(Vigésima clase: Adjunciones, definición equivalente)

El recíproco de la última proposición también vale, dando lugar a una definición de la noción de adjunción simétrica en F y U.

Prop 301. *Si* $\phi_{C,D} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ *es natural en* C *y en* D, *entonces* $F \dashv U$ *con* $\eta_C = \phi(1_{F(C)})$.

Sea $\phi_{C,D}$ una biyección $\phi_{C,D} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ natural en C y en D. Naturalidad en D es la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))"] \\ Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D') \arrow[r, "\phi_{C,D'}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D')) \end{tikzcd}$$

que expresa que para todo $F(C) \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} D'$, $\phi_{C,D'}(g \circ f) = U(g) \circ \phi_{C,D}(f)$. Naturalidad en C es la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(h), D)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(h, U(D))"] \\ Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\phi_{C',D}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C', U(D)) \end{tikzcd}$$

que expresa que para todo $C' \xrightarrow{h} C \xrightarrow{f} U(D)$, $\psi_{C',D}(f \circ h) = \psi_{C,D}(f) \circ F(h)$, donde $\psi_{C,D} = \phi_{C,D}^{-1}$.

Para construir el isomorfismo natural $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$. Consideremos $D = F(C)$. La biyección $\phi_{C,F(C)} : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), F(C)) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, U(F(C)))$ nos permite definir $\eta_C = \phi_{C,F(C)}(1_{F(C)})$.

La naturalidad de η se expresa por

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & U(F(C)) \arrow[d, "U(F(f))"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"] & U(F(C')) \end{tikzcd}$$

para toda flecha $C \xrightarrow{f} C'$. Para demostrarla veamos que $U(F(f)) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ f$

$$\begin{aligned} U(F(f)) \circ \eta_C &= U(F(f)) \circ \phi_{C,F(C)}(1_{F(C)}) \\ &= \phi_{C,F(C')}(F(f) \circ 1_{F(C)}) \\ &= \phi_{C,F(C')}(F(f)) \end{aligned}$$

Resta ver que $\phi_{C,F(C')}(F(f)) = \eta_{C'} \circ f$. Para comprobarlo usamos que $\phi_{C,F(C')}$ es una biyección:

$$\begin{aligned}
\psi_{C,F(C')}(\eta_{C'} \circ f) &= \psi_{C,F(C')}(\phi_{C',F(C')}(1_{F(C')}) \circ f) \\
&= \psi_{C',F(C')}(\phi_{C',F(C')}(1_{F(C')})) \circ F(f) \\
&= 1_{F(C')} \circ F(f) \\
&= F(f)
\end{aligned}$$

Resta ver la propiedad universal de η: para todo $f : C \longrightarrow U(D)$ existe un único $g : F(C) \longrightarrow D$ (sí: $f = \phi_{C,D}(g)$ que al ser biyectiva garantiza existencia y unicidad) tal que $U(g) \circ \eta_C = f$. Veamos:

$$\begin{aligned}
U(g) \circ \eta_C &= U(g) \circ \phi_{C,F(C)}(1_{F(C)}) \\
&= \phi_{C,D}(g \circ 1_{F(C)}) \\
&= \phi_{C,D}(g) \\
&= f
\end{aligned}$$

La equivalencia entre $F \dashv U$ y la naturalidad de $Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ es muy importante: proporciona una definición de adjunción, simétrica en F y U.

Definición 302. *Dados* $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$*, se dice que* F *es adjunto izquierdo de* U *y* U *adjunto derecho de* F *si existe un isomorfismo de* $Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$ *natural en* C *y en* D*. Se lo sigue denotando* $F \dashv U$*.*

A veces se explicita el isomorfismo natural $\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$, y a veces también su inverso $\phi : Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) : \psi$. Además del unit $\eta_C = \phi(1_{F(C)}) : C \longrightarrow U(F(C))$ está el dual, counit, $\epsilon_D = \psi(1_{U(D)}) : F(U(D)) \longrightarrow D$.

Ejercicio 303. *Inspirandose en la definición asimétrica de adjunción (de la clase pasada), dé otra también asimétrica en la que los roles de* F *y de* U *estén intercambiados.*

Veamos que es una relación más relajada que la de equivalencia.

Prop 304. *Si* $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ *tal que* $1_{\mathbf{C}} \cong U \circ F$ *y* $1_{\mathbf{D}} \cong F \circ U$*, entonces* $F \dashv U$*.*

Sean μ y ν isomorfismos naturales de $1_{\mathbf{C}}$ a $U \circ F$ y de $1_{\mathbf{D}}$ a $F \circ U$ respectivamente. Es decir, para todo C y D, $C \xrightarrow{\mu_C} U(F(C))$ y $D \xrightarrow{\nu_D} F(U(D))$ son isos.

Sea $F(C) \xrightarrow{h} D$, para definir $\phi_{C,D}(h) : C \longrightarrow U(D)$ componemos $U(h) : U(F(C)) \longrightarrow U(D)$ con μ_C así $\phi_{C,D}(h) = U(h) \circ \mu_C$.

Sabemos que μ y ν son naturales, es decir, para todo $C \xrightarrow{f} C'$ y $D \xrightarrow{g} D'$ los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "f"'] & U(F(C)) \arrow[d, "U(F(f))"] \\
C' \arrow[r, "\mu_{C'}"] & U(F(C'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\nu_D"] \arrow[d, "g"'] & F(U(D)) \arrow[d, "F(U(g))"] \\
D' \arrow[r, "\nu_{D'}"] & F(U(D'))
\end{tikzcd}$$

Esto debería ayudarnos a comprobar que $\phi_{C,D}$ también es natural. Primero vemos que $\phi_{C,D}$ es natural en C (observar que los funtores $Hom_{\mathbf{D}}(F(\_), D)$ y $Hom_{\mathbf{C}}(\_, U(D))$ son contravariantes:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\phi_{C',D}"] \arrow[u, "Hom_{\mathbf{D}}(F(f), D)"] & Hom_{\mathbf{C}}(C', U(D)) \arrow[u, "Hom_{\mathbf{C}}(f, U(D))"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, ya que para $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C'), D)$:

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathbf{C}}(f, U(D))(\phi_{C',D}(h)) &= Hom_{\mathbf{C}}(f, U(D))(U(h) \circ \mu_{C'}) \\
&= U(h) \circ \mu_{C'} \circ f \\
&= U(h) \circ U(F(f)) \circ \mu_C \\
&= U(h \circ F(f)) \circ \mu_C \\
&= \phi_{C,D}(h \circ F(f)) \\
&= \phi_{C,D}(Hom_{\mathbf{D}}(F(f), D)(h))
\end{aligned}$$

por la naturalidad de μ. Ahora vemos que $\phi_{C,D}$ es natural en D:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\phi_{C,D}"] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)"'] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))"] \\
Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D') \arrow[r, "\phi_{C,D'}"] & Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D'))
\end{tikzcd}$$

también conmuta ya que para $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$:

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))(\phi_{C,D}(h)) &= Hom_{\mathbf{C}}(C, U(g))(U(h) \circ \mu_C) \\
&= U(g) \circ U(h) \circ \mu_C \\
&= U(g \circ h) \circ \mu_C \\
&= \phi_{C,D'}(g \circ h) \\
&= \phi_{C,D'}(Hom_{\mathbf{D}}(F(C), g)(h))
\end{aligned}$$

Resta ver que $\phi_{C,D}$ es biyectiva. Sean $h, h' \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tales que $\phi_{C,D}(h) = \phi_{C,D}(h')$, es decir, $U(h) \circ \mu_C = U(h') \circ \mu_C$. Como μ_C es iso, $U(h) = U(h')$. Por lo tanto, $F(U(h)) = F(U(h'))$. Por ser ν natural, los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "\nu_{F(C)}"] \arrow[d, "h"'] & F(U(F(C))) \arrow[d, "F(U(h))"] \\
D \arrow[r, "\nu_D"] & F(U(D))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "\nu_{F(C)}"] \arrow[d, "h'"'] & F(U(F(C))) \arrow[d, "F(U(h'))"] \\
D \arrow[r, "\nu_D"] & F(U(D))
\end{tikzcd}$$

conmutan. Como ν_D y $\nu_{F(C)}$ son iso, $F(U(h)) = F(U(h'))$ implica $h = h'$.

Ejercicio 305. *Demostrar que $\phi_{C,D}$ es suryectiva.*

Sea $f \in Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D))$. Debemos demostrar que existe $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tal que $f = \phi_{C,D}(h) = U(h) \circ \mu_C$. Sabemos que $f \circ \mu_C^{-1} : U(F(C)) \longrightarrow U(D)$. Como F y U realizan la equivalencia entre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, por la proposición 274 son full. En particular, U lo es, luego existe $h \in Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D)$ tal que $U(h) = f \circ \mu_C^{-1}$, luego $f = U(h) \circ \mu_C$.

Ejemplo 306. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con productos binarios, sea $A \in \mathbf{C}$ y consideremos el funtor $\_ \times A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$:*

$$\begin{aligned} (\_ \times A)(X) &= X \times A \\ (\_ \times A)(X \xrightarrow{f} Y) &= f \times 1_A : X \times A \longrightarrow Y \times A \end{aligned}$$

¿Tiene adjunto derecho? Debería ser un funtor $U : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que haya un isomorfismo natural ϕ

$$Hom_{\mathbf{C}}(X \times A, Y) \cong Hom_{\mathbf{C}}(X, U(Y))$$

Observamos que U debería ser

$$\begin{aligned} U(Y) &= Y^A \\ U(Y \xrightarrow{g} Z) &= g^A : Y^A \longrightarrow Z^A \end{aligned}$$

Ejercicio 307. *Definir g^A y ϕ y completar la prueba de que efectivamente ϕ es un isomorfismo natural. ¿Cuál es la counit?*

Concluimos que $\_ \times A \dashv \_^A$.

Ejemplo 308. *Sea $\mathbf{C} \xrightarrow{!} \mathbf{1}$ el único funtor a la categoría $\mathbf{1}$. ¿Cuándo tiene adjunto a derecha?*

Debería ser un objeto $\mathbf{1} \xrightarrow{U} \mathbf{C}$ de la categoría $\mathbf{C}$ tal que haya un iso natural

$$Hom_{\mathbf{1}}(!(C), *) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$$

es decir, entre

$$Hom_{\mathbf{1}}(*, *) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$$

Para ello, $Hom_{\mathbf{C}}(C, U(*))$ debe tener un único elemento, para cada $C \in \mathbf{C}$. Es decir, $U(*) \in \mathbf{C}$ debe ser un objeto terminal de $\mathbf{C}$.

Por ello, un adjunto a derecha de ! es un (funtor que devuelve constantemente el mismo) objeto terminal.

Ejercicio 309. *¿Qué sería un adjunto a izquierda del funtor ! del ejemplo anterior?*

Prop 310. *Los adjoints son únicos (salvo isomorfismo). Dado $\mathbf{C} \underset{U,V}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $F \vdash U$ y $F \dashv V$, entonces $U \cong V$.*

Para todo $C \in \mathbf{C}$ y $D \in \mathbf{D}$

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{C}}(C, U(D)) &\cong Hom_{\mathbf{D}}(F(C), D) \\ &\cong Hom_{\mathbf{C}}(C, V(D)) \end{aligned}$$

ambos iso naturales. Es decir, $y(U(D)) \cong y(V(D))$. Por Yoneda, $U(D) \cong V(D)$ también natural en D. Por lo tanto $U \cong V$.