(Segunda clase: categorías concretas y funtores)

Definición 25. *Un **semigrupo** es un par $(S, \cdot)$ donde S es un conjunto y $\cdot$ una operación binaria asociativa sobre S. Un **monoide** es una terna $(M, \cdot, e)$ donde $(M, \cdot)$ es un semigrupo y e el elemento neutro de la operación $\cdot$ (es decir, tal que para todo $x \in M$, $x \cdot e = e \cdot x = x$). Un **grupo** es una cuadrupla $(G, \cdot, e, (\_)^{-1})$ donde $(G, \cdot, e)$ es un monoide y $(\_)^{-1}$ la operación que devuelve el inverso de un elemento de G (es decir, tal que para todo $x \in G$, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$).*

Ejemplo 26. *El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un grupo (y por lo tanto un monoide y un semigrupo) con la suma habitual. En cambio no lo es con la multiplicación habitual ya que solo el 1 y el -1 tienen inverso multiplicativo (ellos son sus propios inversos). Pero $\mathbb{Z}$ es un monoide (y por lo tanto un semigrupo) con la multiplicación.*

Ejemplo 27. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un grupo con la suma. En cambio no lo es con la multiplicación ya que el 0 no tiene inverso multiplicativo. Pero $\mathbb{Q} - \{0\}$ es un grupo con la multiplicación. Idéntico análisis puede hacerse para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.*

Ejemplo 28. *El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un monoide con la suma y también con la multiplicación. El conjunto $\mathbb{P}$ de los números enteros positivos es un semigrupo con la suma y un monoide con la multiplicación.*

Ejemplo 29. *El conjunto Σ^* de las cadenas sobre un alfabeto Σ es un monoide con la operación de concatenación. La cadena vacía es el elemento neutro.*

Ejercicio 30. *Dado un conjunto A, demostrar que el conjunto de todas las permutaciones de elementos de A (o sea, el de todas las funciones biyectivas de A en A) es un grupo.*

Ejercicio 31. *Dada una categoría $\mathbf{C}$, y un objeto A de esa categoría, comprobar que $Hom_{\mathbf{C}}(A, A)$ es un monoide (ignorando por el momento la distinción entre colección y conjunto).*

Ejercicio 32. *Comprobar que en un monoide el elemento neutro es único.*

Ejercicio 33. *Comprobar que en un monoide, si x tiene un inverso a izquierda y un inverso a derecha, se trata del mismo elemento, es decir, si $y \cdot x = e$ y $x \cdot z = e$ entonces, $y = z$. Concluir que en un grupo el inverso es único.*

Ejercicio (posgrado) 34. *En un monoide, si $a \cdot x = a \cdot y = e$, ¿se cumple necesariamente que $x = y$?*

Ejercicio (posgrado) 35. *Dado un semigrupo $(S, \cdot)$ un elemento $e \in S$ que es neutro a izquierda (es decir, tal que para todo $x \in M$, $e \cdot x = x$) y una operación de inverso a izquierda (es decir, tal que para todo $x \in G$, $x^{-1} \cdot x = e$), comprobar que $(S, \cdot, e, (\_)^{-1})$ es un grupo.*

Definición 36. *Un **homomorfismo de semigrupos** es una función $f : S \to S'$ tal que para todo $x, y \in S$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y)$. Un **homomorfismo de monoides** es una función $f : M \to M'$ tal que f es un homomorfismo de semigrupos y $f(e) = e'$. Un*

homomorfismo de grupos *es una función* $f : G \to G'$ *tal que* f *es un homomorfismo de monoides y* $f(x^{-1}) = f(x)^{-1'}$ *para todo* $x \in G$*.*

Un ejemplo de homomorfismo de grupo es la función de exponenciación en cualquier base, por ejemplo, 2. Veamos que $\exp : (\mathbb{N}, +, 0, -) \to (\mathbb{Q} - \{0\}, *, 1, 1/(\_))$ definida por $\exp(n) = 2^n$ es homomorfismo. En efecto, $\exp(n+m) = 2^{n+m} = 2^n * 2^m = \exp(n) * \exp(m)$, $\exp(0) = 2^0 = 1$ y $\exp(-n) = 2^{-n} = 1/2^n = 1/\exp(n)$.

Ejercicio 37. *Comprobar que la función longitud* $\# : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *es homomorfismo de monoide.*

Ejercicio 38. *Dar otros ejemplos de semigrupos y de homomorfismos de semigrupos.*

Ejemplo 39. *Se puede comprobar fácilmente que la composición de homomorfismos es un homomorfismo y que la identidad es un homomorfismo. Tenemos entonces la categoría* **Semi** *(resp.* **Mon**, **Grp***) cuyos objetos son semigrupos (resp. monoides, grupos), y flechas, homomorfismos de semigrupo (resp. monoide, grupo).*

Ejercicio 40. *Dado un homomorfismo de monoide* $f : M \to M'$*, comprobar que si* M *y* M' *son grupos entonces* f *es homomorfismo de grupo. Concluir que en el ejemplo de la función* exp *más arriba, no era necesario comprobar que* $\exp(-n) = 1/\exp(n)$*.*

Todas estas categorías tienen algo en común: sus objetos son conjuntos con estructura y sus flechas son funciones que preservan dicha estructura. Se las llaman **categorías concretas**.

Ejercicio (posgrado) 41. *Sea* Ω *un conjunto de operaciones con sus aridades y* E *un conjunto de ecuaciones. Una* (Ω, E)*-**álgebra** es un conjunto* A *cerrado por las operaciones de* Ω *y que satisface las ecuaciones de* E*. Un homomorfismo de* (Ω, E)*-álgebras, es una función* $f : A \to A'$ *tal que* f *preserva las operaciones de* Ω*.*

Comprobar que (Ω, E)-**Alg***, cuyos objetos son* (Ω, E)*-álgebras, y flechas, homomorfismos de* (Ω, E)*-álgebras, es una categoría.*

Un ejemplo particularmente interesante de categoría concreta es el de la categoría **Poset** de los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 42. *Un conjunto parcialmente ordenado (**poset**) es un conjunto con una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un **homomorfismo de posets** es una función que preserva el orden (también llamado **función monótona**).*

Ejemplo 43. *La categoría* **Poset** *tiene por objetos a los posets y por flechas a las funciones monótonas.*

Otro ejemplo interesante es el de los grafos. Recordemos la definición 4.

Definición 44. *Un **homomorfismo de grafos** es un par de funciones* $F_0 : N \to N'$ *y* $F_1 : A \to A'$ *tal que para toda flecha* $f \in A$*,* $dom'(F_1(f)) = F_0(dom(f))$ *y* $cod'(F_1(f)) = F_0(cod(f))$*.*

Gráficamente, $F : G \to G'$ es un homomorfismo de grafos si cada vez que tenemos

$$a \xrightarrow{f} b$$

en el grafo G, tenemos

$$F_0(a) \xrightarrow{F_1(f)} F_0(b)$$

en el grafo G'.

Como F_0 y F_1 se aplican a objetos y flechas respectivamente, en general no hay confusión si se omite el subíndice. Con esta convención, el último diagrama quedaría:

$$F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b)$$

Ejemplo 45. *La categoría* **Graph** *tiene por objetos a los grafos y por flechas a los homomorfismos de grafos.*

Ejercicio 46. *Adecuar la definición de homomorfismo de grafo a cada una de las definiciones 1, 2 y 3.*

Podemos extender la definición de homomorfismo de grafo a la de homomorfismo de categorías. Los homomorfismos de categorías se llaman **funtores**.

Definición 47. *Dadas las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{C}$*', un* ***funtor*** $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ *es un par de funciones* F_0 *y* F_1 *tales que:*

- F_0 *lleva objetos de* $\mathbf{C}$ *en objetos de* $\mathbf{C}$*' (se omite el subíndice)*
- F_1 *lleva flechas de* $\mathbf{C}$ *en flechas de* $\mathbf{C}$*' (se omite el subíndice)*
- $$A \xrightarrow{f} B \quad \in \quad \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \quad \in \quad \mathbf{C}'$$
- $$\left.\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ \\ B \xrightarrow{g} C \end{array}\right\} \in \ \mathbf{C} \ \Longrightarrow \ F(g \circ f) = F(g) \circ' F(f)$$
- $F(1_A) = 1'_{F(A)}$

Ejemplo 48. *Para cualquiera de las categorías concretas, existe un funtor a* **Set** *consistente simplemente en ignorar u olvidar la estructura y devolver el conjunto subyacente. En inglés se le llama funtor* ***forgetful*** *(¿funtor* ***de olvido****?) y se lo denota* $|\_|$*, por ejemplo* $|\_| : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ *se define por:*

- $|(G, \cdot, e, (\_)^{-1})| = G$.
- $|f| = f$*, simplemente olvidamos que* f *preserva las operaciones de grupo.*

Ejemplo 49. *También se puede olvidar una parte de la estructura obteniéndose, por ejemplo, un funtor de olvido de la categoría* **Grp** *a* **Mon***.*

Ejercicio 50. *¿Son inyectivos los funtores de olvido mencionados?*

Ejercicio 51. *¿Existe algún funtor de la categoría* **2** *en la categoría* **1***?*

Ejercicio 52. *¿Existe algún funtor de la categoría* **Set** *en la categoría* **1***?*

Ejercicio 53. *Dada una categoría cualquiera* $\mathbf{C}$*. ¿Cuántos funtores hay de la categoría* $\mathbf{C}$ *en la categoría* **1***?*

Ejercicio 54. *Dada una categoría cualquiera* $\mathbf{C}$*¿Cuántos funtores hay de la categoría* $\mathbf{0}$ *en la categoría* $\mathbf{C}$*?*

Ejemplo 55. *La categoría* **Cat** *tiene por objetos a las categorías y por flechas a los funtores.*

A la luz de este ejemplo, podemos instanciar la afirmación ya mencionada sobre la importancia de flechas por sobre la de objetos: lo importante son los funtores, no las categorías.

Definición 56. *Una categoría es* ***pequeña*** *si tanto su colección de objetos como de flechas son conjuntos. En caso contrario, es una categoría* ***grande****. Una categoría es* ***localmente pequeña*** *si para todo par de objetos* A *y* B*, la colección de flechas de* A *a* B *es un conjunto.*

La categoría **Cat**, en realidad, es la categoría cuyos objetos son categorías pequeñas. **Cat** misma es una categoría grande (y por ello, no es un objeto de **Cat**), pero localmente pequeña.

Ejercicio 57. *Para cada una de las categorías vistas, ¿cuáles son pequeñas y cuáles grandes, cuáles localmente pequeñas?*