funtores* $\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathbf{D}$*, una* ***transformación natural*** *de* F *en* G *es una familia de flechas* η_A *indexada por los objetos* $A \in \mathbf{C}$ *tales que para toda* $B \xrightarrow{f} C \in \mathbf{C}$ *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(B) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C) \arrow[r, "\eta_C"'] & G(C) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 236. *Sea el funtor* $\mathbf{Set} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{Set}$ *que aplicado a un objeto (conjunto)* X *devuelve el conjunto de partes* $\mathcal{P}(X)$*, y aplicado a una flecha (función)* $X \xrightarrow{f} Y$ *devuelve la función* $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{f[\_]} \mathcal{P}(Y)$ *que devuelve la imagen por* f *de cada subconjunto de* X *(*$X' \subseteq X \Rightarrow f[X'] = \{f(x) \mid x \in X'\}$*). Esta es la acción del funtor sobre las flechas, por eso escribimos* $\mathcal{P}(f) = f[\_]$*, y también* $\mathcal{P}(f)(X') = f[X']$*.*

Se puede comprobar que $\mathcal{P}$ *es un funtor: en efecto,* $\mathcal{P}(1_X)(X') = 1_X[X'] = X'$ *para todo* $X' \in \mathcal{P}(X)$*. Luego,* $\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}(X)}$*. Sean ahora las funciones* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$*,* $\mathcal{P}(g \circ f)(X') = (g \circ f)[X'] = \{g(f(x)) \mid x \in X'\} = g[\{f(x) \mid x \in X'\}] = g[f[X']]$ *para todo* $X' \in \mathcal{P}(X)$*. Luego,* $\mathcal{P}(g \circ f) = g[\_] \circ f[\_] = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$*.*

Veamos ahora que hay una transformación natural del funtor identidad $1_{\mathbf{Set}}$ *en el funtor* $\mathcal{P}$*. Debemos determinar una familia de flechas (funciones)* η_X *(una función para cada conjunto* X*) tales que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "f[\_]"] \\ C \arrow[r, "\eta_C"'] & \mathcal{P}(C) \end{tikzcd}$$

conmute para toda $B \xrightarrow{f} C \in \mathbf{Set}$*. Si elegimos* $\eta_X(x) = \{x\}$*, el mismo conmuta ya que para todo* $b \in B$*,* $f[\eta_B(b)] = f[\{b\}] = \{f(b)\} = \eta_C(f(b))$*. Luego,* $f[\_] \circ \eta_B = \eta_C \circ f$*.*

Ejemplo 237. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría con productos binarios, y sea* $B \in \mathbf{C}$*. Se define el funtor* $\_ \times B$ *de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{C}$*: aplicado a un objeto* $A \in \mathbf{C}$ *devuelve el objeto* $A \times B$*, y aplicado a una flecha* $A \xrightarrow{f} A'$ *devuelve la flecha* $f \times 1_B$*. Se puede comprobar fácilmente que es un funtor.*

Veamos que hay una transformación natural de este funtor en el funtor identidad $1_{\mathbf{C}}$*. Debemos determinar una familia de flechas* η_X *de* $\mathbf{C}$*, indexada por objetos de* $\mathbf{C}$ *tal que* *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f \times 1_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A' \times B \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & A' \end{tikzcd}$$

conmute para toda $A \xrightarrow{f} A' \in \mathbf{C}$. *La elección es obvia:* $\eta_X = \pi_1$ *(observar que en realidad son diferentes* π_1 *según* X *(y* B*, que en este está fijo)). Comprobemos que conmuta:* $\eta_{A'} \circ (f \times 1_B) = \pi_1 \circ {<}f \circ \pi_1, \pi_2{>} = f \circ \pi_1 = f \circ \eta_A$.

Para ver que $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ es una categoría debemos comprobar que dado un funtor $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ existe una transformación natural identidad $F \xrightarrow{1_F} F$; que dados tres funtores $\mathbf{C} \xrightarrow{F,G,H} \mathbf{D}$, F, G y H, y dadas dos transformaciones naturales $F \xrightarrow{\eta} G$ y $G \xrightarrow{\eta'} H$, se pueden componer, y que la composición y la identidad tienen las propiedades habituales.

La transformación natural 1_F se obtiene fácilmente tomando para cada $X \in \mathbf{C}_0$, $(1_F)_X = 1_{F(X)}$. El diagrama

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "1_{F(B)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(C) \arrow[r, "1_{F(C)}"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

conmuta trivialmente.

Para la composición, de la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(B) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C) \arrow[r, "\eta_C"'] & G(C) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\eta'_B"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(B) \arrow[d, "H(f)"] \\ G(C) \arrow[r, "\eta'_C"'] & H(C) \end{tikzcd}$$

resulta obvio que

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\eta'_B \circ \eta_B"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(B) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(C) \arrow[r, "\eta'_C \circ \eta_C"'] & H(C) \end{tikzcd}$$

también conmuta, por ello se define la composición $(\eta' \circ \eta)_X = \eta'_X \circ \eta_X$.

Las propiedades de $\circ$ y 1_F se comprueban trivialmente, por lo tanto, $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ es una categoría. Veremos más adelante que es la categoría exponencial entre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

Definición 238. *Dados dos funtores F y G en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, un **isomorfismo natural** entre F y G es un isomorfismo entre ellos en la categoría $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.*

Es fácil comprobar que $F \xrightarrow{\eta} G$ es un isomorfismo natural sii para cada $X \in \mathbf{C}$, $F(X) \xrightarrow{\eta_X} G(X)$ es un isomorfismo en la categoría $\mathbf{D}$.

Ejemplo 239. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con productos binarios. Se definen los funtores $F(A) = (A \times B) \times C$ y $F(A \xrightarrow{f} A') = (f \times 1_B) \times 1_C$, por un lado, y $G(A) = A \times (B \times C)$ y $G(A \xrightarrow{f} A') = f \times 1_{B \times C}$, por el otro. Si se define $\eta_A = <\pi_1 \circ \pi_1, <\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>>$, se obtiene el diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

es decir,

$$\begin{tikzcd} (A \times B) \times C \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "(f \times 1_B) \times 1_C"'] & A \times (B \times C) \arrow[d, "f \times 1_{B \times C}"] \\ (A' \times B) \times C \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & A' \times (B \times C) \end{tikzcd}$$

que conmuta para toda flecha $A \xrightarrow{f} A' \in \mathbf{C}$. Además, cada η_A es un isomorfismo en $\mathbf{C}$; por ello la transformación natural es un isomorfismo natural.