(Tercera clase: primeras construcciones categóricas: objeto inicial y final. Preórdenes y posets, grafos y relaciones)

Isomorfismo. Cuando se estudian distintas estructuras (semigrupo, monoide, grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, reticulado, preorden, orden parcial, cpo, dominio, etc.) es habitual introducir una definición de isomorfirsmo como un homomorfismo biyectivo. En teoría de categorías, se pretende dar una definición más abstracta, que no asuma que las flechas son funciones y los objetos conjuntos con estructuras.

Se define isomorfismo en lenguaje categórico como sigue.

Definición 58. *En una categoría* $\mathbf{C}$*, un* ***isomorfismo*** *es una flecha* $A \xrightarrow{f} B$ *tal que existe una flecha* $B \xrightarrow{g} A$ *tal que* $g \circ f = 1_A$ *y* $f \circ g = 1_B$*. Se suele decir que* f *es* ***iso****.*

Ejercicio 59. *Comprobar que si una tal* g *existe, entonces es única (y por ello se escribe* $g = f^{-1}$*). Y que* g *también es iso.*

Ejercicio 60. *Comprobar que la identidad es un isomorfismo y que la composición de isomorfismos también lo es.*

Definición 61. *Se dice que* A *y* B *son* ***isomorfos*** *(y se escribe* $A \cong B$*) si existe un iso* $A \xrightarrow{f} B$*.*

Ejercicio 62. *Comprobar que la relación* $\cong$ *entre objetos de una categoría es de equivalencia.*

En la categoría **Set**, por ejemplo, la definición de isomorfismo coincide con la de función invertible o biyectiva, y la de objetos isomorfos, con la de conjuntos de igual cardinalidad. Aprovecharemos esta observación para escribir $A \cong_{\mathbf{Set}} B$ cuando se quiera expresar que A y B son conjuntos de igual cardinalidad.

Ejercicio 63. *¿Cuáles son los isomorfismos en las categorías* **2**, $\mathbf{Set}_{\mathbf{fin}}$, **Pfn**, **Semi**, **Mon**, **Grp**, **Poset**, **Graph**, **Cat**, $\lambda{\rightarrow}$*?*

Ejercicio 64. *Comprobar que todos los casos particulares (que se obtiene al determinar el objeto y la flecha) de la categoría* **1** *son isomorfos entre sí. Idem para la categoría* **2**.

Ejercicio 65. *Sea el siguiente grafo*

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & \diamond \arrow[l] \end{tikzcd}$$

donde hay exactamente 5 flechas (las graficadas más las dos identidades). Definir la operación de composición de modo de que resulte una categoría (ejercicio tramposo).

Se puede comprobar que si dos objetos $A, B \in \mathbf{C}_0$ son isomorfos, entonces para todo $C \in \mathbf{C}_0$, $Hom(A, C) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(B, C)$ y $Hom(C, A) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(C, B)$. En efecto, si $A \xrightarrow{f} B$ iso, entonces $\phi_C(g) = g \circ f^{-1}$ es la biyección de $Hom(A, C)$ a $Hom(B, C)$ y $\psi_C(g) = f \circ g$ es la de $Hom(C, A)$ a $Hom(C, B)$. Combinando ambas observaciones se obtiene también $Hom(A, A) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(B, B)$.

Se puede también observar que la existencia de ϕ_C para todo C, no implica la de ψ_C (al revés tampoco), y que la existencia de ambas no implica que A y B sean isomorfos. Para ello, consideramos la categoría **Const** cuyos objetos son conjuntos y cuyas flechas son las funciones constantes (más las funciones identidades).

Ejercicio 66. *Para la categoría* **Const***:*

1. *¿Cuáles son los objetos isomorfos?*
2. *Comprobar que para todo par de conjuntos infinitos A y B, y para todo C, $Hom(A, C) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(B, C)$. ¿Cuál es el problema si A y B son finitos?*
3. *Comprobar que para todo par de conjuntos infinitos A y B tales que $A \cong_{\mathbf{Set}} B$, $Hom(C, A) \cong_{\mathbf{Set}} Hom(C, B)$ para todo C.*
4. *Concluir que la existencia de ϕ_C para todo C, no implica la de ψ_C, menos aún que A y B sean isomorfos.*

Objeto inicial y objeto terminal.

Definición 67. *En una categoría* $\mathbf{C}$*,* 0 *es un **objeto inicial** si para todo objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *existe una única flecha* $0 \xrightarrow{!^A} A$*. Análogamente,* 1 *es un **objeto terminal** si para todo objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *existe una única flecha* $A \xrightarrow{!_A} 1$*.*

Se puede comprobar que si $\mathbf{C}$ tiene objeto inicial, entonces el mismo es único salvo isomorfismo: Sean 0 y $0'$ objetos iniciales, como 0 es inicial existe una única flecha $0 \xrightarrow{f} 0'$. Como $0'$ es inicial existe una única flecha $0' \xrightarrow{g} 0$. Podemos componer ambas flechas obteniendo $0 \xrightarrow{g \circ f} 0$ y $0' \xrightarrow{f \circ g} 0'$. Pero por ser 0 inicial, hay solo una flecha $0 \longrightarrow 0$, y nosotros tenemos aparentemente dos: $g \circ f$ y 1_0. Por lo tanto, deben ser la misma $g \circ f = 1_0$.

De la misma forma, usando que $0'$ es inicial, obtenemos $f \circ g = 1_{0'}$. Por lo tanto f y g son isos y $0 \cong 0'$.

Ejercicio 68. *Comprobar que si* $\mathbf{C}$ *tiene objeto terminal, es único salvo isomorfismo.*

De los ejercicios 54 y 53 se deduce que $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son los objetos inicial y terminal de la categoría **Cat**. Su unicidad (salvo isomorfismo) explica que se le llame "la" categoría $\mathbf{1}$, cuando, como dijimos luego del ejemplo 12, existen infinitas categorías terminales (todas isomorfas entre sí). En general, las definiciones y afirmaciones siempre son salvo isomorfismo: importa la estructura de la categoría más que los nombres elegidos para sus objetos y para sus flechas. La estructura depende de las flechas y su composición, los objetos sólo cumplen un rol secundario: restringir las composiciones posibles.

Ejercicio 69. *En las categorías vistas, ¿cuáles son (si existen) los objetos iniciales y terminales?*

Las definiciones de objeto inicial y objeto terminal son las generalizaciones o abstracciones que ofrece la teoría de categoría de la noción de conjunto vacío y conjunto unitario (singleton). Repasar la definición 67 para notar la manera en que se definieron tales objetos categóricamente.

Recordemos la categoría $\mathbf{2}$ definida en el ejemplo 12.

Ejemplo 70. *Otro ejemplo sencillo de categoría es la categoría* $\mathbf{3}$*: tiene tres objetos, una única flecha del primero en el segundo, una única flecha del segundo en el tercero, y la composición de ambas.*

Puede graficarse:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[dr] & * \arrow[d] \\ & * \end{tikzcd}$$

Ejercicio 71. *¿Tiene objetos inicial y terminal la categoría* $\mathbf{3}$*?*

Ejercicio 72. *Enumerar, salvo isomorfismo, todas las categorías con 3 objetos y 2 flechas (además de las identidades). Para cada una de ellas, determinar si tienen objetos inicial y terminal; y si hay objetos isomorfos.*

Ejemplo 73. *Más difícil de graficar, dado un número natural* n*, la categoría* $\mathbf{n}$ *tiene* n *objetos (numerémoslos:* $1, 2, \ldots, n$*). Dados los objetos* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *hay una única flecha de* i *a* j *si* $i \leq j$*; si* $i > j$ *no hay ninguna. La composición debe definirse de la única manera posible para que sea una categoria, por ejemplo, la composición de la flecha que va de* 1 *a* 3 *con la que va de* 3 *a* 8 *es la única flecha que va de* 1 *a* 8*.*

Ejemplo 74. *Esta construcción puede generalizarse a cualquier preorden (relación reflexiva y transitiva): Dado un preorden* P*, se toman sus elementos como objetos de la categoría y hay exactamente una flecha entre* p *y* q *si y solo si* $p \leq_P q$*.*

En particular, un poset es un preorden y por lo tanto puede ser visto como categoría. No hay que confundir esta categoría con la categoría **Poset** de los posets y las funciones monótonas del ejemplo 43. De paso, vale la pregunta:

Ejercicio 75. *¿se podría definir también una categoría (la podríamos llamar* **Pre***) en que los objetos son preórdenes?*

Volvamos al último ejemplo.

Ejercicio 76. *Dada una categoría, ¿cómo puede definir un preorden entre sus objetos? ¿En qué casos esta construcción es exactamente la inversa del último ejemplo?*

Ejercicio 77. *Sea* P *un preorden visto como categoría. ¿Cuáles serían los objetos inicial y terminal? ¿Cuáles serían los isomorfismos, cuáles los objetos isomorfos?*

Ejercicio 78. *Sean* P *y* Q *dos posets vistos como categorías. ¿Cuáles son los funtores de* P *a* Q*?*

Ejemplo 79. *Dado un grafo* G*, es posible construir una categoría* $\mathbf{Path}_G$ *de la siguiente manera: los objetos de la categoría son los objetos del grafo; las flechas de la categoría son los caminos dirigidos del grafo; la composición es la concatenación de caminos.*

Ejercicio 80. *¿Cómo se define dom y cod del camino vacío? (ejercicio) ¿Cómo podríamos haber evitado este problema en la definición de categoría?*

Ejercicio 81. *¿Tiene* $\mathbf{Path}_G$ *objetos iniciales y terminales? ¿Y objetos isomorfos?*

Ejemplo 82. *Dado un grafo G sin ciclos, es posible construir una categoría G^* agregando las flechas identidad que falten, y los resultados de componer las flechas del multigrafo. Si G es finito, la categoría G^* es finita también. ¿Cómo se compara con la categoría* $\mathbf{Path}_G$*?*

Ejercicio 83. *¿Qué pasa si G tiene ciclos? ¿Sigue valiendo la comparación con* $\mathbf{Path}_G$*? ¿Cómo podría definirse la composición para que la categoría resulte finita si el grafo lo es?*

Ejercicio 84. *¿En qué casos tiene G^* objetos inicial y terminal? ¿Y objetos isomorfos?*

Ejemplo 85. *Sea* **Rel** *la categoría cuyos objetos son conjuntos y flechas de* **Rel***(A,B) relaciones binarias entre elementos de ambos conjuntos, es decir, subconjuntos de $A \times B$.*

Ejercicio 86. *Identificar objetos inicial y terminal, y objetos isomorfos de* **Rel**.

Ejercicio 87. *Dado un autómata A, mostrar que puede construirse una categoría A^* donde los objetos son los estados y las flechas, las cadenas que pueden llevar el autómata de un estado a otro. Identificar objetos inicial y terminal, y objetos isomorfos.*