(Décimoséptima clase: Lema de Yoneda)

Repasemos el embedding de Yoneda.

Dado un objeto $B \in \mathbf{C}$, vimos el funtor representable contravariante $Hom(\_, B) : \mathbf{C^{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ definido por

$$\begin{array}{rcl} Hom(\_, B)(A) & = & Hom(A, B) \\ Hom(\_, B)(A' \xrightarrow{f} A \in \mathbf{C^{op}}) & = & Hom(\_, B)(A \xrightarrow{f} A' \in \mathbf{C}) \\ & = & Hom(f, B) \\ & = & Hom(A', B) \xrightarrow{Hom(f,B)} Hom(A, B) \\ & = & h \mapsto h \circ f \end{array}$$

Es decir que $Hom(\_, B)$ es un objeto de la categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$. El embedding de Yoneda $y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$, aplicado a un objeto $B \in \mathbf{C}$ devuelve precisamente dicho objeto $Hom(\_, B)$ de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$. Para que este embedding sea un funtor es necesario definirlo también sobre las flechas $B \xrightarrow{h} B' \in \mathbf{C}$ de forma que de también una flecha de $y(B) = Hom(\_, B)$ en $y(B') = Hom(\_, B')$, es decir, una transformación natural de $y(B)$ en $y(B')$. Es fácil comprobar que si definimos $y(h)_A = Hom(A, h) = f \mapsto h \circ f$, entonces $y(h)$ es la transformación natural deseada:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ A' \end{tikzcd} \in \mathbf{C^{op}} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} y(B)(A) \arrow[r, "y(h)_A"] \arrow[d, "y(B)(f)"'] & y(B')(A) \arrow[d, "y(B')(f)"] \\ y(B)(A') \arrow[r, "y(h)_{A'}"] & y(B')(A') \end{tikzcd}$$

o sea,

$$\begin{tikzcd} Hom(A, B) \arrow[r, "{Hom(A,h)}"] \arrow[d, "{Hom(f,B)}"'] & Hom(A, B') \arrow[d, "{Hom(f,B')}"] \\ Hom(A', B) \arrow[r, "{Hom(A',h)}"] & Hom(A', B') \end{tikzcd}$$

cuya conmutatividad es obvia: sea $g \in Hom(A, B)$, $Hom(f, B')(Hom(A, h)(g)) = h \circ g \circ f = Hom(A', h)(Hom(f, B)(g))$.

Ejercicio 286. *Completar la prueba de que el embedding de Yoneda es un funtor: comprobar que preserva identidad y composición.*

Lema 287. *(Yoneda) Sea* $\mathbf{C}$ *localmente pequeña. Para todo objeto* $C \in \mathbf{C}$ *y funtor* $\mathbf{C^{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$ *hay un iso* $Hom(y(C), F) \xrightarrow{\eta_{C,F}} F(C)$ *que es natural en* C *y en* F*. Además,* $\eta_{C,F}(\mu) = \mu_C(1_C)$ *y* $\eta^{-1}_{C,F}(a)_X(h) = F(h)(a)$*.*

Observemos que tanto F como $y(C)$ son funtores de $\mathbf{C^{op}}$ en $\mathbf{Set}$, por lo tanto, son objetos en la categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ y por lo tanto, $Hom(y(C), F)$ tiene sentido, en realidad es, $Hom_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}}(y(C), F)$. Tanto $Hom(y(C), F)$ como $F(C)$ son objetos de **Set**, o sea que $\eta_{C,F}$ es una función, que el lema dice que es biyectiva y natural en C y en F. Es decir que, si dejamos por un momento de lado dicha naturalidad, el lema dice que hay exactamente una transformación natural del funtor $y(C)$ (es decir, del funtor $Hom(\_, C)$) en F por cada elemento de $F(C)$.

¿Cuál sería la transformación natural de $Hom(\_, C)$ en F asociada a $a \in F(C)$? Tal transformación natural ν debe ser una familia de funciones $Hom(X, C) \xrightarrow{\nu_X} F(X)$ para cada $X \in \mathbf{C^{op}}_0 = \mathbf{C}_0$. Sea $h \in Hom(X, C)$, debemos definir $\nu_X(h) \in F(X)$. Como $F \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ es contravariante, $F(C) \xrightarrow{F(h)} F(X)$, luego podemos definir $\nu_X(h) = F(h)(a)$.

Veamos que ν es natural: sea $X \xrightarrow{f} X' \in \mathbf{C^{op}}$ (o $X' \xrightarrow{f} X \in \mathbf{C}$), debemos ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom(X,C) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "Hom(f,C)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ Hom(X',C) \arrow[r, "\nu_{X'}"] & F(X') \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $h \in Hom(X, C)$:

$$\begin{array}{rcl} \nu_{X'}(Hom(f,C)(h)) & = & \nu_{X'}(h \circ f) \\ & = & F(h \circ f)(a) \\ & = & (F(f) \circ F(h))(a) \\ & = & F(f)(F(h)(a)) \\ & = & F(f)(\nu_X(h)) \end{array}$$

O sea que ν es una transformación natural de $Hom(\_, C)$ en F construida a partir de $a \in F(C)$. Por ello, se define $\eta^{-1}_{C,F}(a) = \nu$, es decir, $\eta^{-1}_{C,F}(a)_X(h) = F(h)(a)$.

Recíprocamente, dada una transformación natural $Hom(\_, C) \xrightarrow{\mu} F$ se obtiene fácilmente un elemento en $F(C)$. Basta con instanciarla en C mismo: $Hom(C, C) \xrightarrow{\mu_C} F(C)$ obtenemos $\mu_C(1_C) \in F(C)$. Por ello, se define $\eta_{C,F}(\mu) = \mu_C(1_C)$.

No hay que dejarse engañar por la notación: hemos definido $\eta_{C,F}$ y $\eta^{-1}_{C,F}$ pero no hemos demostrado que son inversas mutuas. Debemos demostrar que $\eta_{C,F} \circ \eta^{-1}_{C,F} = 1_{F(C)}$ y $\eta^{-1}_{C,F} \circ \eta_{C,F} = 1_{Hom(y(C), F)}$.

Demostrar que $\eta_{C,F} \circ \eta^{-1}_{C,F} = 1_{F(C)}$ es sencillo:

$$\begin{array}{rcl} \eta_{C,F}(\eta^{-1}_{C,F}(a)) & = & \eta^{-1}_{C,F}(a)_C(1_C) \\ & = & F(1_C)(a) \\ & = & 1_{F(C)}(a) \\ & = & a \end{array}$$

Para ver que $\eta^{-1}_{C,F} \circ \eta_{C,F}$ conviene observar primero que si $y(C) \xrightarrow{\mu} F$ es transformación natural, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom(C,C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "Hom(h,C)"'] & F(C) \arrow[d, "F(h)"] \\
Hom(X,C) \arrow[r, "\mu_X"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $h \in Hom(X,C)$. En particular, obtenemos que $F(h)(\mu_C(1_C)) = \mu_X(Hom(h,C)(1_C)) = \mu_X(h)$.

Observemos entonces: toda $\mu \in Hom(y(C),F)$ satisface $\mu_X(h) = F(h)(\mu_C(1_C))$.

Ahora sí

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}_{C,F}(\eta_{C,F}(\mu))_X(h) &= F(h)(\eta_{C,F}(\mu)) \\
&= F(h)(\mu_C(1_C)) \\
&= \mu_X(h)
\end{aligned}$$

Como esto vale para todo X y todo h, $\eta^{-1}_{C,F} \circ \eta_{C,F} = 1_{Hom(y(C),\,F)}$. Luego, $\eta_{C,F}$ y $\eta^{-1}_{C,F}$ son, tal como la notación lo sugiere, inversas mutuas.

Habiendo entendido la biyección $\eta_{C,F}$, resta comprobar su naturalidad, cosa que habíamos decidido dejar momentáneamente de lado. Que $\eta_{C,F}$ sea natural en C significa que para todo par de objetos $C, D \in \mathbf{C}$, y toda flecha $C \xrightarrow{h} D \in \mathbf{C^{op}}$ ($D \xrightarrow{h} C \in \mathbf{C}$) el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom(y(C),F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "Hom(y(h),F)"'] & F(C) \arrow[d, "F(h)"] \\
Hom(y(D),F) \arrow[r, "\eta_{D,F}"] & F(D)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Que $\eta_{C,F}$ sea natural en F significa que para todo par de funtores $F, G \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$, y toda transformación natural $F \xrightarrow{\alpha} G$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom(y(C),F) \arrow[r, "\eta_{C,F}"] \arrow[d, "Hom(y(C),\alpha)"'] & F(C) \arrow[d, "\alpha_C"] \\
Hom(y(D),F) \arrow[r, "\eta_{C,G}"] & G(C)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Para ver la conmutatividad del primer diagrama, sea $\mu \in Hom(y(C), F)$:

$$\begin{array}{rcl}
\eta_{D,F}(Hom(y(h),F)(\mu)) & = & \eta_{D,F}(\mu \circ y(h)) \\
& = & \eta_{D,F}(\mu \circ Hom(_, h)) \\
& = & (\mu_D \circ Hom(D,h))(1_D) \\
& = & \mu_D(Hom(D,h))(1_D)) \\
& = & \mu_D(h) \\
& = & F(h)(\mu_C(1_C)) \\
& = & F(h)(\eta_{C,F}(\mu))
\end{array}$$

Para ver la conmutatividad del segundo diagrama, sea nuevamente $\mu \in Hom(y(C), F)$:

$$\begin{array}{rcl}
\eta_{C,G}(Hom(y(C),\alpha)(\mu)) & = & \eta_{C,G}(\alpha \circ \mu) \\
& = & (\alpha_C \circ \mu_C)(1_C) \\
& = & \alpha_C(\mu_C(1_C)) \\
& = & \alpha_C(\eta_{C,F}(\mu))
\end{array}$$

Concluyendo de esta manera la prueba del lema de Yoneda.

Ejercicio 288. *Si F es full y faithfull, entonces $F(A) \cong F(B)$ implica $A \cong B$.*

Como el embedding de Yoneda es full y faithful (cosa que demostraremos pronto), este ejercicio, permite utilizar Yoneda de la siguiente manera: si quiero demostrar que $A \cong B$ demuestro $y(A) \cong y(B)$.

Ejemplo 289. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría cartesiana cerrada. Entonces $(A^B)^C \cong A^{B\times C}$.*

Demostrar esto usando la definición de exponencial y de producto puede ser muy complicado. Gracias a Yoneda, sin embargo, resulta consecuencia de que $y((A^B)^C) \cong y(A^{B\times C})$. Para demostrar este isomorfismo, sea $X \in \mathbf{C}$:

$$\begin{array}{rcl}
y((A^B)^C)(X) & = & Hom(X, (A^B)^C) \\
& \cong & Hom(X \times C, A^B) \\
& \cong & Hom((X \times C) \times B, A) \\
& \cong & Hom(X \times (B \times C), A) \\
& \cong & Hom(X, A^{B\times C}) \\
& = & y(A^{B\times C})(X)
\end{array}$$

Como son isomorfismos en **Set** significan biyecciones y son fáciles de probar porque conocemos cómo manipular funciones. Para deducir de $y((A^B)^C)(X) \cong y(A^{B\times C})(X)$ que $y((A^B)^C) \cong y(A^{B\times C})$ necesitamos ver que cada uno de las ecuaciones anteriores son “naturales”.

Por ejemplo, para la primera ecuación se debe demostrar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X & Hom(X,(A^B)^C) \arrow[r, "h \mapsto \epsilon \circ (h \times 1_C)"] \arrow[d, "h \mapsto h \circ f"'] & Hom(X \times C, A^B) \arrow[d, "h \mapsto h \circ (f \times 1_C)"] \\
X' \arrow[u, "f"] & Hom(X',(A^B)^C) \arrow[r, "h \mapsto \epsilon \circ (h \times 1_C)"] & Hom(X' \times C, A^B)
\end{tikzcd}$$

que equivale a demostrar $\epsilon \circ (h \times 1_C) \circ (f \times 1_C) = \epsilon \circ ((h \circ f) \times 1_C)$.

Para la segunda ecuación y para la cuarta, es similar. Por último, para la tercera, se debe demostrar la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} Hom((X \times C) \times B, A) \arrow[r, "h \mapsto h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2>"] \arrow[d, "h \mapsto h \circ ((f \times 1_C) \times 1_B)"] & Hom(X \times (B \times C), A) \arrow[d, "h \mapsto h \circ (f \times 1_{B\times C})"] \\ Hom((X' \times C) \times B, A) \arrow[r, "h \mapsto h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2>"] & Hom(X' \times (B \times C), A) \end{tikzcd}$$

que equivale a demostrar

$$h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \circ (f \times 1_{B\times C}) = h \circ ((f \times 1_C) \times 1_B) \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2>$$

que es sencillo pues

$$\begin{aligned} h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \circ (f \times 1_{B\times C}) &= h \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \circ <f \circ \pi_1, \pi_2> \\ &= h \circ <<f \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \\ &= h \circ ((f \times 1_C) \times 1_B) \circ <<\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2>, \pi_1 \circ \pi_2> \end{aligned}$$

usando las ecuaciones que vimos cuando definimos producto.

Ejercicio 290. *Demostrar (utilizando el lema de Yoneda), que en toda categoría cartesiana cerrada* **C***:*

- $B^1 \cong B$
- $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$
- *si* **C** *tiene además coproductos:* $(A \times B) + (A \times C) \cong A \times (B + C)$.