(Decimoquinta clase: Categorías funtoriales. Funtores full y faithful. Equivalencia entre categorías)

Una categoría funtorial es una categoría de la forma $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. En cierta forma, todas las categorías lo son ya que $\mathbf{C} \cong \mathbf{C}^{\mathbf{1}}$. Vimos que $\mathbf{C}^{\rightarrow} \cong \mathbf{C}^{\mathbf{2}}$, o sea que $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ es una categoría funtorial. Vimos que los productos de la forma $\prod_{i \in I} \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ no depende de $i \in I$, son categorías funtoriales. Veremos que **Graph** también es una categoría funtorial.

Ejemplo 257. *Si recordamos la definición 4, un grafo es una cuadrupla* $G = (N, A, dom, cod)$ *donde* N *es un conjunto de nodos,* A*, un conjunto de aristas o arcos dirigidos, y dom y cod, funciones de* A *en* N*.*

Es decir, un grafo consiste de dos conjuntos y dos funciones:

$$A \underset{cod}{\overset{dom}{\rightrightarrows}} N$$

Hay una correspondencia directa entre grafos y funtores de $* \underset{c}{\overset{d}{\rightrightarrows}} \Box$ *en* **Set***. Llamemos* Γ *a la categoría* $* \underset{c}{\overset{d}{\rightrightarrows}} \Box$*. El grafo de arriba corresponde al funtor* $\Gamma \xrightarrow{G} \mathbf{Set}$ *definido por* $G(*) = A$*,* $G(\Box) = N$*,* $G(d) = dom$ *y* $G(c) = cod$*.*

De acuerdo a la definición 44, un homomorfismo de grafos es un par de funciones $F_0 : N \rightarrow N'$ *y* $F_1 : A \rightarrow A'$ *tal que para toda arista* $a \in A$*,* $dom'(F_1(a)) = F_0(dom(a))$ *y* $cod'(F_1(a)) = F_0(cod(a))$*. Gráficamente, esto equivale a que* F_0 *y* F_1 *hagan conmutar los diagramas*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "dom"'] & A' \arrow[d, "dom'"] \\ N \arrow[r, "F_0"] & N' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "cod"'] & A' \arrow[d, "cod'"] \\ N \arrow[r, "F_0"] & N' \end{tikzcd}$$

En términos de funtores, si además de $\Gamma \xrightarrow{G} \mathbf{Set}$ *tenemos* $\Gamma \xrightarrow{G'} \mathbf{Set}$ *definido por* $G'(*) = A'$*,* $G'(\Box) = N'$*,* $G'(d) = dom'$ *y* $G'(c) = cod'$*,* F_0 *y* F_1 *hacen conmutar los diagramas*

$$\begin{tikzcd} G(*) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "G(d)"'] & G'(*) \arrow[d, "G'(d)"] \\ G(\Box) \arrow[r, "F_0"] & G'(\Box) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(*) \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "G(c)"'] & G'(*) \arrow[d, "G'(c)"] \\ G(\Box) \arrow[r, "F_0"] & G'(\Box) \end{tikzcd}$$

Esta propiedad equipara a las funciones F_1 *y* F_0 *con una transformación natural* η*, donde* $\eta_* = F_1$ *y* $\eta_\Box = F_0$*. Es decir: los grafos son funtores de* Γ *en* **Set***, y los homomorfismos de grafos, transformaciones naturales entre tales funtores. Luego* $\mathbf{Graph} \cong \mathbf{Set}^{\Gamma}$ *y* **Graph** *es una categoría funtorial.*

Ejemplo 258. *La categoría* **Poset** *cuyos objetos son conjuntos parcialmente ordenados y cuyas flechas son funciones monótonas, es CCC. En efecto, el objeto terminal es el poset unitario* $\{*\}$ *con el único orden parcial posible* $(* \leq *)$*. El producto cartesiano de dos posets se obtiene haciendo el producto cartesiano de los conjuntos subyacentes y tomando el orden entre los pares resultantes, componente a componente. El exponencial entre dos posets* P *y* Q *se obtiene considerando el conjunto de funciones monótonas de* P *a* Q *y tomando como orden entre dos tales funciones,* $f \leq g$ *sii* $f(p) \leq_Q g(p)$ *para todo* $p \in P$*. En suma,* **Poset** *es CCC.*

También vimos que un poset P *puede ser visto como categoría donde los objetos son los elementos de* P*, y una flecha (a lo sumo) entre dos objetos* $x, y \in P$ *expresa que* $x \leq_P y$*. Esto determina un funtor trivial, llamado funtor inclusión* I*, de* **Poset** *en* **Cat***.*

Ahora sabemos que **Cat** *también es CCC. Más aún, la categoría* **1** *es en realidad un poset, ¡y es el poset 1! O sea que* $I(1) = \mathbf{1}$*. Si consideramos dos posets* P *y* Q*, da lo mismo hacer el producto cartesiano de la manera que acabamos de explicar que hacerlo utilizando la definición de producto de categorías. O sea que* $I(P \times Q) = I(P) \times I(Q)$*.*

Por último, sean P *y* Q *posets vistos como categorías (por simplicidad, omitimos* I*). Un funtor* F *de* P *en* Q *debe enviar flechas* $x \leq_P y \in P$ *en flechas* $F(x) \leq_Q F(y) \in Q$*. Luego, ser un tal funtor equivale a ser una función monótona. Dados dos de esos funtores* $P \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} Q$*, una transformación natural* $F \xrightarrow{\eta} G$ *es una familia de flechas de* Q *indexada por* $x \in P$ *de la forma* $F(x) \xrightarrow{\eta_x} G(x)$ *tales que ciertos cuadrados en* Q *conmutan. Como la conmutatividad en la categoría* Q *no me dice nada (sus flechas son a lo sumo únicas)* η *sólo establece que para todo* $x \in P$*,* $F(x) \leq_Q G(x)$*. ¡Esto coincide con el exponencial entre* P *y* Q *en la categoría* **Poset***! O sea que* $I(Q^P) = I(Q)^{I(P)}$*.*

Conclusión: el funtor de inclusión $\mathbf{Poset} \xrightarrow{I} \mathbf{Cat}$ *preserva la estructura CCC.*

Ejercicio 259. *Demostrar, como se afirmó en el ejemplo anterior, que el objeto exponencial de la categoría* **Poset** *se obtiene tomando las funciones monótonas ordenadas punto a punto (*$f \leq g$ *sii* $f(p) \leq_Q g(p)$*).*

Funtores inyectivos, suryectivos, faithful y full. Dada una categoría $\mathbf{C}$, la categoría $\mathbf{C} + \mathbf{C}$ consiste de dos copias de $\mathbf{C}$. Existe un único funtor $\mathbf{C} + \mathbf{C} \xrightarrow{\nabla} \mathbf{C}$ (el funtor codiagonal) tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "1_{\mathbf{C}}"'] & \mathbf{C}+\mathbf{C} \arrow[d, "\nabla"] & \mathbf{C} \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "1_{\mathbf{C}}"] \\ & \mathbf{C} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

El funtor ∇ no es inyectivo. Dado un objeto $A \in \mathbf{C}$, $\nabla((1, A)) = A = \nabla((2, A))$. Dada una flecha $A \xrightarrow{f} B \in \mathbf{C}$, $\nabla((1, f)) = f = \nabla((2, f))$. Pero dados dos objetos

A y B de la categoría $\mathbf{C}+\mathbf{C}$, la restricción de ∇ a $Hom(A,B)$ sí es inyectiva. A los funtores que satisfacen esta propiedad se los llama **faithful**.

Algo similar puede ocurrir con suryectividad. Sea $\mathbf{Set_{fin}} \xrightarrow{I} \mathbf{Set}$ el funtor inclusión de la categoría $\mathbf{Set_{fin}}$ en la categoría $\mathbf{Set}$. Claramente I no es suryectivo en objetos ni en flechas. Pero dado un par de objetos (conjuntos finitos) A y B de $\mathbf{Set_{fin}}$, la restricción de I a $Hom(A,B)$ es suryectiva. A los funtores que satisfacen esta propiedad se los llama **full**.

Definición 260. *Un funtor* $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ *se dice*

- ***(in/sur)yectivo sobre objetos*** *si* $F_0 : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{D}_0$ *es (in/sur)yectiva,*
- ***(in/sur)yectivo sobre flechas*** *si* $F_1 : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{D}_1$ *es (in/sur)yectiva,*
- ***(in/sur)yectivo*** *si es (in/sur)yectivo sobre objetos y sobre flechas,*
- ***faithful*** *si para todo* $A, B \in \mathbf{C}_0$*, la restricción de* F *a* $Hom_{\mathbf{C}}(A,B)$*, denotada* $F_{A,B} : Hom_{\mathbf{C}}(A,B) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(A),F(B))$ *es inyectiva, y*
- ***full*** *si para todo* $A, B \in \mathbf{C}_0$*,* $F_{A,B}$ *es suryectiva.*

Ejercicio 261. *¿Qué se puede decir de los funtores* ι_1 *y* ι_2*? ¿Son inyectivos, suryectivos, faithful o full? ¿Es* $[F,G]$ *inyectivo/suryectivo/faithful/full si* F *y* G *lo son?*

Ejercicio 262. *Construir el funtor diagonal* $\mathbf{C} \xrightarrow{\triangle} \mathbf{C}\times\mathbf{C}$*. ¿Qué puede decir sobre él, y sobre los funtores* π_1 *y* π_2*? ¿Y sobre*$<F,G>$*?*

Ejercicio 263. *¿Es el funtor codiagonal* $\mathbf{C}+\mathbf{C} \xrightarrow{\nabla} \mathbf{C}$ *full?*

Ejercicio 264. *¿Cuáles de las siguientes combinaciones son posibles para un funtor* F*?*

1. F *es inyectivo sobre objetos pero no sobre flechas.*
2. F *es inyectivo sobre flechas pero no sobre objetos.*
3. F *es suryectivo sobre objetos pero no sobre flechas.*
4. F *es suryectivo sobre flechas pero no sobre objetos*
5. F *es inyectivo sobre flechas pero no es faithful.*
6. F *es faithful pero no es inyectivo sobre flechas.*
7. F *es suryectivo sobre flechas pero no es full.*
8. F *es full pero no es suryectivo sobre flechas.*

Ejemplo 265. *¿Cuándo es faithful el funtor* $\mathbf{C} \xrightarrow{Hom(A,\_)} \mathbf{Set}$*? Recordemos que aplicado a una flecha* $B \xrightarrow{g} B'$*, se había definido* $Hom(A,B) \xrightarrow{Hom(A,g)} Hom(A,B')$ *por* $Hom(A,g)(f) = g \circ f$*. Que* $Hom(A,\_)$ *sea faithful significa que para todo* B *y* B'*, y para todo* $B \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} B'$*, si* $Hom(A,g) = Hom(A,g')$ *entonces* $g = g'$*. La igualdad* $Hom(A,g) = Hom(A,g')$ *equivale a* $\forall x \in Hom(A,B).\ g\circ x = g'\circ x$*. Entonces,* $Hom(A,\_)$ *es faithful sii para todo* B *y* B'*, y para todo* $B \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} B'$ *el objeto* A *satisface*

$$(\forall A \xrightarrow{x} B.\ g\circ x = g'\circ x) \Longrightarrow g = g'$$

Observar la similaridad con la igualdad extensional de funciones (acá g *y* g' *son flechas). Cuando el objeto* A *satisface esta propiedad se dice que es un* ***generador*** *de* $\mathbf{C}$*.*

En la categoría **Set***, por ejemplo, cualquier objeto (salvo el conjunto vacío) es un generador. Por ello,* $\mathbf{Set} \xrightarrow{Hom(A,\_)} \mathbf{Set}$ *es faithful para todo conjunto no vacío A.*

Las categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son isomorfas ($\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$) si existen funtores $\mathbf{C} \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $1_\mathbf{C} = F \circ E$ y $1_\mathbf{D} = E \circ F$. Con frecuencia uno se encuentra frente a dos categorías que, sin ser isomorfas, se asemejan lo suficiente como para considerarse equivalentes.

Definición 266. *Las categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son* ***equivalentes*** *($\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$) si existen funtores $\mathbf{C} \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ e isomorfismos naturales $1_\mathbf{C} \xrightarrow{\alpha} F \circ E$ y $1_\mathbf{D} \xrightarrow{\beta} E \circ F$.*

Como puede apreciarse, a partir de la definición de isomorfismo entre categorías, la de equivalencia se obtiene reemplazando (relajando) las igualdades por isomorfismos naturales. Trivialmente, si $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$ entonces $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

Prop 267. *Sea $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ un funtor full, faithful y "esencialmente suryectivo" sobre los objetos, es decir, tal que $\forall D \in \mathbf{D}.\ \exists C \in \mathbf{C}.\ D \cong F(C)$. Entonces $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.*

Ejemplo 268. *Consideremos el funtor F de* $\mathbf{Set}*$ *en* $\mathbf{Pfn}$*:*

- $F_0((a, A)) = A - \{a\}$
- $F_1((a, A) \xrightarrow{f} (b, B)) = \{(x, y) \in f \mid y \neq b\}$.

En el parcial, se demostró que F es un funtor y se definió un funtor G de $\mathbf{Pfn}$ a $\mathbf{Set}*$ tal que $F \circ G = 1_\mathbf{Pfn}$. Las categorías no son isomorfas ya que F no es inyectivo, por ejemplo: $F_0(a, \{a\}) = \{\} = F_0(b, \{b\})$. Por ello, $G \circ F \neq 1_{\mathbf{Set}*}$.

Pero sin embargo $\mathbf{Set}* \simeq \mathbf{Pfn}$.

Se puede ver que F es esencialmente suryectivo sobre los objetos. En realidad es más que eso, es suryectivo sobre los objetos: sea $A \in \mathbf{Set}$, $A = F_0((*, A \cup \{*\}))$ para cualquier $* \notin A$.

Además, F es full: sean $(a, A), (b, B) \in \mathbf{Set}*$ y $f \in Hom_\mathbf{Pfn}(A - \{a\}, B - \{b\})$, definimos $f' \in Hom_{\mathbf{Set}*}((a, A), (b, B))$ por $f' = f \cup \{(x, b) \mid x \in A - dominio(f)\}$ (no confundir con $dom(f) = A - \{a\}$). Se comprueba que $F_1(f') = f$.

Por último, F es faithful: sean $(a, A), (b, B) \in \mathbf{Set}*$ y $f, g \in Hom_{\mathbf{Set}*}((a, A), (b, B))$ tales que $F_1(f) = F_1(g)$. Sea $x \in A$. Como f y g son totales $f(x)$ y $g(x)$ están definidas. Debemos demostrar que $f(x) = g(x)$. Si $f(x) \neq b$, entonces $F_1(f)(x)$ está definida y $f(x) = F_1(f)(x) = F_1(g)(x) = g(x)$. Análogamente, si $g(x) \neq b$, $g(x) = f(x)$. El único caso que resta es cuando $f(x) = b = g(x)$.

Por la proposición 267, $\mathbf{Set}* \simeq \mathbf{Pfn}$.

Ejercicio 269. *En el parcial, se definió un funtor G tal que $F \circ G = 1_\mathbf{Pfn}$. Demostrar que $\mathbf{Set}* \simeq \mathbf{Pfn}$ de forma directa, comprobando que $G \circ F \cong 1_{\mathbf{Set}*}$.*