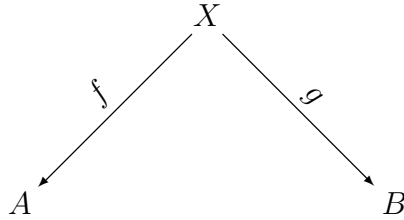


(QUINTA CLASE: EJEMPLOS DE PRODUCTO. COPRODUCTO)

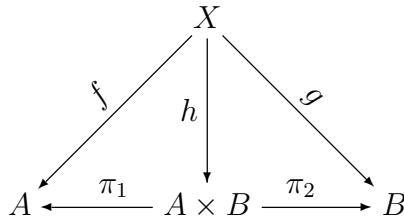
Recordemos que se dijo que el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

es un **producto** de los objetos A y B si para todo diagrama de la forma



existe una única flecha $X \xrightarrow{h} A \times B$ tal que el diagrama



Propiedad como la que debe cumplir el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ para ser un producto (“para todo diagrama . . . existe . . .”) se llaman **propiedades universales**. El uso de propiedades universales como ésta es habitual en teoría de categorías.

También es conveniente notar que el producto no es sólo el objeto $A \times B$ sino el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$. Para un mismo objeto $A \times B$ podría haber varios diagramas como ése que satisfagan la propiedad universal. Si se menciona sólo el objeto $A \times B$ (como a veces se hace), puede haber ambigüedad. En cambio si se habla del par de flechas π_1 y π_2 no hay ambigüedad posible dado que cada una de ellas tiene asignado un dominio y un codominio, por lo que se puede recuperar el diagrama (siempre que $dom(\pi_1) = dom(\pi_2)$).

Podemos comprobar las afirmaciones que quedaron como ejercicios la clase pasada: que en una categoría con objeto terminal $1 \times A \cong A$ y que en una categoría con productos binarios $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$.

Del primer resultado podemos inferir que la categoría **1** tiene todos los productos finitos. ¿Qué podemos decir de la categoría **2**?

A continuación, extendemos la definición de $\lambda \rightarrow$ del ejemplo 22 con tipos y términos para pares:

Ejemplo 117. *Ahora los tipos incluyen productos*

$$A, B ::= \text{ciertos tipos básicos} \mid A \longrightarrow B \mid A \times B \mid \dots$$

y los términos incluyen pares y proyecciones

$$M, N ::= c \mid v \mid M N \mid \lambda v. M \mid (M, N) \mid fst(M) \mid snd(M) \mid \dots$$

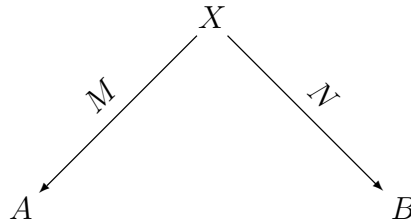
Además de las ecuaciones $(\lambda x. b) a = b[a/x]$ (regla β), $\lambda x. a \ x = a$ si x no está libre en a (regla η), y renombre de variables ligadas, ahora se satisfacen también $fst((a, b)) = a$,

$snd((a, b)) = b$ y $(fst(a), snd(a)) = a$, todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.

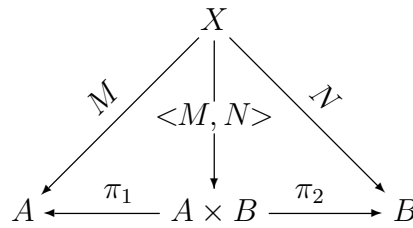
Como $\lambda y.fst(y)$ tiene tipo $A \times B \rightarrow A$ y $\lambda y.snd(y)$ tiene tipo $A \times B \rightarrow B$, si se define $\pi_1 = \lambda y.fst(y)$ y $\pi_2 = \lambda y.snd(y)$ se obtiene el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

Ahora, dado un tipo X y un par de términos cerrados M y N de tipo $X \rightarrow A$ y $X \rightarrow B$ respectivamente, es decir, dado el diagrama



se define $\langle M, N \rangle = \lambda x.(M x, N x)$, que también es cerrado y tiene tipo $X \rightarrow A \times B$. Tiene sentido preguntarse si el diagrama



conmuta:

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \langle M, N \rangle &= \lambda z. \pi_1 (\langle M, N \rangle z) \\ &= \lambda z. (\lambda y.fst(y)) ((\lambda x.(M x, N x)) z) \\ &= \lambda z. (\lambda y.fst(y)) (M z, N z) \\ &= \lambda z. fst((M z, N z)) \\ &= \lambda z. M z \\ &= M \\ \pi_2 \circ \langle M, N \rangle &= N \end{aligned}$$

Habiendo comprobado que conmuta, resta confirmar que $\langle M, N \rangle$ es el único término (módulo la igualdad que se definió) que hace conmutar el diagrama. Sea $X \xrightarrow{h} A \times B$ tal que $M = \pi_1 \circ h$ y $N = \pi_2 \circ h$,

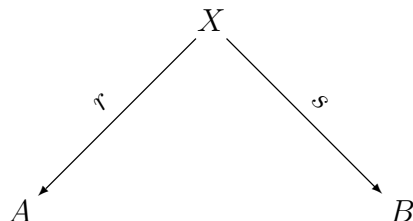
$$\begin{aligned} \langle M, N \rangle &= \langle \pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h \rangle \\ &= \lambda x. ((\pi_1 \circ h) x, (\pi_2 \circ h) x) \\ &= \lambda x. (\pi_1 (h x), \pi_2 (h x)) \\ &= \lambda x. ((\lambda y.fst(y)) (h x), (\lambda y.snd(y)) (h x)) \\ &= \lambda x. (fst(h x), snd(h x)) \\ &= \lambda x. h x \\ &= h \end{aligned}$$

Ejemplo 118. En la categoría **Rel**, el producto entre A y B es en realidad la unión disjunta $A+B = \{(i, x) \mid (i = 1 \wedge x \in A) \vee (i = 2 \wedge x \in B)\}$ junto con las “proyecciones”

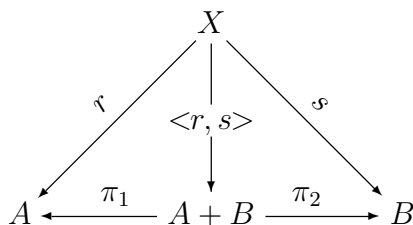
$\pi_1 = \{((1, a), a) \mid a \in A\}$ y $\pi_2 = \{((2, b), b) \mid b \in B\}$. En efecto, se obtiene el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A + B \xrightarrow{\pi_2} B$$

Resta ver que este diagrama satisface la propiedad universal correspondiente al producto. Sean



se define $\langle r, s \rangle = \{(x, (1, a)) \mid (x, a) \in r\} \cup \{(x, (2, b)) \mid (x, b) \in s\}$, se puede comprobar que el diagrama



conmuta.

Ejercicio 119. Demostrar que $\langle r, s \rangle$ es la única flecha que hace conmutar el diagrama.

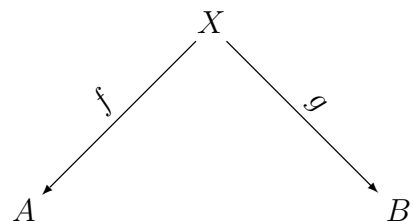
Ejercicio 120. ¿Tiene productos finitos la categoría **Pfn**? Justificar.

Ejemplo 121. La categoría **Set*** tiene por objetos pares de la forma (a, A) donde A es un conjunto y $a \in A$. Una flecha $(a, A) \xrightarrow{f} (b, B)$ es una función de A en B que satisface que $f(a) = b$.

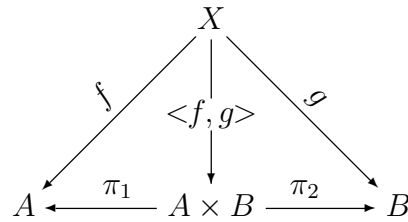
Ejercicio 122. Comprobar que **Set*** es una categoría. ¿Cuándo dos objetos son isomorfos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto terminal? ¿Tiene productos binarios?

Definición de producto utilizando hom-sets. En este segmento trabajamos con categorías localmente pequeñas (para garantizar que los hom-sets involucrados sean conjuntos).

La propiedad universal del producto dice que para todo diagrama



existe una única flecha $\langle f, g \rangle$ tal que



conmuta. Esto sugiere la siguiente definición de la función μ_X de $\text{Hom}(X, A) \times \text{Hom}(X, B)$ en $\text{Hom}(X, A \times B)$

$$\mu_X((f, g)) = \langle f, g \rangle$$

Observemos que si $\mu_X((f, g)) = \mu_X((f', g'))$, entonces

$$\begin{aligned}
 f &= \pi_1 \circ \langle f, g \rangle \\
 &= \pi_1 \circ \mu_X((f, g)) \\
 &= \pi_1 \circ \mu_X((f', g')) \\
 &= \pi_1 \circ \langle f', g' \rangle \\
 &= f'
 \end{aligned}$$

y de la misma forma $g = g'$. Esto prueba que μ_X es inyectiva. También es suryectiva ya que dada la flecha $X \xrightarrow{h} A \times B$,

$$\begin{aligned}
 h &= 1_{A \times B} \circ h \\
 &= \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ h \\
 &= \langle \pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h \rangle \\
 &= \mu_X((\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h))
 \end{aligned}$$

Por lo tanto μ_X es una biyección, su inversa es la función ν_X de $\text{Hom}(X, A \times B)$ en $\text{Hom}(X, A) \times \text{Hom}(X, B)$ definida por

$$\nu_X(h) = (\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)$$

Ejercicio 123. Asumiendo que $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B , comprobar que ν_X es la inversa de μ_X .

Para definir μ_X es necesario saber que $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B , para que $\langle f, g \rangle$ tenga sentido. En cambio, la definición de ν_X es elemental, requiere sólo que $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ sea un diagrama para que las composiciones $\pi_1 \circ h$ y $\pi_2 \circ h$ sean válidas.

Prop 124. Esto permite una definición alternativa de producto: $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B si para todo objeto X , ν_X es una biyección entre $\text{Hom}(X, A \times B)$ en $\text{Hom}(X, A) \times \text{Hom}(X, B)$.

En efecto, ya hemos comprobado que si el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B , ν_X es biyectiva. El recíproco se demuestra observando que la suryectividad de ν_X implica la existencia de la flecha de X a $A \times B$ que hace conmutar el diagrama, mientras que la inyectividad de ν_X implica la unicidad de una tal flecha.

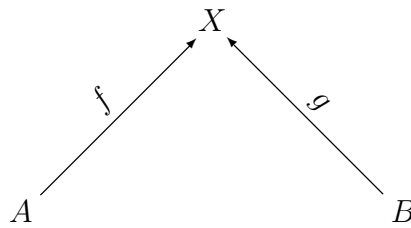
Ejercicio 125. Comprobar que si ν_X es biyectiva para todo objeto X , entonces el diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ es un producto entre A y B .

Coproducto. El principio de dualidad nos dice que hay una definición dual a la de producto:

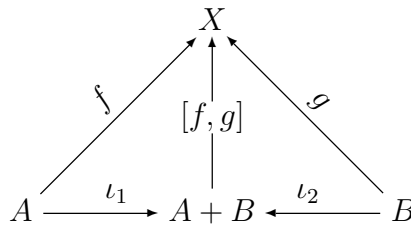
Definición 126. En una categoría \mathbf{C} , el diagrama

$$A \xrightarrow{\iota_1} A + B \xleftarrow{\iota_2} B$$

es un **coproducto** de los objetos A y B si satisface la siguiente propiedad universal: para todo diagrama de la forma



existe una única flecha $C \xrightarrow{[f, g]} X$ tal que el diagrama



conmuta.

Ejercicio 127. Demostrar que si el coproducto entre A y B existe, entonces es único salvo isomorfismo.

Ejercicio 128. ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Set**?

Ejercicio 129. Sea P un preorden visto como categoría. ¿Qué define el coproducto?

Ejercicio 130. ¿Es el coproducto asociativo? ¿Cuál es su elemento neutro?

Ejercicio 131. ¿Qué ecuaciones pueden deducirse utilizando los operadores $[_, _]$ y las flechas ι_1 y ι_2 ?

Ejercicio 132. Extender $\lambda \rightarrow$ con tipos, expresiones y ecuaciones para que tenga coproductos.

Ejercicio 133. ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Rel**?

Ejercicio 134. ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Pfn**?

Ejercicio 135. ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Set***?

Ejercicio 136. A la luz de la proposición 124, ¿qué definición alternativa puede dar del coproducto entre dos objetos?