(CUARTA CLASE: CATEGORÍAS A PARTIR DE CATEGORÍAS: SUBCATEGORÍA, $\mathbf{C^{op}}$, DUALIDAD, PRODUCTO CARTESIANO, PRODUCTO DE CATEGORÍAS)

Subcategorías.

Definición 88. *Una* ***subcategoría*** *de* $\mathbf{C}$ *es una categoría* $\mathbf{C}$*' tal que los objetos de* $\mathbf{C}$*' son objetos de* $\mathbf{C}$*, las flechas de* $\mathbf{C}$*' son flechas de* $\mathbf{C}$*, con las mismas identidades, composición, dominio y codominio. Es decir, tal que*

- $\mathbf{C}'_0 \subseteq \mathbf{C}_0$.
- $\mathbf{C}'_1 \subseteq \mathbf{C}_1$.
- *Para toda flecha* $f \in \mathbf{C}'_1$, $dom'(f) = dom(f)$ *y* $cod'(f) = cod(f)$.
- *Para todo par de flechas* $f : \mathbf{C}'(A, B)$ *y* $g : \mathbf{C}'(B, C)$, $g \circ' f = g \circ f$.
- *Para todo objeto* $A \in \mathbf{C}'_0$, $1'_A = 1_A$.

Ejemplo 89. $\mathbf{Set_{fin}}$ *es subcategoría de* $\mathbf{Set}$.

Ejercicio 90. *Dar otros ejemplos de subcategorías de* $\mathbf{Set}$.

Ejercicio 91. *¿Cuáles de las categorías definidas hasta ahora son subcategorías de* $\mathbf{Rel}$*?*

Ejemplo 92. *Sea F un funtor. La imagen de F es una subcategoría.*

Observar que la afirmación inversa también se cumple: dada una subcategoría, se puede definir un funtor (inyectivo) cuya imagen sea la subcategoría. Por ello, a veces se identifica, incluso se define, como subcategoría a un funtor inyectivo.

Categoría opuesta.

Definición 93. *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *se define la categoría* $\mathbf{C^{op}}$ *(la* ***categoría opuesta*** *o* ***dual*** *de* $\mathbf{C}$*) tal que los objetos de* $\mathbf{C^{op}}$ *son los mismos que los de* $\mathbf{C}$*, y las flechas de* $\mathbf{C^{op}}$ *también, salvo que su orientación está invertida. Es decir, tal que*

- ${\mathbf{C^{op}}}_0 = \mathbf{C}_0$.
- ${\mathbf{C^{op}}}_1 = \mathbf{C}_1$.
- *Para toda flecha* f, $dom^{op}(f) = cod(f)$ *y* $cod^{op}(f) = dom(f)$.
- *Para todo par de flechas* $f : \mathbf{C}(A, B)$ *y* $g : \mathbf{C}(B, C)$, $f \circ^{op} g = g \circ f$.
- *Para todo objeto* A, $1^{op}_A = 1_A$.

Es decir, la categoría $\mathbf{C^{op}}$ es la categoría $\mathbf{C}$ con las flechas invertidas.

Ejercicio 94. *Comprobar que* $\mathbf{C^{op}}$ *es una categoría si* $\mathbf{C}$ *lo es.*

Ejercicio 95. *¿Es* $(\_)^{\mathbf{op}}$ *un funtor de* $\mathbf{Cat}$ *en* $\mathbf{Cat}$*?*

Ejercicio 96. *Comprobar que* $(\mathbf{C^{op}})^{\mathbf{op}} = \mathbf{C}$.

Ejemplo 97. *Se puede comprobar que* $\mathbf{C^{op}}$ *tiene objeto inicial sii* $\mathbf{C}$ *tiene objeto terminal, y es el mismo. Similarmente,* $\mathbf{C^{op}}$ *tiene objeto terminal sii* $\mathbf{C}$ *tiene objeto inicial, y es el mismo. Los isomorfismos de* $\mathbf{C^{op}}$ *son los de* $\mathbf{C}$.

Este ejemplo es consecuencia de la dualidad existente entre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C^{op}}$ que permite formular el siguiente enunciado. Para ello, dada una fórmula ϕ, se define ϕ^{op} a la fórmula obtenida a partir de ϕ invirtiendo la orientación de todas las flechas involucradas en ella. Claramente $(\phi^{op})^{op} = \phi$.

Prop 98. *La afirmación ϕ vale para la categoría* $\mathbf{C}$ *sii ϕ^{op} vale para la categoría* $\mathbf{C^{op}}$.

Una consecuencia inmediata es el siguiente principio de dualidad

Prop 99. *Si la afirmación ϕ vale para todas las categorías, entonces ϕ^{op} también.*

En efecto, si ϕ vale para toda categoría, sea $\mathbf{C}$ una categoría, ϕ vale en particular para $\mathbf{C^{op}}$. Por lo tanto, por la proposición anterior, ϕ^{op} vale para $(\mathbf{C^{op}})^{\mathbf{op}} = \mathbf{C}$.

Ejemplo 100. *Se puede comprobar que* $\mathbf{Rel^{op}} \cong \mathbf{Rel}$.

Ejercicio 101. *¿Alguna otra de las categorías presentadas es isomorfa a su opuesta?*

Ejercicio 102. *En el ejercicio 72 ¿cuáles son las categorías opuestas entre sí?*

Se concluye inmediatamente del principio de dualidad, que en una categoría isomorfa a su opuesta, el objeto terminal y el inicial (si existe) es el mismo.

Producto Cartesiano. La definición habitual de producto Cartesiano de dos conjuntos A y B está dada por $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$. Para generalizar esta definición, en términos propios de teoría de categoría, se evita toda mención a los elementos, reformulándose solo en términos de objetos y flechas.

Sabemos que el conjunto $A \times B$ viene equipado con las funciones de proyección, $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$ y $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$. Esto determina una propiedad categórica: el producto Cartesiano entre dos objetos A y B será un objeto C con un par de flechas $C \xrightarrow{a} A$ y $C \xrightarrow{b} B$. Esto suele graficarse

$$\begin{tikzcd} A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

Esta propiedad no caracteriza totalmente al producto Cartesiano, si pensamos en **Set** encontraremos que cualquier conjunto C posee un par de flechas (funciones) como ésas. Falta hablar de la función que construye los pares (que en un lenguaje funcional tendría tipo $A \to B \to A \times B$). También falta decir qué resulta de componer estas funciones.

Para ello, además de $A \xleftarrow{a} C \xrightarrow{b} B$, se pide que para todo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

exista una única flecha h tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

conmute.

En efecto, si pensamos en **Set**, el producto Cartesiano satisface, como dijimos, la existencia de las proyecciones

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

Además, para todo par de funciones

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

podemos definir $h(x) = (f(x), g(x))$ y comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta (claramente $f = \pi_1 \circ h$ ya que para todo $x \in X$, $f(x) = \pi_1((f(x), g(x))) = \pi_1(h(x))$, y de la misma manera para $g = \pi_2 \circ h$). Es más, se puede comprobar que h es la única función de X en $A \times B$ que hace conmutar este diagrama. En efecto, si

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, sea $x \in X$ y $h'(x) = (a, b)$, como el diagrama conmuta $f(x) = \pi_1(h'(x)) = \pi_1((a, b)) = a$ y $g(x) = b$. Luego, $h'(x) = (a, b) = (f(x), g(x)) = h(x)$, y esto se puede hacer para todo $x \in X$.

Definición 103. *En una categoría* $\mathbf{C}$*, el diagrama*

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

es un ***producto de*** *los objetos A* ***y*** *B si para todo diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $X \xrightarrow{h} A \times B$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Como comprobamos antes de la definición, el producto Cartesiano habitual entre conjuntos satisface esta definición. Por ello, la misma hereda las notaciones habituales: $A \times B$, π_1 y π_2. La única flecha h de la definición se escribe $<f, g>$. La conmutatividad del diagrama equivale a las ecuaciones $f = \pi_1 \circ <f, g>$ y $g = \pi_2 \circ <f, g>$.

Observemos que si consideramos el caso particular en que

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

es

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

se concluye que existe una única flecha $A \times B \xrightarrow{<\pi_1, \pi_2>} A \times B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "<\pi_1, \pi_2>"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, esa única flecha debe ser $1_{A \times B}$ ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "1_{A \times B}"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta trivialmente. Luego $<\pi_1, \pi_2> = 1_{A \times B}$.

Otro caso particular interesante se da cuando $C \xrightarrow{f} A$ y $D \xrightarrow{g} B$. Si los productos de A y B y de C y D existen, se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & C \times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dl, "f \circ \pi_1"] \arrow[dr, "g \circ \pi_2"'] & D \arrow[d, "g"] \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, existe una única flecha, que se denota $C \times D \xrightarrow{f \times g} A \times B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "f"'] & C \times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "f \times g"] & D \arrow[d, "g"] \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, de donde se concluye la validez de las ecuaciones $f \times g = <f \circ \pi_1, g \circ \pi_2>$ y $<1_A, 1_B> = 1_{A \times B}$.

Observar que hemos abusado de la notación decorando dos flechas diferentes con π_1 y otras dos flechas con π_2.

Ejercicio 104. *Demostrar la validez de las siguientes ecuaciones (algunas pueden deducirse de ecuaciones previas)*

1. $<f, g> \circ h = <f \circ h, g \circ h>$
2. $(f \times g) \circ (h \times k) = (f \circ h) \times (g \circ k)$
3. $(f \times g) \circ <h, k> = <f \circ h, g \circ k>$

Regresemos a la categoría **Set**. Hemos observado que el producto Cartesiano habitual satisface la definición dada en términos categóricos. Pero, ¿realmente caracteriza dicha definición al producto Cartesiano? ¿No habrá otros conjuntos que también la satisfagan? La respuesta, que se demuestra en general para cualquier categoría, es que si tenemos dos productos entre los mismos objetos, los productos son isomorfos.

Para comprobarlo, asumamos que además de $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$, tenemos que $A \xleftarrow{a} C \xrightarrow{b} B$ satisfacen la definición de producto. Entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "<a,b>"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B
\end{tikzcd}$$

conmutan. Componiendo $h \circ <a,b>$ y $<a,b> \circ h$ obtenemos los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "<a,b>"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "h"] & B \\
 & C \arrow[ul, "a"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] \arrow[d, "<a,b>"] & B \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

de donde por unicidad obtenemos $h \circ <a,b> = 1_C$ y $<a,b> \circ h = 1_{A\times B}$. Es decir que C y $A \times B$ son isomorfos.

En toda categoría $\mathbf{C}$, si el producto Cartesiano entre dos objetos de $\mathbf{C}$ existe, entonces es único salvo isomorfismo.

Ejercicio 105. *Demostrar el recíproco: en una categoría* $\mathbf{C}$*, si* $A \times B$ *existe y* $C \cong A \times B$*, entonces* C *es producto Cartesiano de* A *y* B*.*

Regresando nuevamente a **Set**, obtenemos más de un producto Cartesiano, todo conjunto de igual cardinalidad sirve como tal. Incluso para un mismo conjunto puede haber diferentes definiciones de las funciones de proyección.

Definición 106. *Una categoría* $\mathbf{C}$*,* ***tiene productos binarios*** *si para todo par de objetos* A *y* B *de* $\mathbf{C}$ *existe el producto* $A \times B$*, y* ***tiene todos los productos finitos*** *si tiene productos binarios y tiene objeto terminal.*

Ejercicio 107. *Comprobar que si* $\mathbf{C}$ *tiene todos los productos finitos,* $1 \times A \cong A$*.*

Ejercicio 108. *Demostrar que si* $\mathbf{C}$ *tiene productos binarios, entonces* $A \times B \cong B \times A$*. ¿Hace falta demostrar algo?*

Ejercicio 109. *Demostrar que si* $\mathbf{C}$ *tiene productos binarios, entonces* $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$*.*

Ejercicio (posgrado) 110. *Si* $\mathbf{C}$ *tiene todos los productos finitos y además tiene objeto inicial, ¿vale el isomorfismo* $0 \times A \cong 0$*?*

Ejemplo 111. *En las categorías concretas dadas (***Semi***,* **Mon***,* **Grp***,* **Poset***), el producto Cartesiano existe y se define componente a componente, como es habitual en la rama de la matemática que estudia tales estructuras.*

Ejemplo 112. *La categoría* **Cat** *tiene todos los productos finitos. En efecto, vimos que tiene objeto terminal (la categoría* $\mathbf{1}$*). Además, dadas dos categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$*, la siguiente definición satisface la definición de producto Cartesiano que hemos dado.*

Definición 113. *Dadas dos categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$*, se define la categoría producto* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *cuyos objetos son pares* (C, D) *de objetos de* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *respectivamente, y cuyas flechas son pares* (f, g) *de flechas de* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$*. Más precisamente,*

- $(\mathbf{C} \times \mathbf{D})_0 = \mathbf{C}_0 \times \mathbf{D}_0$.
- $(\mathbf{C} \times \mathbf{D})_1 = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{D}_1$.
- *Para toda flecha* $(f, g) \in (\mathbf{C} \times \mathbf{D})_1$, $dom(f, g) = (dom(f), dom(g))$ *y* $cod(f, g) = (cod(f), cod(g))$.
- *Para todo par de flechas* $(A, A') \xrightarrow{(f,g)} (B, B')$ *y* $(B, B') \xrightarrow{(i,j)} (C, C')$, *se define* $(i, j) \circ (f, g) = (i \circ f, j \circ g)$.
- *Para todo objeto* (A, A'), $1_{(A,A')} = (1_A, 1_{A'})$.

Ejercicio 114. *Definir los funtores* $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{C}$ *y* $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{D}$.

Ejercicio 115. *Dadas tres categorías* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *y* $\mathbf{X}$, *y dados dos funtores* $\mathbf{X} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ *y* $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}$ *definir el único funtor* $\mathbf{X} \xrightarrow{<F,G>} \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{X} \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "<F,G>"] \arrow[dr, "G"] & \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} \times \mathbf{D} \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

Ejemplo 116. *Dado un poset* P, *consideremos* P *visto como una categoría. Veamos qué es un producto en* P. *Sean* a *y* b *objetos, es decir* $a, b \in P$. *El producto de* a *y* b *es*

- *un diagrama de la forma* $a \longleftarrow c \longrightarrow b$
- *tal que para todo otro diagrama de la forma* $a \longleftarrow x \longrightarrow b$ *existe una única flecha* $x \longrightarrow c$ *que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ a & c \arrow[l] \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

Se omiten rótulos en las flechas sin riesgo de confusión, porque en la categoría P *entre dos objetos hay a lo sumo una flecha. Por esa misma razón, que el diagrama conmute no suministra información alguna, todos los diagramas conmutan en la categoría* P. *Entonces, reescribimos lo anterior diciendo que el producto entre* a *y* b *es*

- *un diagrama de la forma* $a \longleftarrow c \longrightarrow b$
- *tal que para todo otro diagrama de la forma* $a \longleftarrow x \longrightarrow b$ *existe una única flecha* $x \longrightarrow c$.

Sabiendo que hay flecha de i *a* j *sii* $i \leq_P j$, *el producto* c *es el ínfimo entre* a *y* b.