(VIGESIMOCUARTA CLASE: LAS MÓNADAS SON ADJUNCIONES)

Vimos que toda adjunción $F \dashv U$ con $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$ y $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$ da lugar a una mónada (T, η, μ) con $T = U \circ F$ y $\mu_C = U(\epsilon_{F(C)})$.

El recíproco también vale: toda mónada (T, η, μ) proviene de una adjunción $F \dashv U$. Para ello, el primer paso es la construcción de la categoría $\mathbf{D}$, ausente en la definición de la mónada:

Definición 340. *Dada la mónada (T, η, μ) sobre la categoría $\mathbf{C}$, se define la categoría $\mathbf{C}^T$ llamada la* ***categoría de Eilenberg-Moore de*** *T. Sus objetos se llaman* ***T-álgebras****, y son pares (A, α) con $\alpha : T(A) \longrightarrow A \in \mathbf{C}$ tales que*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "1_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

conmutan. Una flecha $h : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta) \in \mathbf{C}^T$ es una flecha $h : A \longrightarrow B \in \mathbf{C}$ tal que

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(h)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Ejercicio 341. *Comprobar que $\mathbf{C}^T$ es una categoría.*

Hay un funtor del olvido obvio de la categoría $\mathbf{C}^T$ en la categoría $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} U((A, \alpha)) &= A \\ U((A, \alpha) \xrightarrow{h} (B, \beta)) &= h \end{aligned}$$

También hay un funtor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}^T$:

$$\begin{aligned} F(C) &= (T(C), \mu_C) \\ F(C \xrightarrow{h} D) &= T(h) \end{aligned}$$

Para ver que es un funtor, veamos primero que $(T(C), \mu_C) \in \mathbf{C}^T$, es decir, que los diagramas

$$\begin{tikzcd} T(C) \arrow[r, "\eta_{T(C)}"] \arrow[dr, "1_{T(C)}"'] & T(T(C)) \arrow[d, "\mu_C"] \\ & T(C) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(T(T(C))) \arrow[r, "T(\mu_C)"] \arrow[d, "\mu_{T(C)}"'] & T(T(C)) \arrow[d, "\mu_C"] \\ T(T(C)) \arrow[r, "\mu_C"] & T(C) \end{tikzcd}$$

conmutan. Esto es directo de la definición de mónada. Por último, hay que ver que toda $h : C \longrightarrow D \in \mathbf{C}$ satisface $T(h) : F(C) \longrightarrow F(D)$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(C)) \arrow[r, "T(T(h))"] \arrow[d, "\mu_C"'] & T(T(D)) \arrow[d, "\mu_D"] \\ T(C) \arrow[r, "T(h)"] & T(D) \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es claro ya que $\mu : T \circ T \longrightarrow T$ es natural.

Tenemos entonces dos funtores $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{C}^T$.

Prop 342. *Si (T, η, μ) es una mónada, entonces $F \dashv U$ es una adjunción.*

Como para todo $C \in \mathbf{C}$,

$$U(F(C)) = U((T(C), \mu_C)) = T(C)$$

y para todo $C \xrightarrow{f} D \in \mathbf{C}$,

$$U(F(f)) = U(T(f)) = T(f)$$

obtenemos $U \circ F = T$ y por ello, podemos tomar la propia transformación natural

$$\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow T = U \circ F$$

como el unit de la adjunción.

Sea ahora $(A, \alpha) \in \mathbf{C}^T$. Por definición de objeto de $\mathbf{C}^T$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(A)) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta. Por definición de flecha de $\mathbf{C}^T$, implica que $\alpha : (T(A), \mu_A) \longrightarrow (A, \alpha) \in \mathbf{C}^T$. Como $F(U((A, \alpha))) = F(A) = (T(A), \mu_A)$, tomamos como counit $\epsilon_{(A,\alpha)} = \alpha$ cuya naturalidad se expresa por el diagrama

$$\begin{tikzcd} (T(A), \mu_A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(U(h))"'] & (A, \alpha) \arrow[d, "h"'] \\ (T(B), \mu_B) \arrow[r, "\beta"] & (B, \beta) \end{tikzcd}$$

donde $F(U(h)) = F(h) = T(h)$. El diagrama conmuta pues $h : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta) \in \mathbf{C}^T$. Luego, $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{C}^T}$ es natural.

Ejercicio 343. *Completar la prueba de que $F \dashv U$ es una adjunción.*

Ejercicio 344. *Para la mónada identidad I, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^I$? Identificar F, U, η y ϵ.*

Ejercicio 345. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con coproducots y objeto terminal, y T la mónada error $T(C) = C + 1$, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^T$? Identificar F, U, η y ϵ.*

Ejercicio 346. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con exponenciales y T la mónada memoria $T(C) = C^M$, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^T$? Identificar F, U, η y ϵ.*

Ejercicio 347. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con exponenciales y T la mónada estado $T(C) = (M \times C)^M$, ¿cuál es la categoría $\mathbf{C}^T$? Identificar F, U, η y ϵ.*

Ejercicio 348. *Idéntico ejercicio para las mónadas de los ejercicios 327, 328 y 329.*

Hemos demostrado que dada una mónada $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ existen una categoría $\mathbf{D}$ y funtores $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tales que $T = U \circ F$ y $F \dashv U$. No son únicos ya que se podría construir una categoría diferente y los funtores van a resultar necesariamente diferentes. De hecho hay una categoría, llamada **de Kleisli**, diferente de $\mathbf{C}^T$ que también da lugar a una adjunción para T.

De todas formas, puede demostrarse que si $\mathbf{C} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$ tal que $T = U \circ F$, entonces existe un funtor de comparación $\Phi : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}^T$ tal que $U^T \circ \Phi = U$ y $\Phi \circ F = F^T$ donde U^T y F^T son los funtores obtenidos de la mónada T usando la categoría $\mathbf{C}^T$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathbf{C}^T \arrow[dl, "U^T"] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathbf{C}^T \\
& \mathbf{C} \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "F^T"'] &
\end{tikzcd}
$$

El funtor Φ que satisface esta propiedad es único. Dado U, si tiene adjunto F, es único. Si el funtor Φ que se obtiene es una equivalencia entre $\mathbf{D}$ y $\mathbf{C}^T$ se dice que U es monádico. Ejemplos de funtores monádicos son los que se obtienen como funtores de olvido de categorías algebraicas: aquéllas categorías que sirven de modelos para teorías ecuacionales como las de monoide, grupo, etc.

Un ejemplo de funtor U que no es monádico es el de olvido de **Poset** $\longrightarrow$ **Set**.

Ejercicio 349. *Demostrar que el adjunto a izquierda F de U es el funtor que devuelve el poset discreto. Demostrar que $\mathbf{C}^T$ con $T = U \circ F$ es* **Set** *y concluir que Φ no puede ser equivalencia.*

Definición 350. *una **comónada** en una categoría $\mathbf{C}$ es una mónada en la categoría $\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$. Es decir, es un endofuntor $G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ junto con dos transformaciones naturales*

$$
\begin{aligned}
\epsilon &: G \longrightarrow 1 \\
\delta &: G \longrightarrow G \circ G
\end{aligned}
$$

tales que

$$\delta_G \circ \delta = G\delta \circ \delta$$
$$\epsilon_G \circ \delta = 1_G = G\epsilon \circ \delta$$

Como en el caso de las mónadas, una adjunción $F \dashv U$, $\eta : 1_{\mathbf{C}} \longrightarrow U \circ F$ y $\epsilon : F \circ U \longrightarrow 1_{\mathbf{C}}$ da lugar a una comónada (G, ϵ, δ) donde

$$G = F \circ U : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$$
$$\epsilon : G \longrightarrow 1$$
$$\delta_D = F(\eta_{U(D)}) : G(D) \longrightarrow G(G(D))$$

Surge también la noción de coálgebra correspondiente a una comónada, y la de funtor comonádico.