(Décimonovena clase: Definición de adjunción)

Primero vimos la definición de isomorfismo en general, que para el caso de las categorías dice que dos categorías **C** y **D** son isomorfas ($\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$) cuando existen dos funtores $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $1_{\mathbf{C}} = G \circ F$ y $1_{\mathbf{D}} = F \circ G$.

Luego vimos una relación más relajada: **C** y **D** son equivalentes ($\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$) cuando existen dos funtores $\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ y dos isomorfismos naturales $1_{\mathbf{C}} \cong G \circ F$ y $1_{\mathbf{D}} \cong F \circ G$. Los isomorfismos naturales son los isomorfismos de la categorías exponenciales $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$. Eso explica el uso de $\cong$ entre funtores para expresar $\simeq$ entre categorías.

A continuación vamos por una relación aún más relajada: la de adjunción. En realidad, no es una relación entre categorías sino entre funtores, entre los funtores F y G de los párrafos anteriores. Funtores adjuntos no son funtores inversos (porque volveríamos a la relación $\cong$ entre categorías), ni los llamados pseudo-inversos (porque volveríamos a la relación $\simeq$ entre categorías).

Veamos un ejemplo. Consideremos el monoide formado por el conjunto de las palabras Σ^* sobre un alfabeto dado Σ, con la operación de concatenación y la cadena vacía como elemento neutro. A este monoide se lo llama el **monoide libre generado** por el conjunto Σ. Una letra puede ser vista como una cadena de longitud 1, esto determina la función de inclusión $i : \Sigma \longrightarrow \Sigma^*$ definida por $i(a) = a$ (inserción de los generadores). Son los generadores, ya que toda palabra puede escribirse como concatenación de los mismos.

Dado un monoide M y definida una función de $f : \Sigma \longrightarrow M$, hay una única manera de extender f a Σ^* de modo de que dicha extensión sea un homomorfismo de monoides. En efecto, debe cumplir $f(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) = f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \dots \cdot f(a_{n-1})$ para ser homomorfismo.

A continuación vamos a expresar esta propiedad de los monoides libres categóricamente. No es del todo elemental ya que las afirmaciones que hemos hecho mezclan dos categorías: la de los conjuntos (por ejemplo, cuando decimos que $f : \Sigma \longrightarrow M$) y la de los monoides. Afortunadamente conocemos un funtor, el de olvido, que va de $\mathbf{Mon} \xrightarrow{U} \mathbf{Set}$.

También tenemos el funtor $\mathbf{Set} \xrightarrow{F} \mathbf{Mon}$ que devuelve el monoide libremente generado por un conjunto: $F(\Sigma) = \Sigma^*$ y $F(\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma') = F(\Sigma) \xrightarrow{f^*} F(\Sigma')$ definido por $f^*(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_{n-1})$. Es muy fácil comprobar que es efectivamente un funtor.

La función de inclusión mencionada más arriba es una flecha en **Set**: $\Sigma \xrightarrow{i_\Sigma} U(F(\Sigma))$. La extensión de f se formula así: dado un monoide M y definida una flecha en **Set** $\Sigma \xrightarrow{f} U(M)$ existe una única $F(\Sigma) \xrightarrow{g} M \in \mathbf{Mon}$ tal que $U(g) \circ i = f$.

Gráficamente:

$$\Sigma \xrightarrow{i_\Sigma} U(F(\Sigma))$$

y para toda $\Sigma \xrightarrow{f} U(M) \in \mathbf{Set}$, existe un único $F(\Sigma) \xrightarrow{g} M$ tal que

$$F(\Sigma) \xrightarrow{\quad g \quad} M \quad \in \mathbf{Mon}$$

$$\begin{tikzcd}
U(F(\Sigma)) \arrow[r, "U(g)"] & U(M) \in \mathbf{Set} \\
\Sigma \arrow[u, "i_\Sigma"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Los funtores F y U no son inversos ni pseudo-inversos mutuos. Pero en algún sentido cada uno hace una trabajo contrario al que hace el otro: F construye un monoide bastante natural a partir de un conjunto, y U un conjunto muy natural a partir de un monoide.

Decimos que F y U forman una adjunción.

Definición 298. *Una* ***adjunción*** *entre los funtores* $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ *es una transformación natural* $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$ *con la siguiente propiedad (llamada la propiedad universal de* η*): dados* $C \in \mathbf{C}$*,* $D \in \mathbf{D}$ *y* $C \xrightarrow{f} U(D)$ *existe una única* $F(C) \xrightarrow{g} D$ *tal que* $f = U(g) \circ \eta_C$*.*

Gráficamente:

$$C \xrightarrow{\eta_C} U(F(C))$$

y para toda $C \xrightarrow{f} U(D) \in \mathbf{C}$, existe un único $F(C) \xrightarrow{g} D$ tal que $f = U(g) \circ \eta_C$, es decir, el diagrama

$$F(C) \xrightarrow{\quad g \quad} D \qquad \in \mathbf{D}$$

$$\begin{tikzcd}
U(F(C)) \arrow[r, "U(g)"] & U(D) \quad \in \mathbf{C} \\
C \arrow[u, "\eta_C"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta

Terminología: F se llama el adjunto izquierdo de U y U el derecho de F, y η es la unidad o unit de la adjunción. Se escribe $F \dashv U$ para decir que F es el adjunto izquierdo de U.

Es una generalización de la noción de equivalencia entre categorías (que a su vez es una generalización de la de isomorfismo entre categorías): más adelante veremos que si $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $1_{\mathbf{C}} \cong U \circ F$ y $1_{\mathbf{D}} \cong F \circ U$, entonces $F \dashv U$.

Una diferencia importante, sin embargo, es que mientras que isomorfismo y equivalencia son relaciones entre categorías, en el caso de adjunciones se trata de una relación entre los funtores. Lo que interesa es si un cierto funtor tiene adjunto a derecha o a izquierda, y cuál es ese adjunto.

La propiedad universal de η implica que la función

$$\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$$

definida por $\phi(g) = U(g) \circ \eta_C$ es un isomorfismo.

Esta biyección se suele escribir con la siguiente regla bidireccional:

$$\frac{F(C) \longrightarrow D}{C \longrightarrow U(D)}\ \phi$$

y frecuentemente se omite ϕ.

Ejemplo 299. *Sea* $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *el funtor diagonal*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(C) & = & (C, C) \\ \Delta(C \xrightarrow{f} C') & = & (C, C) \xrightarrow{(f,f)} (C', C') \end{array}$$

¿Tiene este funtor adjunto a derecha? ¿Cuál sería ese adjunto?

Debería ser un funtor $R : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ *tal que para todo* $C \in \mathbf{C}$ *y* $(X, Y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *haya una biyección*

$$\frac{\Delta(C) \longrightarrow (X, Y)}{C \longrightarrow R(X, Y)}$$

es decir,

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbf{C}}(C, R(X, Y)) & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}(\Delta(C), (X, Y)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}((C, C), (X, Y)) \\ & = & Hom_{\mathbf{C}}(C, X) \times Hom_{\mathbf{C}}(C, Y) \end{array}$$

Es decir, $R(X, Y) = X \times Y$ *es el adjunto a derecha de* Δ*. Escribimos* $\Delta \dashv \times$*.*

Tenemos que definir $\eta_C : C \longrightarrow R(\Delta(C))$*, es decir,* $\eta_C : C \longrightarrow C \times C$*. Definimos* $\eta_C = <1_C, 1_C>$*. Debemos comprobar que dado* $C \xrightarrow{f} X \times Y$ *existe una única flecha* $(C, C) \xrightarrow{(f_1, f_2)} (X, Y)$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} C \times C \arrow[r, "R((f_1, f_2))"] & X \times Y \\ C \arrow[u, "\eta_C"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto, dada $C \xrightarrow{f} X \times Y$ *existen* f_1 *y* f_2 *únicas tales que* $f = <f_1, f_2>$*. Para ellas se cumple*

$$\begin{array}{rcl} (f_1 \times f_2) \circ \eta_C & = & (f_1 \times f_2) \circ <1_C, 1_C> \\ & = & <f_1 \circ 1_C, f_2 \circ 1_C> \\ & = & <f_1, f_2> \\ & = & f \end{array}$$

O sea que Δ tiene adjunto a derecha si y sólo si $\mathbf{C}$ tiene productos binarios.

Habíamos observado que si $F \dashv U$ entonces

$$\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$$

definida por $\phi(g) = U(g) \circ \eta_C$ es un isomorfismo. La siguiente proposición dice que el mismo es natural.

Prop 300. *Si $F \dashv U$, entonces para todo $C \in \mathbf{C}$ y $D \in \mathbf{D}$ la función $\phi_{C,D}(g) = U(g) \circ \eta_C$ es un isomorfismo $\phi_{C,D} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ que es natural en C y en D.*

La propiedad universal de η dice que dado $f \in Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ existe un único $g \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tal que $f = \phi_{C,D}(g)$. La existencia equivale a suryectividad. La unicidad equivale a inyectividad. Por lo tanto $\phi_{C,D}$ es iso.

Para la naturalidad en C, sea $h : C' \longrightarrow C$, queremos comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(h), D)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\phi_{C',D}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C', U(D))
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $f : F(C) \longrightarrow D$:

$$\begin{array}{rcl}
Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))(\phi_{C,D}(f)) & = & Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))(U(f) \circ \eta_C) \\
& = & U(f) \circ \eta_C \circ h \\
& = & U(f) \circ U(F(h)) \circ \eta_{C'} \\
& = & U(f \circ F(h)) \circ \eta_{C'} \\
& = & \phi_{C',D}(f \circ F(h)) \\
& = & \phi_{C',D}(Hom_{\mathbf{D}}(F(h), D)(f))
\end{array}$$

Para la naturalidad en D, sea $g : D \longrightarrow D'$, queremos comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D') \arrow[r, "\phi_{C,D'}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D'))
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $f : F(C) \longrightarrow D$:

$$\begin{array}{rcl}
Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))(\phi_{C,D}(f)) & = & U(g) \circ \phi_{C,D}(f) \\
& = & U(g) \circ U(f) \circ \eta_C \\
& = & U(g \circ f) \circ \eta_C \\
& = & \phi_{C,D'}(g \circ f) \\
& = & \phi_{C,D'}(Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)(f))
\end{array}$$

Luego, $\phi_{C,D}$ es natural en C y D.