(Quinta clase: Ejemplos de producto. Coproducto)

Recordemos que se dijo que el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

es un **producto de** los objetos A **y** B si para todo diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $X \xrightarrow{h} A \times B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

Propiedad como la que debe cumplir el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ para ser un producto ("para todo diagrama ... existe ...") se llaman **propiedades universales**. El uso de propiedades universales como ésta es habitual en teoría de categorías.

También es conveniente notar que el producto no es sólo el objeto $A \times B$ sino el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$. Para un mismo objeto $A \times B$ podría haber varios diagramas como ése que satisfagan la propiedad universal. Si se menciona sólo el objeto $A \times B$ (como a veces se hace), puede haber ambigüedad. En cambio si se habla del par de flechas π_1 y π_2 no hay ambigüedad posible dado que cada una de ellas tiene asignado un dominio y un codominio, por lo que se puede recuperar el diagrama (siempre que $dom(\pi_1) = dom(\pi_2)$).

Podemos comprobar las afirmaciones que quedaron como ejercicios la clase pasada: que en una categoría con objeto terminal $1 \times A \cong A$ y que en una categoría con productos binarios $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$.

Del primer resultado podemos inferir que la categoría **1** tiene todos los productos finitos. ¿Qué podemos decir de la categoría **2**?

A continuación, extendemos la definición de λ→ del ejemplo 22 con tipos y términos para pares:

Ejemplo 117. *Ahora los tipos incluyen productos*

$$A, B \quad ::= \quad \textit{ciertos tipos básicos} \mid A \longrightarrow B \mid A \times B \mid \ \ldots$$

y los términos incluyen pares y proyecciones

$$M, N \quad ::= \quad c \mid v \mid M\ N \mid \lambda v.M \mid (M, N) \mid fst(M) \mid snd(M) \mid \ \ldots$$

Además de las ecuaciones $(\lambda x.\ b)\ a = b[a/x]$ *(regla* β*),* $\lambda x.\ a\ x = a$ *si* x *no está libre en* a *(regla* η*), y renombre de variables ligadas, ahora se satisfacen también* $fst((a, b)) = a$*,*

$snd((a,b)) = b$ y $(fst(a), snd(a)) = a$, todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.

Como $\lambda y.fst(y)$ tiene tipo $A \times B \to A$ y $\lambda y.snd(y)$ tiene tipo $A \times B \to B$, si se define $\pi_1 = \lambda y.fst(y)$ y $\pi_2 = \lambda y.snd(y)$ se obtiene el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

Ahora, dado un tipo X y un par de términos cerrados M y N de tipo $X \to A$ y $X \to B$ respectivamente, es decir, dado el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "M"'] \arrow[dr, "N"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

se define $<M,N> = \lambda x.(M\ x, N\ x)$, que también es cerrado y tiene tipo $X \to A \times B$. Tiene sentido preguntarse si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "M"'] \arrow[dr, "N"] \arrow[d, "<M,N>"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta:

$$
\begin{array}{rcl}
\pi_1 \circ <M,N> & = & \lambda z.\ \pi_1\ (<M,N>\ z) \\
 & = & \lambda z.\ (\lambda y.fst(y))\ ((\lambda x.(M\ x, N\ x))\ z) \\
 & = & \lambda z.\ (\lambda y.fst(y))\ (M\ z, N\ z) \\
 & = & \lambda z.\ fst((M\ z, N\ z)) \\
 & = & \lambda z.\ M\ z \\
 & = & M \\
\pi_2 \circ <M,N> & = & N
\end{array}
$$

Habiendo comprobado que conmuta, resta confirmar que $<M,N>$ es el único término (módulo la igualdad que se definió) que hace conmutar el diagrama. Sea $X \xrightarrow{h} A \times B$ tal que $M = \pi_1 \circ h$ y $N = \pi_2 \circ h$,

$$
\begin{array}{rcl}
<M,N> & = & <\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h> \\
 & = & \lambda x.\ ((\pi_1 \circ h)\ x, (\pi_2 \circ h)\ x) \\
 & = & \lambda x.\ (\pi_1\ (h\ x), \pi_2\ (h\ x)) \\
 & = & \lambda x.\ ((\lambda y.\ fst(y))\ (h\ x), (\lambda y.\ snd(y))\ (h\ x)) \\
 & = & \lambda x.\ (fst(h\ x), snd(h\ x)) \\
 & = & \lambda x.\ h\ x \\
 & = & h
\end{array}
$$

Ejemplo 118. *En la categoría* **Rel**, *el producto entre A y B es en realidad la unión disjunta $A+B = \{(i,x) \mid (i = 1 \wedge x \in A) \vee (i = 2 \wedge x \in B)\}$ junto con las "proyecciones"*

$\pi_1 = \{((1,a),a) \mid a \in A\}$ *y* $\pi_2 = \{((2,b),b) \mid b \in B\}$. *En efecto, se obtiene el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A & A+B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

Resta ver que este diagrama satisface la propiedad universal correspondiente al producto. Sean

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "s"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

se define $<r, s> = \{(x,(1,a)) \mid (x,a) \in r\} \cup \{(x,(2,b)) \mid (x,b) \in s\}$, *se puede comprobar que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[d, "<r, s>"] \arrow[dr, "s"] & \\ A & A+B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejercicio 119. *Demostrar que* $<r, s>$ *es la única flecha que hace conmutar el diagrama.*

Ejercicio 120. *¿Tiene productos finitos la categoría* **Pfn***? Justificar.*

Ejemplo 121. *La categoría* **Set**$*$ *tiene por objetos pares de la forma* (a, A) *donde* A *es un conjunto y* $a \in A$. *Una flecha* $(a, A) \xrightarrow{f} (b, B)$ *es una función de* A *en* B *que satisface que* $f(a) = b$.

Ejercicio 122. *Comprobar que* **Set**$*$ *es una categoría. ¿Cuándo dos objetos son isomorfos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto terminal? ¿Tiene productos binarios?*

Definición de producto utilizando hom-sets. En este segmento trabajamos con categorías localmente pequeñas (para garantizar que los hom-sets involucrados sean conjuntos).

La propiedad universal del producto dice que para todo diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $<f,g>$ tal que

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "<f,g>"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto sugiere la siguiente definición de la función μ_X de $Hom(X,A) \times Hom(X,B)$ en $Hom(X, A \times B)$

$$\mu_X((f,g)) = <f,g>$$

Observemos que si $\mu_X((f,g)) = \mu_X((f',g'))$, entonces

$$\begin{array}{rcl} f & = & \pi_1 \circ <f,g> \\ & = & \pi_1 \circ \mu_X((f,g)) \\ & = & \pi_1 \circ \mu_X((f',g')) \\ & = & \pi_1 \circ <f',g'> \\ & = & f' \end{array}$$

y de la misma forma $g = g'$. Esto prueba que μ_X es inyectiva. También es suryectiva ya que dada la flecha $X \xrightarrow{h} A \times B$,

$$\begin{array}{rcl} h & = & 1_{A \times B} \circ h \\ & = & <\pi_1, \pi_2> \circ h \\ & = & <\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h> \\ & = & \mu_X((\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)) \end{array}$$

Por lo tanto μ_X es una biyección, su inversa es la función ν_X de $Hom(X, A \times B)$ en $Hom(X,A) \times Hom(X,B)$ definida por

$$\nu_X(h) = (\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)$$

Ejercicio 123. *Asumiendo que* $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ *es un producto entre* A *y* B, *comprobar que* ν_X *es la inversa de* μ_X.

Para definir μ_X es necesario saber que $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B, para que $<f,g>$ tenga sentido. En cambio, la definición de ν_X es elemental, requiere sólo que $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ sea un diagrama para que las composiciones $\pi_1 \circ h$ y $\pi_2 \circ h$ sean válidas.

Prop 124. *Esto permite una definición alternativa de producto:* $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ *es un producto entre* A *y* B *sii para todo objeto* X, ν_X *es una biyección entre* $Hom(X, A \times B)$ *en* $Hom(X,A) \times Hom(X,B)$.

En efecto, ya hemos comprobado que si el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B, ν_X es biyectiva. El recíproco se demuestra observando que la suryectividad de ν_X implica la existencia de la flecha de X a $A \times B$ que hace conmutar el diagrama, mientras que la inyectividad de ν_X implica la unicidad de una tal flecha.

Ejercicio 125. *Comprobar que si ν_X es biyectiva para todo objeto X, entonces el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B.*

Coproducto. El principio de dualidad nos dice que hay una definición dual a la de producto:

Definición 126. *En una categoría* $\mathbf{C}$*, el diagrama*

$$A \xrightarrow{\iota_1} A + B \xleftarrow{\iota_2} B$$

es un ***coproducto de*** *los objetos A* ***y*** *B si satisface la siguiente propiedad universal: para todo diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

existe una única flecha $C \xrightarrow{[f,g]} X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_1"] & A + B \arrow[u, "{[f,g]}"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejercicio 127. *Demostrar que si el coproducto entre A y B existe, entonces es único salvo isomorfismo.*

Ejercicio 128. *¿Cuál es el coproducto en la categoría* $\mathbf{Set}$*?*

Ejercicio 129. *Sea P un preorden visto como categoría. ¿Qué define el coproducto?*

Ejercicio 130. *¿Es el coproducto asociativo? ¿Cuál es su elemento neutro?*

Ejercicio 131. *¿Qué ecuaciones pueden deducirse utilizando los operadores $[\_\,,\_]$ y las flechas ι_1 y ι_2?*

Ejercicio 132. *Extender $\lambda \rightarrow$ con tipos, expresiones y ecuaciones para que tenga coproductos.*

Ejercicio 133. *¿Cuál es el coproducto en la categoría* $\mathbf{Rel}$*?*

Ejercicio 134. *¿Cuál es el coproducto en la categoría* $\mathbf{Pfn}$*?*

Ejercicio 135. *¿Cuál es el coproducto en la categoría* $\mathbf{Set*}$*?*

Ejercicio 136. *A la luz de la proposición 124, ¿qué definición alternativa puede dar del coproducto entre dos objetos?*