(Décimoctava clase: Aplicaciones de Yoneda)

Prop 291. *El embedding de Yoneda* $\mathbf{C} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ *es full y faithful.*

Dados $C, D \in \mathbf{C}$, debemos comprobar que y restringido a $Hom(C, D)$ es inyectivo y suryectivo (sobre $Hom(y(C), y(D))$). Podemos aplicar el lema de Yoneda tomando $F = y(D)$, eso nos da un isomorfismo $Hom(y(C), y(D)) \underset{\eta^{-1}_{C,y(D)}}{\overset{\eta_{C,y(D)}}{\rightleftarrows}} y(D)(C) = Hom(C, D)$. Demostraremos que y (restringido a $Hom(C, D)$) satisface $y = \eta^{-1}_{C,y(D)}$.

Por el lema de Yoneda, $\eta^{-1}_{C,y(D)}(a)_X(h) = y(D)(h)(a)$ para $a \in y(D)(C) = Hom(C, D)$ y $h \in Hom(X, C)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \eta^{-1}_{C,y(D)}(a)_X(h) &= y(D)(h)(a) \\ &= Hom(h, D)(a) \\ &= a \circ h \end{aligned}$$

Por otro lado, por ser y funtor, $y(a)$ es una transformación natural de $y(C)$ en $y(D)$, es decir, $y(a) = Hom(\_, a) : Hom(\_, C) \longrightarrow Hom(\_, D)$. Para poder aplicarlo a h seleccionamos la componente correspondiente a X:

$$\begin{aligned} y(a)_X(h) &= Hom(X, a)(h) \\ &= a \circ h \\ &= \eta^{-1}_{C,y(D)}(a)_X(h) \end{aligned}$$

Por lo tanto $y(a) = \eta^{-1}_{C,y(D)}(a)$ y luego, $y = \eta^{-1}_{C,y(D)}$ que, por Yoneda, es iso, es decir, biyectiva. Luego y es full y faithfull.

Observar que y es además inyectivo sobre objetos: si $y(C) = y(D)$, entonces $1_C \in Hom(C, C) = y(C)(C) = y(D)(C) = Hom(C, D)$. Entonces, $C = D$.

¡Menos mal! La palabra *embedding* está reservada para funtores full y faithful, que sean inyectivos sobre objetos. Es un alivio haber podido comprobar que no fue un error llamar a y el *embedding* de Yoneda.

Una categoría se dice **completa** si tiene todos los límites pequeños. Demostraremos que para toda categoría localmente pequeña $\mathbf{C}$, la categoría $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ es completa. Para ello, recordemos el concepto de límite.

Ejercicio 292. *Alternativamente, demostrarlo en forma directa. Ya vimos que si* $\mathbf{D}$ *tiene productos binarios, también lo tiene* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. *Demostrar que* $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ *tiene objeto terminal y ecualizadores. ¿Vale en general? Es decir, si* $\mathbf{D}$ *tiene objeto terminal, ¿también lo tiene* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$*? ¿y para ecualizadores?*

Límites, revisitado. Recordemos que dadas dos categorías $\mathbf{J}$ y $\mathbf{C}$

- un diagrama de tipo $\mathbf{J}$ en $\mathbf{C}$ es un funtor $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$
- un cono a D consiste de un objeto $C \in \mathbf{C}$ y una familia de flechas $C \xrightarrow{c_j} D(j)$ en $\mathbf{C}$ indexada por los objetos $j \in \mathbf{J}_0$ tal que todos los triángulos formados por estas flechas con las del diagrama D conmutan: $D(\alpha) \circ c_i = c_j$ para todo $i \xrightarrow{\alpha} j \in \mathbf{J}_1$.

- los conos forman una categoría $\mathbf{Cone}(D)$, donde una flecha h del cono

$$C \xrightarrow{c_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

al cono

$$C' \xrightarrow{c'_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

es una flecha $C \xrightarrow{h} C' \in \mathbf{C}$ tal que para todo $j \in \mathbf{J}_0$ el triángulo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

conmuta.
- un límite $\varprojlim_j D(j)$ para D es un objeto terminal de la categoría $\mathbf{Cone}(D)$.

Veamos que

Prop 293. *El funtor representable covariante* $Hom(A, \_) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *preserva límites.*

Sea $D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$ un funtor, $D' = Hom(A, \_) \circ D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Set}$ también lo es. Sea $C \xrightarrow{c_j} D(j)$ para $j \in \mathbf{J}_0$ un cono, también $Hom(A, C) \xrightarrow{Hom(A, c_j)} D'(j)$ para $j \in \mathbf{J}_0$ lo es ya que $Hom(A, \_)$ preserva la conmutatividad de los triángulos del cono $C \xrightarrow{c_j} D(j)$ por ser un funtor. Por la misma razón, $Hom(A, \_)$ es también un funtor de $\mathbf{Cone}(D)$ en $\mathbf{Cone}(D')$. Si $L = \varprojlim_j D(j)$ existe con proyecciones $L \xrightarrow{p_j} D(j)$, $L' = Hom(A, L) \in \mathbf{Cone}(D')$ y $L' \xrightarrow{p'_j} D'(j)$ con $p'_j = Hom(A, p_j)$ que es, por lo ya explicado, un cono.

Para ver que L' es el límite de D', sea $B \xrightarrow{f_j} D'(j)$ para $j \in \mathbf{J}_0$ un cono en $\mathbf{Cone}(D')$, es decir, tal que $f_j = D'(\alpha) \circ f_i = Hom(A, D(\alpha)) \circ f_i$ para todo $i \xrightarrow{\alpha} j \in \mathbf{J}$. Como estamos en $\mathbf{Set}$, para cada $b \in B$, $f_j(b) \in D'(j) = Hom(A, D(j))$, es decir, $A \xrightarrow{f_j(b)} D(j) \in \mathbf{C}$, y $f_j(b) = Hom(A, D(\alpha))(f_i(b)) = D(\alpha) \circ f_i(b)$. Por lo tanto, para cada $b \in B$, $A \xrightarrow{f_j(b)} D(j)$ ($j \in \mathbf{J}_0$) es un cono en $\mathbf{Cone}(D)$ y por ser L el límite, existe una única flecha $A \xrightarrow{h_b} L$ tal que $f_j(b) = p_j \circ h_b$. Definimos la función $h : B \longrightarrow L'$ por $h(b) = h_b$. Es claro que es una flecha en $\mathbf{Cone}(D')$: $f_j = p'_j \circ h$ ya que para todo $b \in B$, $p'_j(h(b)) = p'_j(h_b) = Hom(A, p_j)(h_b) = p_j \circ h_b = f_j(b)$.

Esto demuestra la existencia de la flecha h del cono $B \xrightarrow{f_j} D'(j)$ en el cono $L' \xrightarrow{p'_j} D'(j)$. Para ver unicidad, sea $h' : B \longrightarrow L'$ tal que $f_j = p'_j \circ h$ para todo $j \in \mathbf{J}_0$. Luego, para todo $b \in B$, $f_j(b) = p'_j(h'(b)) = Hom(A, p_j)(h'(b)) = p_j \circ h'(b)$. Por ser L un límite existe una única flecha h_b que satisface $f_j(b) = p_j \circ h_b$, luego $h'(b) = h_b = h(b)$. Por lo tanto, h es única.

Esto finaliza la demostración de que $Hom(A, \_)$ preserva límite. Suele escribirse

$$Hom(A, \varprojlim_j D(j)) = \varprojlim_j Hom(A, D(j)).$$

Definición 294. *Una categoría se dice* ***completa*** *si tiene todos los límites pequeños, es decir, para* **J** *categoría pequeña.*

A continuación demostramos la proposición

Prop 295. *Para toda categoría localmente pequeña* $\mathbf{C}$*, la categoría* $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ *es completa.*

Sea $\mathbf{J}$ pequeña y $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$. El límite de D, si existe, es un objeto de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$, es decir, un funtor:

$$\varprojlim_j D(j) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

Por el lema de Yoneda, si tuviéramos ese funtor, para cada objeto $C \in \mathbf{C}$ tendríamos un isomorfismo natural

$$(\varprojlim_j D(j))(C) \cong Hom(y(C), \varprojlim_j D(j))$$

Como el funtor representable covariante preserva límites, tendríamos

$$Hom(y(C), \varprojlim_j D(j)) = \varprojlim_j Hom(y(C), D(j)) \cong \varprojlim_j D(j)(C)$$

donde el segundo isomorfismo natural es por aplicar otra vez Yoneda para cada j.

Estos isomorfismos nos indican cómo definir el funtor

$$\varprojlim_j D(j) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$(\varprojlim_j D(j))(C) = \varprojlim_j D(j)(C)$$

Para definir la acción del funtor sobre las flechas, debemos conseguir

$$(\varprojlim_j D(j))(C \xrightarrow{f} C' \in \mathbf{C}) : \varprojlim_j D(j)(C') \longrightarrow \varprojlim_j D(j)(C)$$

Sean

$$L = \varprojlim_j D(j)(C)$$

y

$$L' = \varprojlim_j D(j)(C')$$

y sean $L \xrightarrow{c_j} D(j)(C)$ y $L' \xrightarrow{c'_j} D(j)(C')$ sus respectivos conos. Como $D(j) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es un funtor contravariante, $D(j)(f) : D(j)(C') \longrightarrow D(j)(C)$. Luego, $D(j)(f) \circ c'_j : L' \longrightarrow D(j)(C)$ para todo j. Por ser L límite, existe una única flecha $L' \xrightarrow{h_f} L$ tal que $D(j)(f) \circ c'_j = c_j \circ h_f$ para todo j. Definimos

$$\varprojlim_j D(j)(f) = h_f$$

Ejercicio 296. *Demostrar que si para todo $j \in \mathbf{J}_0$ $D(j) \cong D'(j)$ entonces*

$$\varprojlim_j D(j) \cong \varprojlim_j D'(j)$$

¿En qué parte de la prueba anterior hemos usado esto?

Límites, más abstractamente. Dado el producto de categorías $\mathbf{C} \times \mathbf{J}$, se define el funtor proyección $\mathbf{C} \times \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$. Su transpuesta es el funtor $\mathbf{C} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$. Para cada $C \in \mathbf{C}$, el funtor $\Delta(C) : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$ es el funtor constante C:

$$\begin{array}{rcl} \Delta(C)(i) & = & C \\ \Delta(C)(i \xrightarrow{\alpha} j) & = & \Delta(C)(\alpha) \\ & = & 1_C \end{array}$$

Dado $C \xrightarrow{f} C'$, $\Delta(f)$ es una transformación natural de $\Delta(C)$ en $\Delta(C')$. Estos funtores son constantes C y C' respectivamente. Por ello, la transformación natural es la constante f, es decir, $\Delta(f)_i = f$ para todo $i \in \mathbf{J}_0$.

Ejercicio 297. *Comprobar que Δ es la transpuesta del funtor primera proyección.*

Sea ahora un funtor $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ y una transformación natural $\Delta(C) \xrightarrow{\nu} D$. Como $\Delta(C)(i) = C$, todas las componentes de ν tienen la forma: $C \xrightarrow{\nu_i} D(i)$. Por naturalidad, tenemos además

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\alpha"'] & & C \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d, "1_C"'] & D(i) \arrow[d, "D(\alpha)"] \\ j & \in \mathbf{J} \quad \Rightarrow & C \arrow[r, "\nu_j"] & D(j) \end{tikzcd}$$

es decir, una transformación natural $\Delta(C) \xrightarrow{\nu} D$ es un cono

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\nu_j"] \arrow[d, "\nu_i"'] & D(j) \\ D(i) \arrow[ur, "D(\alpha)"'] & \end{tikzcd}$$

Una flecha entre dos conos $\nu : \Delta(C) \longrightarrow D$ y $\nu' : \Delta(C') \longrightarrow D$ en realidad es una transformación natural constante, de la forma $\Delta(h) : \Delta(C) \longrightarrow \Delta(C')$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta(C) \arrow[rr, "\Delta(h)"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \Delta(C') \arrow[dl, "\nu'"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Un límite $L = \lim\limits_{\overleftarrow{j}} D(j)$ es un cono $\nu : \Delta(L) \longrightarrow D$ tal que para todo otro cono $\nu' : \Delta(C) \longrightarrow D$ existe un único $\Delta(h) : \Delta(C) \longrightarrow \Delta(L)$ tal que $\nu' = \nu \circ \Delta(h)$.