(Vigesimosegunda clase: Mónadas)

Dada una adjunción $F \dashv U$ podemos definir un **endofuntor** $\mathbf{C} \xrightarrow{T} \mathbf{C}$ por $T = U \circ F$. Por lo que sabemos de adjunciones, hay una transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow T$$

a la que llamábamos unit y denotábamos μ cuando vimos adjunciones. De la transformación natural (counit) $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$, se obtiene $\epsilon_{F(C)} : F(U(F(C))) \longrightarrow F(C)$, y de ahi, aplicando el funtor U, la flecha $U(\epsilon_{F(C)}) : U(F(U(F(C)))) \longrightarrow U(F(C))$, es decir, $U(\epsilon_{F(C)}) : T(T(C)) \longrightarrow T(C)$, que es natural, la escribimos

$$\mu : T \circ T \longrightarrow T.$$

¿Qué propiedades conocemos de la terna (T, η, μ)? Por empezar, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \circ T \circ T \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\
T \circ T \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}$$

donde $(T\mu)_C$ se define por $(T\mu)_C = T(\mu_C) : T(T(T(C))) \longrightarrow T(T(C))$ y μ_{TC} por $\mu_{TC} = \mu_{T(C)} : T(T(T(C))) \longrightarrow T(T(C))$.

En efecto, demostrar la conmutatividad de este diagrama significa demostrar, para todo $C \in \mathbf{C}$, la igualdad

$$\mu_C \circ T(\mu_C) = \mu_C \circ \mu_{T(C)}$$

es decir,

$$U(\epsilon_{F(C)}) \circ U(F(U(\epsilon_{F(C)}))) = U(\epsilon_{F(C)}) \circ U(\epsilon_{F(U(F(C)))})$$

Para demostrar esta igualdad, primero observamos que por ser $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$ natural, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(U(F(U(F(C))))) \arrow[r, "\epsilon_{F(U(F(C)))}"] \arrow[d, "F(U(\epsilon_{F(C)}))"'] & F(U(F(C))) \arrow[d, "\epsilon_{F(C)}"] \\
F(U(F(C))) \arrow[r, "\epsilon_{F(C)}"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\epsilon_{F(C)} \circ F(U(\epsilon_{F(C)})) = \epsilon_{F(C)} \circ \epsilon_{F(U(F(C)))}$, y si aplicamos U a ambos miembros obtenemos trivialmente la igualdad deseada.

Otra propiedad que conocemos sobre (T,η,μ) es la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

donde, como antes, $(T\eta)_C$ se define por $(T\eta)_C = T(\eta_C) : T(C) \longrightarrow T(T(C))$ y η_{TC} por $\eta_{TC} = \eta_{T(C)} : T(C) \longrightarrow T(T(C))$.

Demostrar la conmutatividad de este diagrama significa demostrar, para todo $C \in \mathbf{C}$, las igualdades

$$\mu_C \circ \eta_{T(C)} = 1_{T(C)} = \mu_C \circ T(\eta_C)$$

es decir,

$$U(\epsilon_{F(C)}) \circ \eta_{U(F(C))} = 1_{U(F(C))} = U(\epsilon_{F(C)}) \circ U(F(\eta_C))$$

Recordemos la definición del counit $\epsilon_D = \psi_{U(D),D}(1_{U(D)})$, donde $\psi_{U(D),D} = \phi^{-1}_{U(D),D}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 1_{U(D)} &= \phi_{U(D),D}(\epsilon_D) \\ &= U(\epsilon_D) \circ \eta_{U(D)} \end{aligned}$$

Tomando $D = F(C)$ obtenemos la primera igualdad. La segunda sale del mismo modo:

$$\begin{aligned} 1_{F(C)} &= \psi_{C,F(C)}(\eta_C) \\ &= \epsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) \end{aligned}$$

aplicando U a ambos miembros.

La terna (T,η,μ) es una **mónada**:

Definición 325. *Una **mónada** sobre la categoría $\mathbf{C}$, consiste de un endofuntor $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ y dos transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow T$ y $\mu : T\circ T \longrightarrow T$ tales que $\mu\circ\mu_T = \mu\circ T\mu$ y $\mu\circ\eta_T = 1_T = \mu\circ T\eta$.*

Las igualdades equivalen a la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd} T\circ T\circ T \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] \\ T\circ T \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd}$$

que expresa que μ es asociativa, y

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

que expresa que η es neutro de μ a izquierda y a derecha. Esto explica el uso de la palabra mónada, por su proximidad con monoide. A la transformación natural μ se la llama multiplicación.

Ejemplo 326. *En un poset P, una mónada es una función monótona $T : P \longrightarrow P$. El unit η dice que $x \leq T(x)$ y μ, que $T(T(x)) \leq T(x)$, ambas para todo $x \in P$. Esta dos desigualdades implican que $T(T(x)) = T(x)$, es decir, T es idempotente, el funtor $T \circ T = T$. Un operador idempotente $T : P \longrightarrow P$ tal que $x \leq T(x)$ se llama* ***operador de clausura****.*

Un ejemplo es si $P = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, por ejemplo, y $T(A \subseteq P) =$ el menor subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ que contiene a A.

Otro ejemplo es si $P = \mathcal{P}(X \times X)$ y $T(\rightarrow \subseteq P) = \xrightarrow{+}$, la clausura transitiva de $\rightarrow$, o $T'(\rightarrow \subseteq P) = \xrightarrow{*}$, la clausura reflexiva y transitiva de $\rightarrow$.

Por ser idempotente, T posee puntos fijos: sus puntos fijos son exactamente los que están en la imagen de $im(T)(P)$ de T. Esto permite reconstruir una adjunción $F \dashv U$ tal que $T = U \circ F$ de la siguiente manera. Sea $K = im(T)(P)$ (el conjunto de puntos fijos de T) y $U : K \longrightarrow P$ la inclusión. Sea $F : P \longrightarrow K$ definida por $F(x) = T(x)$. Claramente obtenemos $T = U \circ F$.

Si $p \leq U(k)$ entonces $F(p) \leq F(U(k)) = k$ por ser $U(k)$ un punto fijo de T.

Si $F(p) \leq k$, entonces $p \leq T(p) = U(F(p)) \leq U(k)$.

Luego, $F \dashv U$.

Ejercicio 327. *Sea $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ el funtor definido por $\mathcal{P}(X \xrightarrow{f} Y) = im(f) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$. Sea $\eta_X : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $\eta_X(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ y $\mu_X : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $\mu_X(\alpha) = \bigcup \alpha \in \mathcal{P}(X)$.*

Comprobar la naturalidad de η y μ, y que $(\mathcal{P}, \{\_\}, \bigcup)$ es una mónada.

¿Proviene esta mónada de una adjunción?

Ejercicio 328. *Vimos que $\Delta \dashv \times$ era una adjunción. Identificar el unit y la multiplicación de la mónada $\times \circ \Delta$. Identificar el significado de la conmutatividad de los diagramas. Realizar la misma tarea para la mónada $\Delta \circ +$, $\forall \circ *$ y $* \circ \exists$.*

Ejercicio 329. *Lo mismo para la adjunción $F \dashv U$ para* $\mathbf{Set} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{Mon}$.

Ejemplo 330. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con coproducto y objeto terminal. Sea $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ definido por*

$$\begin{aligned} T(C) &= C + 1 \\ T(C \xrightarrow{f} C') &= [\iota_1 \circ f, \iota_2] : C + 1 \longrightarrow C' + 1 \end{aligned}$$

El funtor T es una mónada. Para ello definimos $\eta_C : C \longrightarrow C + 1$ por $\eta_C = \iota_1$ y $\mu_C : (C + 1) + 1 \longrightarrow C + 1$ por $\mu_C = [1_{C+1}, \iota_2]$.

Resta demostrar la naturalidad de η y μ y la conmutatividad de los diagramas.

Ejemplo 331. *Un caso particular del ejemplo anterior es cuando se considera $\mathbf{C} = \lambda{\rightarrow}$, con un tipo 1 (llamado en algunos lenguajes el tipo unit).*

La mónada $T(C) = C + 1$ es una versión simplificada de la mónada error que se utiliza en programación funcional para programar en presencia de errores sin necesidad de hacer constantemente explícita la propagación de errores.