(DÉCIMOSEXTA CLASE: CATEGORÍAS EQUIVALENTES. EMBEDDING YONEDA.)

La clase pasada se formuló y usó la siguiente

Prop 270. *Sea* $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$ *un funtor full, faithful y "esencialmente suryectivo" sobre los objetos, es decir, tal que* $\forall D \in \mathbf{D}.\ \exists C \in \mathbf{C}.\ D \cong F(C)$. *Entonces* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

que a continuación demostraremos.

Demostración: Como F es esencialmente suryectivo sobre los objetos, sea $E_0 : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{C}_0$ tal que $\forall D \in \mathbf{D}$. $\exists \beta_D$ iso tal que $D \xrightarrow{\beta_D} F(E_0(D))$. Queremos que β sea un isomorfismo natural (como los β_D son isos, restaría naturalidad): dada $D \xrightarrow{h} D' \in \mathbf{D}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta_D"] \arrow[d, "h"'] & F(E_0(D)) \arrow[d, "\beta_{D'} \circ h \circ \beta_D^{-1}"] \\ D' \arrow[r, "\beta_{D'}"] & F(E_0(D')) \end{tikzcd}$$

conmuta. ¿Es la flecha $\beta_{D'} \circ h \circ \beta_D^{-1}$ la imagen por F de alguien? Sí, porque F es full. Llamemos $E_1(h)$ a ese alguien, que además es único por ser F faithful. Reescribimos el diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta_D"] \arrow[d, "h"'] & F(E_0(D)) \arrow[d, "F(E_1(h))"] \\ D' \arrow[r, "\beta_{D'}"] & F(E_0(D')) \end{tikzcd}$$

Es fácil comprobar que $\mathbf{D} \xrightarrow{E=(E_0,E_1)} \mathbf{C}$ es un funtor.

Ejercicio 271. *Probar que E es un funtor.*

Demostrado eso, la conmutatividad del diagrama, unida a que las β_D eran isos, expresa que $1_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\beta} F \circ E$ es un isomorfismo natural.

Para hallar α, sea $C \in \mathbf{C}$ y consideremos $D = F(C) \in \mathbf{D}$. Sabemos que hay un iso $F(C) = D \xrightarrow{\beta_D} F(E(D))$. Como F es full, existe α_C tal que $F(\alpha_C) = \beta_D$.

Ejercicio 272. *Probar que α_C es iso.*

Ejercicio 273. *Probar que $1_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\alpha} E \circ F$ es natural.*

De donde se concluye que $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

En realidad el recíproco también vale:

Prop 274. *Sean* $\mathbf{C} \underset{E}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ *tales que* $1_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\alpha} E \circ F$ *y* $1_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\beta} F \circ E$ *son isomorfismos naturales. Entonces E y F son full, faithful y esencialmente suryectivos.*

Demostración: Sea $D \in \mathbf{D}$, entonces $D \xrightarrow{\beta_D} F(E(D))$ iso, o sea, $D \cong F(E(D))$, luego F es esencialmente suryectivo. Análogamente, E es esencialmente suryectivo.

Sea $C \xrightarrow{f} C' \in \mathbf{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"'] & E(F(C)) \arrow[d, "E(F(f))"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & E(F(C')) \end{tikzcd}$$

conmuta. Por ser α iso, $f = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(F(f)) \circ \alpha_C$. Si ahora $F(f) = F(g)$ se obtiene $f = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(F(f)) \circ \alpha_C = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(F(g)) \circ \alpha_C = g$. Luego, F es faithful. Análogamente, E es faithful.

Sea ahora $F(C) \xrightarrow{h} F(C')$ y $f = \alpha_{C'}^{-1} \circ E(h) \circ \alpha_C$. Entonces, los diagramas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"'] & E(F(C)) \arrow[d, "E(h)"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & E(F(C')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "f"'] & E(F(C)) \arrow[d, "E(F(f))"] \\ C' \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & E(F(C')) \end{tikzcd}$$

conmutan (el primero por definición de f y el segundo por ser $1_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\alpha} E \circ F$). Por ser α iso, $E(h) = E(F(f))$. Como E es faithful, $F(f) = h$. Luego, F es full. Análogamente, E es full.

Ejemplo 275. *Sea un conjunto I, y consideremos la categoría $\mathbf{Set}^I$ cuyos objetos son familias de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$ y cuyas flechas (de $(A_i)_{i\in I}$ en $(B_i)_{i\in I}$) son familias de funciones $(f_i)_{i\in I}$ tales que $\forall i \in I. A_i \xrightarrow{f_i} B_i$.*

Ejercicio 276. *¿Por qué la notación $\mathbf{Set}^I$? ¿Es una categoría funtorial?*

Consideremos también la categoría $\mathbf{Set}/I$: sus objetos son funciones $A \xrightarrow{f} I$ y sus flechas (de $A \xrightarrow{f} I$ en $B \xrightarrow{g} I$) son funciones $A \xrightarrow{h} B$ tales que $g \circ h = f$.

Se puede comprobar que $\mathbf{Set}^I \simeq \mathbf{Set}/I$. En efecto, sea $\mathbf{Set}^I \xrightarrow{F} \mathbf{Set}/I$ definida por

$$\begin{array}{rcl} F((A_i)_{i\in I}) & = & \sum_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi} I \\ F((f_i)_{i\in I}) & = & \sum_{i\in I} f_i \end{array}$$

donde $\sum_{i\in I} A_i = \{(i,a) \mid i \in I \wedge a \in A_i\}$, $\pi((i,a)) = i$ y $\sum_{i\in I} A_i \xrightarrow{\sum_{i\in I} f_i} \sum_{i\in I} B_i$ se define por $(\sum_{i\in I} f_i)((i,a)) = (i, f_i(a))$. Sea además $\mathbf{Set}/I \xrightarrow{E} \mathbf{Set}^I$ definida por

$$\begin{array}{rcl} E(A \xrightarrow{f} I) & = & (f^{-1}(i))_{i\in I} \\ E(f \xrightarrow{h} g) & = & (h/f^{-1}(i))_{i\in I} \end{array}$$

donde $/$ es el operador de restricción de una función a un subconjunto del dominio.

Ejercicio 277. *¿Es* $1_{\mathbf{Set}^I} = E \circ F$*? ¿Es* $1_{\mathbf{Set}/I} = F \circ E$*?*

Para cada $A = (A_i)_{i \in I}$*, sea* $A \xrightarrow{\beta_A} E(F(A))$ *definida por* $\beta_A = ((\beta_A)_i)_{i \in I}$ *donde* $(\beta_A)_i(a) = (i, a)$*.*

Ejercicio 278. *Comprobar que* $A \xrightarrow{\beta_A} E(F(A))$*, que* β_A *es un isomorfismo y que* β *es natural.*

También para cada $A \xrightarrow{f} I$*, sea* $f \xrightarrow{\alpha_f} F(E(f))$ *(en realidad,* $\alpha_f : A \longrightarrow \sum_{i \in I} f^{-1}(i)$*) definida por* $\alpha_f(a) = (f(a), a)$*.*

Ejercicio 279. *Comprobar que* $f \xrightarrow{\alpha_f} F(E(f))$*, que* α_f *es un isomorfismo y que* α *es natural.*

La solución de estos ejercicios establece que $1_{\mathbf{Set}^I} \xrightarrow{\beta} E \circ F$ *y* $1_{\mathbf{Set}/I} \xrightarrow{\alpha} F \circ E$ *son isomorfismos naturales. Luego,* $\mathbf{Set}^I \simeq \mathbf{Set}/I$*.*

Ejercicio 280. *Demostrar que* $\mathbf{Set}^I \simeq \mathbf{Set}/I$ *utilizando la proposición 267.*

Ejercicio 281. *¿Se cumple que* $\mathbf{Set}^I \cong \mathbf{Set}/I$*?*

Ejercicio 282. *Demostrar que una transformación natural es iso sii es una familia de isomorfismos.*

Ejercicio 283. *¿Se cumple lo mismo para transformaciones naturales mono? Una transformación natural, ¿es mono sii es una familia de monos? ¿Y para epi?*

Yoneda. Recordemos que dado el objeto C de una categoría localmente pequeña $\mathbf{C}$, se obtiene el funtor representable covariante $Hom(C, \_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$:

$$\begin{aligned} Hom(C, \_)(X) &= Hom(C, X) \\ Hom(C, \_)(X \xrightarrow{f} X') &= Hom(C, f) \\ &= h \mapsto f \circ h : Hom(C, X) \longrightarrow Hom(C, X') \end{aligned}$$

que se suele escribir más brevemente $Hom(C, f)(h) = f \circ h$. Si ahora tomamos dos objetos $C, D \in \mathbf{C}$ tendremos dos funtores de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$: $Hom(C, \_)$ y $Hom(D, \_)$. Es más, dado $C \xrightarrow{h} D$ definimos, para cada $X \in \mathbf{C}$ una función de $Hom(D, X)$ en $Hom(C, X)$ que manda f en $f \circ h$. A esta función ya la conocemos y la habíamos denotado $Hom(h, X)$: el funtor representable contravariante $Hom(\_, X) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ aplicado a la flecha h.

Tenemos, entonces, para cada $X \in \mathbf{C}$ una función $Hom(h, X) : Hom(D, X) \longrightarrow Hom(C, X)$. Entonces tenemos una familia de funciones indexada por los objetos de $\mathbf{C}$, la denotamos $Hom(h, \_)$. Si esta familia es una transformación natural de $Hom(D, \_)$ en $Hom(C, \_)$ tenemos que k, definido por $k(C) = Hom(C, \_)$ es un funtor $\mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$.

Veamos que efectivamente es una transformación natural: Sea $X \xrightarrow{f} X'$

$$\begin{tikzcd} Hom(D,X) \arrow[r, "Hom(h,X)"] \arrow[d, "Hom(D,f)"'] & Hom(C,X) \arrow[d, "Hom(C,f)"] \\ Hom(D,X') \arrow[r, "Hom(h,X')"] & Hom(C,X') \end{tikzcd}$$

conmuta, ya que para todo $g \in Hom(D,X)$,

$$\begin{array}{rcl} Hom(C,f)(Hom(h,X)(g)) & = & Hom(C,f)(g \circ h) \\ & = & (g \circ h) \circ f \\ & = & g \circ (h \circ f) \\ & = & Hom(h,X')(f \circ g) \\ & = & Hom(h,X')(Hom(D,f)(g)) \end{array}$$

Luego, k es un funtor $\mathbf{C^{op}} \xrightarrow{k} \mathbf{Set^C}$. Es contravariante porque lleva una flecha $C \xrightarrow{h} D$ en una transformación natural $Hom(h,\_) : Hom(D,\_) \longrightarrow Hom(C,\_)$. El funtor k es la transpuesta del bifuntor $Hom(\_,\_) : \mathbf{C^{op}} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

Ejercicio 284. *Utilizar el lema bifuntor 249 para demostrar que $Hom(\_,\_)$ es un funtor.*

También se puede transponer el bifuntor con respecto al otro argumento, obteniendo ahora un funtor covariante $y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set^{C^{op}}}$:

$$\begin{array}{rcl} y(C) & = & Hom(\_,C) \\ y(C \xrightarrow{h} D) & = & Hom(\_,h) \end{array}$$

donde $Hom(\_,h)$ es una transformación natural entre $Hom(\_,C)$ y $Hom(\_,D)$ definida por $Hom(X,h)(X \xrightarrow{f} C) = h \circ f$.

Definición 285. *El **embedding Yoneda** es el funtor $C \xrightarrow{y} \mathbf{Set^{C^{op}}}$ que lleva $C \in \mathbf{C}$ al funtor representable contravariante:*

$$y(C) = Hom(\_,C) : \mathbf{C^{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

y $C \xrightarrow{f} D$ a la transformación natural

$$y(f) = Hom(\_,f) : Hom(\_,C) \longrightarrow Hom(\_,D)$$