(DÉCIMOTERCERA CLASE: LA CATEGORÍA $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$)

Vimos que $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ es una categoría.

Prop 240. *Si* $\mathbf{D}$ *tiene productos binarios, entonces* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *también.*

En efecto, sea $\mathbf{D}$ una categoría con productos y F, G objetos de $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ (o sea, funtores de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$). Se define $H = F \times G$ por $H(X) = F(X) \times G(X)$ para todo objeto $X \in \mathbf{C}$, y $H(f) = F(f) \times G(f)$. Se puede comprobar que H es un funtor:

$$\begin{array}{rcl}
dom(H(f)) & = & dom(F(f) \times G(f)) \\
& = & dom(F(f)) \times dom(G(f)) \\
& = & F(dom(f)) \times G(dom(f)) \\
& = & H(dom(f)) \\
cod(H(f)) & = & H(cod(f)) \\
H(1_X) & = & F(1_X) \times G(1_X) \\
& = & 1_{F(X)} \times 1_{G(X)} \\
& = & 1_{F(X) \times G(X)} \\
& = & 1_{H(X)} \\
H(g \circ f) & = & F(g \circ f) \times G(g \circ f) \\
& = & (F(g) \circ F(f)) \times (G(g) \circ G(f)) \\
& = & (F(g) \times G(g)) \circ (F(f) \times G(f)) \\
& = & H(g) \circ H(f)
\end{array}$$

Veamos ahora que es el producto. Para ello observamos que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & & H(A) = F(A) \times G(A) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "H(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
B & \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow & H(B) = F(B) \times G(B) \arrow[r, "\pi_1"] & F(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta, luego tenemos $H \xrightarrow{\Pi_1} F$, donde Π_1 es la transformación natural definida por $(\Pi_1)_X = \pi_1$ para todo objeto $X \in \mathbf{C}$. De la misma forma se obtiene la transformación natural $H \xrightarrow{\Pi 2} G$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & & H(A) = F(A) \times G(A) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "H(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
B & \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow & H(B) = F(B) \times G(B) \arrow[r, "\pi_2"] & G(B)
\end{tikzcd} \quad \textit{conmuta}$$

Resta ver la propiedad universal: sean un funtor $\mathbf{C} \xrightarrow{J} \mathbf{D}$ y dos transformaciones naturales $J \xrightarrow{\eta} F$ y $J \xrightarrow{\eta'} G$, es decir, tales que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "J(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ J(B) \arrow[r, "\eta_B"] & F(B) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[d, "J(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ J(B) \arrow[r, "\eta'_B"] & G(B) \end{tikzcd} \quad \textit{conmutan}$$

se define la transformación natural $J \xrightarrow{<\eta,\eta'>} H$ por $<\eta,\eta'>_X = <\eta_X,\eta'_X>$ para todo objeto $X \in \mathbf{C}$. Ésta es una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} J(A) \arrow[r, "<\eta_A,\eta'_A>"] \arrow[d, "J(f)"'] & H(A) = F(A) \times G(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ J(B) \arrow[r, "<\eta_B,\eta'_B>"] & H(B) = F(B) \times G(B) \end{tikzcd} \quad \textit{conmuta}$$

y es la única que hace conmutar el siguiente diagrama de $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$:

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "<\eta,\eta'>"] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ F & H = F \times G \arrow[l, "\Pi_1"'] \arrow[r, "\Pi_2"] & G \end{tikzcd}$$

Efectivamente, sea η'' tal que

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "\eta''"] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ F & H = F \times G \arrow[l, "\Pi_1"'] \arrow[r, "\Pi_2"] & G \end{tikzcd}$$

conmuta. Para todo $X \in \mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} & J(X) \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[d, "\eta''_X"] \arrow[dr, "\eta'_X"] & \\ F(X) & H(X) = F(X) \times G(X) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & G(X) \end{tikzcd}$$

de donde por unicidad $\eta''_X = <\eta_X,\eta'_X> = <\eta,\eta'>_X$. Como esto se cumple para todo objeto $X \in \mathbf{C}$, es decir, la igualdad se da para todos los miembros de la familia, $\eta'' = <\eta,\eta'>$. Luego, $<\eta,\eta'>$ es única.

Ejercicio 241. *Lo mismo puede hacerse para los demás límites y colímites.*

Ejercicio (posgrado) 242. *Si* $\mathbf{D}$ *es CCC, entonces ¿*$\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *también?*

Definición 243. *Dada una categoría localmente pequeña* $\mathbf{C}$*, y un objeto* $A \in \mathbf{C}$*, se define el* ***funtor representable contravariante*** $\mathbf{C}^{\mathbf{op}} \xrightarrow{Hom(\_\,,B)} \mathbf{Set}$ *de la siguiente manera:*

- *dado un objeto* $A \in \mathbf{C}$, $Hom(A,B) = \{f \in \mathbf{C} \mid A \xrightarrow{f} B\}$
- *dada una flecha* $A \xrightarrow{g} A' \in \mathbf{C}$*, se define* $Hom(A',B) \xrightarrow{Hom(g,B)} Hom(A,B)$ *por* $Hom(g,B)(f) = f \circ g$.

Ejercicio 244. *Comprobar que* $Hom(\_\,,B)$ *es un funtor de* $\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ *en* $\mathbf{Set}$.

Ejemplo 245. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría localmente pequeña, y sean* $C \xrightarrow{f} A$ *y* $C \xrightarrow{g} B$ *dos de sus flechas. Se definen los funtores representables contravariantes* $\mathbf{C}^{\mathbf{op}} \xrightarrow{F,G,H} \mathbf{Set}$ *por* $F(X) = Hom(X,A)$, $G(X) = Hom(X,B)$ *y* $H(X) = Hom(X,C)$*. Para todo* $X \in \mathbf{C}$*, definimos* $H(X) \xrightarrow{\eta_X} F(X) \times G(X)$ *(observar que esta flecha y el producto involucrado son en* $\mathbf{Set}$*) por* $\eta_X(h) = (f \circ h, g \circ h)$*. El diagrama*

$$\begin{tikzcd} H(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "H(z)"'] & F(X) \times G(X) \arrow[d, "F(z) \times G(z)"] \\ H(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & F(Y) \times G(Y) \end{tikzcd}$$

es decir

$$\begin{tikzcd} Hom(X,C) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Hom(z,C)"'] & Hom(X,A) \times Hom(X,B) \arrow[d, "Hom(z,A) \times Hom(z,B)"] \\ Hom(Y,C) \arrow[r, "\eta_Y"] & Hom(Y,A) \times Hom(Y,B) \end{tikzcd}$$

conmuta para toda flecha $X \xrightarrow{z} Y \in \mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ *(o sea,* $Y \xrightarrow{z} X \in \mathbf{C}$*).*

En efecto, sea $h \in Hom(X,C)$,

$$\begin{aligned} \eta_Y(Hom(z,C)(h)) &= \eta_Y(h \circ z) \\ &= (f \circ h \circ z, g \circ h \circ z) \\ &= (Hom(z,A) \times Hom(z,B))(f \circ h, g \circ h) \\ &= (Hom(z,A) \times Hom(z,B))(\eta_X(h)) \end{aligned}$$

Luego, $\eta_Y \circ Hom(z,C) = (Hom(z,A) \times Hom(z,B)) \circ \eta_X$ *y* η *es una transformación natural.*

A la luz de la Proposición 124, una definición alternativa de producto sería la siguiente: $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ *es un diagrama producto sii* η_X *es un isomorfismo natural.*

Ejemplo 246. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría localmente pequeña, y sean* A, B *y* C *tres de sus objetos. Sea* η *un isomorfismo natural, donde*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "z"'] \\ Y \end{tikzcd} \in \mathbf{C^{op}} \Longrightarrow \begin{tikzcd} Hom(X,C) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Hom(z,C)"'] & Hom(X,A) \times Hom(X,B) \arrow[d, "Hom(z,A)\times Hom(z,B)"] \\ Hom(Y,C) \arrow[r, "\eta_Y"] & Hom(Y,A) \times Hom(Y,B) \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, para $h \in Hom(X,C)$ *obtenemos el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "h"'] \\ X \end{tikzcd} \in \mathbf{C^{op}} \qquad \begin{tikzcd} Hom(C,C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "Hom(h,C)"'] & Hom(C,A) \times Hom(C,B) \arrow[d, "Hom(h,A)\times Hom(h,B)"] \\ Hom(X,C) \arrow[r, "\eta_X"] & Hom(X,A) \times Hom(X,B) \end{tikzcd}$$

Llamemos $(f,g) = \eta_C(1_C)$. *La conmutatividad de este diagrama implica que*

$$\begin{aligned} (f\circ h, g\circ h) &= (Hom(h,A)\times Hom(h,B))(f,g) \\ &= (Hom(h,A)\times Hom(h,B))(\eta_C(1_C)) \\ &= \eta_X(Hom(h,C)(1_C)) \\ &= \eta_X(1_C \circ h) \\ &= \eta_X(h) \end{aligned}$$

¡Estamos en el caso del ejemplo anterior!

Conclusión: C *es un producto entre* A *y* B *sii existe un isomorfismo natural entre los funtores* $Hom(X,C)$ *y* $Hom(X,A)\times Hom(X,B)$. *Las proyecciones se obtienen aplicando el isomorfismo natural a la flecha* 1_C.

Ejercicio 247. *Hacer un análisis similar para el exponencial:*

1. *Asumiendo que* $C \times A \xrightarrow{\epsilon} B$ *es un exponencial, comprobar que la función* $\mu_X : Hom(X\times A, B) \to Hom(X,C)$ *definida por* $\mu_X(f) = \tilde{f}$ *es biyectiva para todo* $X \in \mathbf{C}$ *y su inversa es* $\nu_X(f) = \overline{f} = \epsilon \circ (f \times 1_A)$.
2. *Comprobar el recíproco: si* ν_X *es biyectiva para todo* $X \in \mathbf{C}$, $C \times A \xrightarrow{\epsilon} B$ *es un exponencial (la suryectividad de* ν_X *implica la existencia de la transpuesta mientras que la inyectividad, su unicidad).*
3. *Comprobar que* $Hom(\_\,, C) \xrightarrow{\eta} Hom(\_ \times A, B)$ *es una transformación natural, donde* $\eta_X = \nu_X$. *Concluir que es un isomorfismo natural.*
4. *Comprobar que se puede deducir que* C *es un objeto exponencial a partir de la existencia de un isomorfismo natural arbitrario* $Hom(\_\,, C) \xrightarrow{\eta} Hom(\_ \times A, B)$.
5. *Concluir que* C *es* B^A *sii existe un iso natural* $Hom(\_\,, C) \xrightarrow{\eta} Hom(\_ \times A, B)$.

Ejercicio 248. *Hacer un análisis similar para el coproducto: un* C *es un coproducto entre* A *y* B *sii existe un isomorfismo natural entre cuáles funtores representables?*