(Vigesimoquinta clase: Tipos inductivos y coinductivos, álgebras y coálgebras)

Podemos definir inductivamente el tipo de los números naturales a través de sus constructores: $0 : \mathbb{N}$ y $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Así definido, $\mathbb{N} \in \mathbf{Set}$ y 0 y s son funciones (al constructor 0 se lo puede ver como función $0 : 1 \to \mathbb{N}$).

Se puede ver que el tipo definido es el óbjeto inicial de una categoría de álgebras. Una **(0,s)-álgebra** es un conjunto $U \in \mathbf{Set}$ junto con dos operaciones $0_U : 1 \to U$ y $s_U : U \to U$. Una flecha o (0,s)-morfismo h entre dos (0,s)-álgebras $(U, 0_U, s_U)$ y $(V, 0_V, s_V)$ es una función $h : U \to V$ tal que

$$\begin{array}{rcl} h(0_U) & = & 0_V \\ h(s_U(x)) & = & s_V(h(x)) \end{array}$$

que puede visualizarse como diagramas que conmutan:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "0_U"'] & 1 \arrow[d, "0_V"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s_U"'] & V \arrow[d, "s_V"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd}$$

Ejercicio 351. *Comprobar que las (0,s)-álgebras, forman una categoría con los (0,s)-morfismos.*

Además, la (0,s)-álgebra $(\mathbb{N}, 0, s)$ es el objeto inicial de dicha categoría. En efecto, sea $(U, 0_U, s_U)$ una (0,s)-álgebra, la función $h : \mathbb{N} \to U$ definida recursivamente por

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0_U \\ h(s(n)) & = & s_U(h(n)) \end{array}$$

es el único (0,s)-morfismo de $(\mathbb{N}, 0, s) \to (U, 0_U, s_U)$.

Para obtener mayor generalidad, se puede observar que la existencia de dos funciones $0_U : 1 \to U$ y $s_U : U \to U$ es equivalente a la existencia de una única función de la forma $[0_U, s_U] : 1 + U \to U$. Un (0,s)-morfismo h es una función $h : U \to V$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 + U \arrow[r, "1_1 + h"] \arrow[d, "{[0_U, s_U]}"'] & 1 + V \arrow[d, "{[0_V, s_V]}"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea el endofuntor $\mathbf{Set} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$ definido por

$$\begin{array}{rcl} F(X) & = & 1 + X \\ F(X \xrightarrow{f} Y) & = & F(X) \xrightarrow{1_1 + f} F(Y) \end{array}$$

el diagrama queda

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "{[0_U, s_U]}"'] & F(V) \arrow[d, "{[0_V, s_V]}"] \\ U \arrow[r, "h"] & V \end{tikzcd}$$

Podemos observar que una (0,s)-álgebra (que llamaremos F-álgebra de ahora en adelante) se parece a lo que definimos como álgebras para una mónada la clase pasada (salvo que en aquel caso se exigían condiciones adicionales relacionadas con la idea de mónada). En efecto, una F-álgebra es un par (A, α) donde $A \in \mathbf{Set}$ y $\alpha : F(A) \to A$ y F está definido por $F(X) = 1 + X$. Una función $h : A \to B$ es un morfismo entre F-álgebras (A, α) y (B, β) si

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "\alpha"'] & F(B) \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Como hemos comprobado, $(\mathbb{N}, [0, s])$ es el objeto inicial de esta categoría.

Podemos definir la noción dual: la de coálgebra. Una F-coálgebra es un par (A, α) tal que $\alpha : A \to F(A)$, es decir, $\alpha : A \to 1 + A$. Una flecha h entre las F-coálgebras (A, α) y (B, β) es una función $h : A \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(h)"] & F(B) \\ A \arrow[r, "h"] \arrow[u, "\alpha"] & B \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Se verifica también que las F-coálgebras forman una categoría.

Por ejemplo, $\mathbb{N}$ es una F-coalgebra con $\alpha : \mathbb{N} \to 1 + \mathbb{N}$ definida por:

$$\begin{array}{rcl} \alpha(0) & = & \iota_1(*) \\ \alpha(s(n)) & = & \iota_2(n) \end{array}$$

Ejercicio 352. *¿Sigue siendo inicial? Es decir, ¿es $\mathbb{N}$ inicial en la categoría de las F-coálgebras?*

Otro ejemplo de F-coálgebra es el conjunto unitario $\{\infty\}$ con $\alpha(\infty) = \iota_2(\infty)$.

Ejercicio 353. *¿Se puede ver al conjunto $\{\infty\}$ como una F-álgebra? ¿Puede verse a $\{0, \infty\}$ como un F-álgebra, F-coálgebra, ambas o ninguna?*

Una F-coálgebra particularmente interesante se obtiene definiendo $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y $\nu : \mathbb{N}_\infty \to 1 + \mathbb{N}_\infty$ por

$$\begin{array}{rcl} \nu(0) & = & \iota_1(*) \\ \nu(s(n)) & = & \iota_2(n) \\ \nu(\infty) & = & \iota_2(\infty) \end{array}$$

Con esta definición, $(\mathbb{N}_\infty, \nu)$ es el objeto terminal de la categoría de las F-coálgebras. En efecto, sea (A, α) una F-coálgebra, podemos definir inductivamente subconjuntos $A(n) \subseteq A$ para cada $n \in \mathbb{N}$ como sigue

$$\begin{array}{rcl} A(0) & = & \{a \in A \mid \alpha(a) = \iota_1(*)\} \\ A(s(n)) & = & \{a \in A \mid \exists a' \in A(n).\alpha(a) = \iota_2(a')\} \end{array}$$

Ejercicio 354. *Demostrar que si $n \neq m$ entonces $A(n) \cap A(m) = \{\}$.*

Ahora sea $h : A \to \mathbb{N}_\infty$ definida por

$$\begin{array}{rcll} h(a) & = & n & \text{si } a \in A(n) \\ h(a) & = & \infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}. a \notin A(n) \end{array}$$

Podemos comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 + A \arrow[r, "1_1 + h"] & 1 + \mathbb{N}_\infty \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "h"] & \mathbb{N}_\infty \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

Sea $a \in A(0)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} (1_1 + h)(\alpha(a)) & = & (1_1 + h)(\iota_1(*)) \\ & = & \iota_1(*) \\ & = & \nu(0) \\ & = & \nu(h(a)) \end{array}$$

Sea ahora $a \in A(s(n))$, entonces para algún $a' \in A(n)$,

$$\begin{array}{rcl} (1_1 + h)(\alpha(a)) & = & (1_1 + h)(\iota_2(a')) \\ & = & \iota_2(h(a')) \\ & = & \iota_2(n) \\ & = & \nu(s(n)) \\ & = & \nu(h(a)) \end{array}$$

Por último, sea $a \notin \bigcup_n A(n)$. Entonces para algún $a' \notin \bigcup_n A(n)$,

$$\begin{array}{rcl} (1_1 + h)(\alpha(a)) & = & (1_1 + h)(\iota_2(a')) \\ & = & \iota_2(h(a')) \\ & = & \iota_2(\infty) \\ & = & \nu(\infty) \\ & = & \nu(h(a)) \end{array}$$

Esto demuestra la conmutatividad del diagrama. Para demostrar que $(\mathbb{N}_\infty, \nu)$ es objeto terminal, resta comprobar la unicidad de h. Sea entonces g tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 + A \arrow[r, "1_1 + g"] & 1 + \mathbb{N}_\infty \\
A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{N}_\infty \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Demostraremos por inducción en n que para todo $a \in A(n)$, $g(a) = n$. Sea $a \in A(0)$, entonces

$$\begin{array}{rcl}
\nu(g(a)) & = & (1_1 + g)(\alpha(a)) \\
 & = & (1_1 + g)(\iota_1(*)) \\
 & = & \iota_1(*) \\
 & = & \nu(0)
\end{array}$$

de donde se deduce que $g(a) = 0 = h(a)$ porque ν es obviamente inyectiva. Sea ahora $a \in A(s(n))$, entonces para algún $a' \in A(n)$ (para el que asumimos que por hipótesis inductiva $g(a') = n$),

$$\begin{array}{rcl}
\nu(g(a)) & = & (1_1 + g)(\alpha(a)) \\
 & = & (1_1 + g)(\iota_2(a')) \\
 & = & \iota_2(g(a')) \\
 & = & \iota_2(n) \\
 & = & \nu(s(n))
\end{array}$$

de donde nuevamente por inyectividad de ν obtenemos $g(a) = s(n) = h(a)$. Esto termina la prueba de que $a \in A(n) \Rightarrow g(a) = n$. El recíproco también vale: demostremos que $g(a) = n \Rightarrow a \in A(n)$ por inducción en n. Si $g(a) = 0$,

$$\begin{array}{rcl}
\iota_1(*) & = & \nu(0) \\
 & = & \nu(g(a)) \\
 & = & (1_1 + g)(\alpha(a))
\end{array}$$

de donde $\alpha(a) = \iota_1(*)$, luego $a \in A(0)$. A continuación asumimos que por hipótesis inductiva $g(a') = n \Rightarrow a' \in A(n)$ y sea $g(a) = s(n)$. Entonces

$$\begin{array}{rcl}
\iota_2(n) & = & \nu(s(n)) \\
 & = & \nu(g(a)) \\
 & = & (1_1 + g)(\alpha(a)) \\
 & = & (1_1 + g)(\iota_2(a')) \\
 & = & \iota_2(g(a'))
\end{array}$$

de donde $g(a') = n$ y $a' \in A(n)$, luego $a \in A(s(n))$. Conclusión: $a \in A(n) \Leftrightarrow g(a) = n$.

Por ello, si $a \notin \bigcup_n A(n)$, la única posibilidad que hay es $g(a) = \infty$. Luego, $g = h$ es única y $(\mathbb{N}_\infty, \nu)$ es objeto terminal.

Cuando definimos en Haskell

data N = Z | S N

¿cuál estamos definiendo, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_\infty$? Por la semántica del lenguaje, el tipo N que acabamos de definir incluye objetos infinitos, tales como

inf :: N
inf = S inf

o

inf1, inf2 :: N
inf1 = S inf2
inf2 = S inf1

Por ello, la definición del tipo N es una definición coinductiva. En lenguajes no perezosos, la misma definición sería inductiva.

Ejercicio 355. *¿Existe $\alpha : F(\mathbb{N}_\infty) \to \mathbb{N}_\infty$ tal que $\mathbb{N}_\infty$ sea un F-álgebra?*

Ejercicio 356. *¿Qué define inductivamente data $I\ a = I\ a$? En otras palabras, ¿cuál es el objeto inicial en la categoría de las I-álgebras para el endofuntor identidad I : $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$? ¿qué define coinductivamente? Es decir, ¿cuál es el objeto terminal en la categoría de las I-coálgebras?*

Otro ejemplo de tipo definido inductivamente es el de las listas de elementos de un conjunto $\Sigma \in \mathbf{Set}$. En este caso los constructores son $[\,] : 1 \to \Sigma^*$ y $\triangleright : \Sigma \times \Sigma^* \to \Sigma^*$.

Ejercicio 357. *Sea $F_\Sigma : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ definido por $F_\Sigma(X) = 1 + \Sigma \times X$. Demostrar que $\{*\}$ con un α apropiado es un F_Σ-álgebra. Demostrar que Σ^* con un α apropiado es un F_Σ-álgebra inicial. ¿Quién es el F_Σ-coálgebra terminal? Dada otra F_Σ-coálgebra (A, α), definir la única flecha de la F_Σ-coálgebra $(A.\alpha)$ en la F_Σ-coálgebra terminal (no se pide demostrar que es terminal).*

Ejercicio 358. *¿Cómo podría modificar el funtor del ejercicio anterior para obtener sólo los objetos infinitos en la F_Σ-coálgebra terminal?*

Ejercicio 359. *Definir un funtor T : $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ de modo de que la T-álgebra inicial sea el conjunto de árboles binarios. ¿Qué se obtiene como T-coálgebra terminal?*