(Decimocuarta clase: $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ es el exponencial de $\mathbf{Cat}$)

Lema 249. *(Lema Bifuntor) Dadas las categorías $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, y*

$$\begin{array}{l} F_0 : \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0 \to \mathbf{C}_0 \\ F_1 : \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1 \to \mathbf{C}_1 \end{array}$$

entonces $F = (F_0, F_1) : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ es un funtor sii las siguientes condiciones se cumplen:

1. *F es **funtorial** en ambos argumentos, es decir, para todo $A \in \mathbf{A}$ y $B \in \mathbf{B}$, $F(A, \_) : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ y $F(\_, B) : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ son funtores, y*
2. *F satisface la siguiente **regla de intercambio**: Dados $A \xrightarrow{\alpha} A' \in \mathbf{A}$ y $B \xrightarrow{\beta} B' \in \mathbf{B}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F_0((A,B)) \arrow[r, "F(A,\beta)"] \arrow[d, "F(\alpha,B)"'] \arrow[dr, "F_1((\alpha,\beta))"] & F_0((A,B')) \arrow[d, "F(\alpha,B')"] \\
F_0((A',B)) \arrow[r, "F(A',\beta)"] & F_0((A',B'))
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde $F(A, \_)$ y $F(\_, B)$ se de

Las definiciones de $F(A, \_)$ y $F(\_, B)$ a partir de F_0 y F_1 (y las notaciones utilizadas en esta prueba) son las obvias:

$$\begin{array}{rcl}
F(A,_)(B) & = & F_0((A,B)) \\
F(A,_)(\beta) = F(A,\beta) & = & F_1((1_A,\beta)) \\
F(_,B)(A) & = & F_0((A,B)) \\
F(_,B)(\alpha) = F(\alpha,B) & = & F_1((\alpha,1_B))
\end{array}$$

Demostración del lema: Asumimos que F es funtor y demostramos las dos condiciones. Es fácil comprobar que $F(A, \_)$ es funtor:

$$\begin{array}{rcll}
dom(F(A,_)(\beta)) & = & dom(F_1((1_A,\beta))) & \text{def } F(A,_) \\
& = & F_0((A, dom(\beta))) & F \text{ funtor} \\
& = & F(A,_)(dom(\beta)) & \text{def } F(A,_) \\
cod(F(A,_)(\beta)) & = & F(A,_)(cod(\beta)) & \text{similar} \\
F(A,_)(1_B) & = & F_1((1_A, 1_B)) & \text{def } F(A,_) \\
& = & F_1(1_{(A,B)}) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
& = & 1_{F_0((A,B))} & F \text{ funtor} \\
& = & 1_{F(A,_)(B)} & \text{def } F(A,_) \\
F(A, \beta'\circ\beta) & = & F_1((1_A, \beta'\circ\beta)) & \text{def } F(A,_) \\
& = & F_1((1_A\circ 1_A, \beta'\circ\beta)) & \\
& = & F_1((1_A,\beta')\circ(1_A,\beta)) & \text{def } \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
& = & F_1((1_A,\beta'))\circ F_1((1_A,\beta)) & F \text{ funtor} \\
& = & F(A,\beta')\circ F(A,\beta) & \text{def } F(A,_)
\end{array}$$

Análogamente para $F(\_, B)$. Por lo tanto, se cumple la primera condición.

Por otro lado, dada una flecha cualquiera $(A, B) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} (A', B') \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se cumple también la segunda condición:

$$
\begin{array}{rcll}
F(\alpha, B') \circ F(A, \beta) & = & F_1((\alpha, 1_{B'})) \circ F_1((1_A, \beta)) & \text{def } F(\_, B') \text{ y } F(A, \_) \\
 & = & F_1((\alpha, 1_{B'}) \circ (1_A, \beta)) & F \text{ funtor} \\
 & = & F_1((\alpha, \beta)) & \text{def } \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\
 & = & F(A', \beta) \circ F(\alpha, B) & \text{similar}
\end{array}
$$

Recíprocamente, asumamos ahora que ambas condiciones se cumplen y demostremos que F es funtor. Se verifica

$$
\begin{array}{rcll}
\mathit{dom}(F_1((\alpha, \beta))) & = & F_0((A, B)) & \text{condición 2} \\
 & = & F_0((\mathit{dom}(\alpha), \mathit{dom}(\beta))) & \\
 & = & F_0(\mathit{dom}((\alpha, \beta))) & \text{def } \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\
\mathit{cod}(F_1((\alpha, \beta))) & = & F_0(\mathit{cod}((\alpha, \beta))) & \text{similar} \\
F_1(1_{(A,B)}) & = & F_1((1_A, 1_B)) & \text{def } \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\
 & = & F(A, 1_B) \circ F(1_A, B) & \text{condición 2} \\
 & = & 1_{F_0((A,B))} \circ 1_{F_0((A,B))} & \text{condición 1} \\
 & = & 1_{F_0((A,B))} & \\
F_1((\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta)) & = & F_1((\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta)) & \text{def } \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\
 & = & F(A'', \beta' \circ \beta) \circ F(\alpha' \circ \alpha, B) & \text{condición 2} \\
 & = & F(A'', \beta') \circ F(A'', \beta) \circ F(\alpha', B) \circ F(\alpha, B) & \text{condición 1} \\
 & = & F(A'', \beta') \circ F(\alpha', B') \circ F(A', \beta) \circ F(\alpha, B) & \text{condición 2} \\
 & = & F_1((\alpha', \beta')) \circ F_1((\alpha, \beta)) & \text{condición 2}
\end{array}
$$

Esto se expresa en la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F_0(A,B) \arrow[d, "F(\alpha,B)"'] \arrow[dr, "F_1((\alpha,\beta))"] & & \\
F_0(A',B) \arrow[r, "F(A',\beta)"] \arrow[d, "F(\alpha',B)"'] & F_0(A',B') \arrow[d, "F(\alpha',B')"'] \arrow[dr, "F_1((\alpha',\beta'))"] & \\
F_0(A'',B) \arrow[r, "F(A'',\beta)"] & F_0(A'',B') \arrow[r, "F(A'',\beta')"] & F_0(A'',B'')
\end{tikzcd}
$$

Prop 250. *Dadas las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *es el objeto exponencial.*

Demostración. Comenzamos demostrando que $\epsilon : \mathbf{D}^{\mathbf{C}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ definida por

$$
\begin{array}{rcll}
\epsilon_0((F, C)) & = & F(C) & \\
\epsilon_1((F \xrightarrow{\eta} F', C \xrightarrow{\gamma} C')) & = & F'(\gamma) \circ \eta_C & \quad (= \eta_{C'} \circ F(\gamma) \text{ por ser } \eta \text{ natural})
\end{array}
$$

es un funtor. Para ello utilizamos el lema. Claramente $\epsilon(F, \_)$ es funtorial, ya que

$$\begin{array}{rcl} \epsilon(F, \_)(C) & = & \epsilon_0((F, C)) \\ & = & F(C) \\ \epsilon(F, C \xrightarrow{\gamma} C') & = & \epsilon_1((1_F, \gamma)) \\ & = & F(\gamma) \circ 1_{F(C)} \\ & = & F(\gamma) \end{array}$$

es decir, $\epsilon(F, \_) = F$ que es un funtor. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} \epsilon(\_, C)(F) & = & F(C) \\ \epsilon(F \xrightarrow{\eta} F', C) & = & \epsilon_1((\eta, 1_C)) \\ & = & F'(1_C) \circ \eta_C \\ & = & 1_{F'(C)} \circ \eta_C \\ & = & \eta_C \end{array}$$

es decir, $\epsilon(\_, C)$ = “seleccionar la componente C de la transformación natural”, que también es funtorial ya que $\epsilon(1_F, C) = (1_F)_C = 1_{F(C)}$ y $\epsilon(\eta' \circ \eta, C) = (\eta' \circ \eta)_C = \eta'_C \circ \eta_C = \epsilon(\eta', C) \circ \epsilon(\eta, C)$.

Como además se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \epsilon_0(F, C) \arrow[rr, "\epsilon(\eta, C) = \eta_C"] \arrow[d, "\epsilon(F, \gamma) = F(\gamma)"'] \arrow[drr, "\epsilon_1((\eta, \gamma))"] & & \epsilon_0(F', C) \arrow[d, "\epsilon(F', \gamma) = F'(\gamma)"] \\ \epsilon_0(F, C') \arrow[rr, "\epsilon(\eta, C') = \eta_{C'}"] & & \epsilon_0(F', C') \end{tikzcd}$$

conmuta por naturalidad de η y definición de ϵ_1, obtenemos por el lema que $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1)$ es un funtor.

En segundo lugar, debemos probar la existencia de la transpuesta. Dado un funtor $\mathbf{X} \times \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ se define $\mathbf{X} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. Aplicada a un objeto $X \in \mathbf{X}$, $\tilde{F}(X)$ es el siguiente funtor de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{F}(X)_0(C) & = & F(X, C) \\ \tilde{F}(X)_1(C \xrightarrow{\gamma} C') & = & F(X, \gamma) \end{array}$$

que es un funtor gracias al lema, ya que $\tilde{F}(X) = F(X, \_)$. Como $\tilde{F}(X)$ y $\tilde{F}(X')$ son funtores de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, dada una flecha $X \xrightarrow{\tau} X' \in \mathbf{X}$, $\tilde{F}(\tau)$ debe ser una transformación natural de $\tilde{F}(X) \longrightarrow \tilde{F}(X')$. La acción de $\tilde{F}$ sobre las flechas está dada por

$$\tilde{F}(X \xrightarrow{\tau} X')_C = F(X, C) \xrightarrow{F(\tau, C)} F(X', C)$$

con lo cual $\tilde{F}(\tau)$ es, como pretendíamos, una transformación natural de $\tilde{F}(X)$ en $\tilde{F}(X')$, ya que por ser F funtor, la condición 2 del lema lo garantiza:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{F}(X)(C) = F(X,C) \arrow[r, "F(\tau,C) = \tilde{F}(\tau)_C"] \arrow[d, "\tilde{F}(X)(\gamma) = F(X,\gamma)"'] & F(X',C) = \tilde{F}(X')(C) \arrow[d, "F(X',\gamma) = \tilde{F}(X')(\gamma)"] \\
\tilde{F}(X)(C') = F(X,C') \arrow[r, "F(\tau,C') = \tilde{F}(\tau)_{C'}"] & F(X',C') = \tilde{F}(X')(C')
\end{tikzcd}$$

La naturalidad de $\tilde{F}(\tau)$ confirma que efectivamente $\tilde{F}$ es un funtor de $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

El siguiente paso es comprobar que $\epsilon \circ (\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}}) = F$:

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon((\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}})((X,C))) & = & \epsilon_0((\tilde{F}(X),C)) \\
& = & \tilde{F}(X)(C) \\
& = & F(X,C) \\
\epsilon((\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}})((\tau,\gamma))) & = & \epsilon_1((\tilde{F}(\tau),\gamma)) \\
& = & \tilde{F}(X')(\gamma) \circ \tilde{F}(\tau)_C \\
& = & F(X',\gamma) \circ F(\tau,C) \\
& = & F(\tau,\gamma)
\end{array}$$

y con ello la igualdad $\epsilon \circ (\tilde{F} \times 1_{\mathbf{C}}) = F$ vale.

Para ver unicidad de $\tilde{F}$, sea $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ tal que $\epsilon \circ (G \times 1_{\mathbf{C}}) = F : \mathbf{X} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, veamos que $G = \tilde{F}$. Sea $X \in \mathbf{X}$, veamos que $G(X)$ y $\tilde{F}(X)$ son el mismo funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Cuando los aplicamos a un objeto de $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{F}(X)(C) & = & F(X,C) \\
& = & \epsilon_0((G \times 1_{\mathbf{C}})((X,C))) \\
& = & \epsilon_0((G(X),C)) \\
& = & G(X)(C)
\end{array}$$

Cuando lo aplicamos a una flecha de $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{F}(X)(\gamma) & = & F(X,\gamma) \\
& = & F((1_X,\gamma)) \\
& = & \epsilon_1((G \times 1_{\mathbf{C}})((1_X,\gamma))) \\
& = & \epsilon_1((G(1_X),\gamma)) \\
& = & \epsilon_1((1_{G(X)},\gamma)) \\
& = & G(X)(\gamma) \circ (1_{G(X)})_C \\
& = & G(X)(\gamma)
\end{array}$$

Por lo tanto, $G(X)$ y $\tilde{F}(X)$ son el mismo funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Sea ahora $X \xrightarrow{\tau} X'$, veamos que $G(\tau)$ y $\tilde{F}(\tau)$ son la misma transformación natural de $G(X) = \tilde{F}(X)$ en

$G(X') = \tilde{F}(X')$:

$$\begin{array}{rcl}\tilde{F}(\tau)_C & = & F(\tau, C) \\ & = & F((\tau, 1_C)) \\ & = & \epsilon_1((G \times 1_{\mathbf{C}})((\tau, 1_C))) \\ & = & \epsilon_!((G(\tau), 1_C)) \\ & = & G(X')(1_C) \circ G(\tau)_C \\ & = & 1_{G(X')(C)} \circ G(\tau)_C \\ & = & G(\tau)_C\end{array}$$

Obteniendo lo que se buscaba $G = \tilde{F}$.

Ejemplo 251. $\mathbf{C}^{\mathbf{1}} \cong \mathbf{C}$. *En realidad, es una propiedad general del exponencial: Si* $\mathbf{C}$ *tiene objeto terminal, entonces para todo* $B \in \mathbf{C}$*,* B^1 *existe y* $B^1 \cong B$.

De todas formas, analizando el caso particular de $\mathbf{Cat}$*, un objeto de* $\mathbf{C}^{\mathbf{1}}$ *es un funtor de* $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{C}$*, como* $\mathbf{1}$ *tiene un sólo objeto (*) y la flecha identidad* 1_**,* ***definir ese funtor*** F ***equivale a seleccionar un objeto*** $F(*)$ ***de*** $\mathbf{C}$ *(y* $F(1_*)$ *obligatoriamente es* $1_{F(*)}$*).*

En $\mathbf{Set}$ *ocurre lo mismo: hay una correspondencia entre flechas (funciones) de* $1 \to A$ *y los elementos de* A*. Esta correspondencia da lugar a que en todas las categorías con objeto terminal se interpreten las flechas de* $1 \to A$ *como "elementos" de* A*, a pesar de que uno pueda estar considerando una categoría en que los objetos no tengan elementos.*

Ejemplo 252. $\mathbf{C}^{\mathbf{2}} \cong \mathbf{C}^{\to}$*. En efecto, como la categoría* $\mathbf{2}$ *es* $* \xrightarrow{f} \square$*,* ***definir un funtor de*** $\mathbf{2} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ ***equivale a elegir una flecha*** $F(*) \longrightarrow F(\square)$ ***en*** $\mathbf{C}$*, es decir, un objeto de* $\mathbf{C}^{\to}$*. Una transformación natural* $F \xrightarrow{\eta} G$ *equivale a dos flechas* η_* *y* $\eta_\square$ *tales que*

$$\begin{tikzcd} F(*) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(*) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(\square) \arrow[r, "\eta_\square"] & G(\square) \end{tikzcd}$$

que es exactamente la condición para ser flecha en la categoría $\mathbf{C}^{\to}$.

Ejercicio 253. *Si* $\mathbf{J}$ *es la categoría discreta con dos objetos, entonces* $\mathbf{C}^{\mathbf{J}} \cong \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Ejemplo 254. *Se generaliza: si* $\mathbf{J}$ *es una categoría discreta, entonces* $\mathbf{C}^{\mathbf{J}} \cong \prod_{j \in \mathbf{J}} \mathbf{C}$.

Ejemplo 255. *¿Cuáles son los objetos de la categoría* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$*? Son funtores de* $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$*. Como dijimos que los objetos de una categoría son identificables con los funtores de* $\mathbf{1}$ *en ella, también podemos decir que los objetos de* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *son funtores de* $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Ejemplo 256. *¿Cuáles son las flechas de la categoría* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$*? Son transformaciones naturales entre funtores de* $\mathbf{C}$ *en* $\mathbf{D}$*. Dijimos que las flechas de una categoría pueden identificarse con funtores de* $\mathbf{2}$ *en ella. Entonces, las flechas de* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *son funtores de* $\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$*, o funtores de* $\mathbf{1} \longrightarrow (\mathbf{D}^{\mathbf{C}})^{\mathbf{2}}$*, o funtores* $\mathbf{C} \times \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{D}$ *o funtores* $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathbf{2}}$.