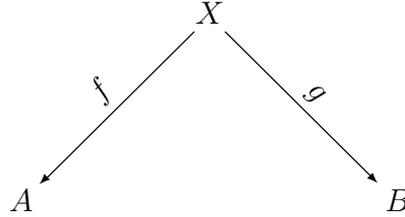


## (QUINTA CLASE: EJEMPLOS DE PRODUCTO. COPRODUCTO)

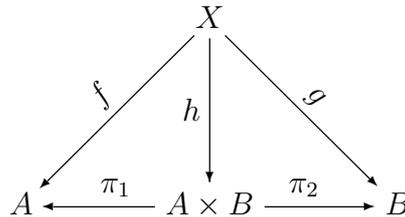
Recordemos que se dijo que el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

es un **producto** de los objetos  $A$  y  $B$  si para todo diagrama de la forma



existe una única flecha  $X \xrightarrow{h} A \times B$  tal que el diagrama



Propiedad como la que debe cumplir el diagrama  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  para ser un producto (“para todo diagrama . . . existe . . .”) se llaman **propiedades universales**. El uso de propiedades universales como ésta es habitual en teoría de categorías.

También es conveniente notar que el producto no es sólo el objeto  $A \times B$  sino el diagrama  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ . Para un mismo objeto  $A \times B$  podría haber varios diagramas como ése que satisfagan la propiedad universal. Si se menciona sólo el objeto  $A \times B$  (como a veces se hace), puede haber ambigüedad. En cambio si se habla del par de flechas  $\pi_1$  y  $\pi_2$  no hay ambigüedad posible dado que cada una de ellas tiene asignado un dominio y un codominio, por lo que se puede recuperar el diagrama (siempre que  $\text{dom}(\pi_1) = \text{dom}(\pi_2)$ ).

Podemos comprobar las afirmaciones que quedaron como ejercicios la clase pasada: que en una categoría con objeto terminal  $1 \times A \cong A$  y que en una categoría con productos binarios  $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ .

Del primer resultado podemos inferir que la categoría **1** tiene todos los productos finitos. ¿Qué podemos decir de la categoría **2**?

A continuación, extendemos la definición de  $\lambda \rightarrow$  del ejemplo 22 con tipos y términos para pares:

**Ejemplo 117.** *Ahora los tipos incluyen productos*

$$A, B ::= \text{ciertos tipos básicos} \mid A \longrightarrow B \mid A \times B \mid \dots$$

*y los términos incluyen pares y proyecciones*

$$M, N ::= c \mid v \mid M N \mid \lambda v. M \mid (M, N) \mid \text{fst}(M) \mid \text{snd}(M) \mid \dots$$

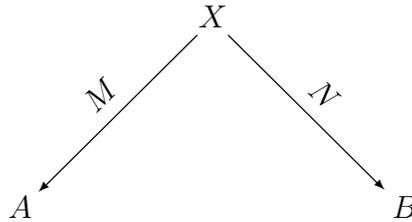
Además de las ecuaciones  $(\lambda x. b) a = b[a/x]$  (regla  $\beta$ ),  $\lambda x. a \ x = a$  si  $x$  no está libre en  $a$  (regla  $\eta$ ), y renombre de variables ligadas, ahora se satisfacen también  $\text{fst}((a, b)) = a$ ,

$snd((a, b)) = b$  y  $(fst(a), snd(a)) = a$ , todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.

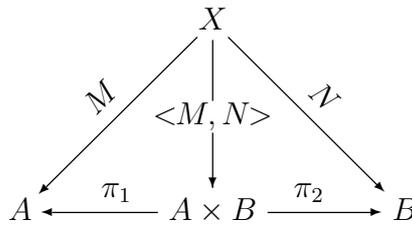
Como  $\lambda y.fst(y)$  tiene tipo  $A \times B \rightarrow A$  y  $\lambda y.snd(y)$  tiene tipo  $A \times B \rightarrow B$ , si se define  $\pi_1 = \lambda y.fst(y)$  y  $\pi_2 = \lambda y.snd(y)$  se obtiene el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

Ahora, dado un tipo  $X$  y un par de términos cerrados  $M$  y  $N$  de tipo  $X \rightarrow A$  y  $X \rightarrow B$  respectivamente, es decir, dado el diagrama



se define  $\langle M, N \rangle = \lambda x.(M x, N x)$ , que también es cerrado y tiene tipo  $X \rightarrow A \times B$ . Tiene sentido preguntarse si el diagrama



conmuta:

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \langle M, N \rangle &= \lambda z. \pi_1 (\langle M, N \rangle z) \\ &= \lambda z. (\lambda y.fst(y)) ((\lambda x.(M x, N x)) z) \\ &= \lambda z. (\lambda y.fst(y)) (M z, N z) \\ &= \lambda z. fst((M z, N z)) \\ &= \lambda z. M z \\ &= M \\ \pi_2 \circ \langle M, N \rangle &= N \end{aligned}$$

Habiendo comprobado que conmuta, resta confirmar que  $\langle M, N \rangle$  es el único término (módulo la igualdad que se definió) que hace conmutar el diagrama. Sea  $X \xrightarrow{h} A \times B$  tal que  $M = \pi_1 \circ h$  y  $N = \pi_2 \circ h$ ,

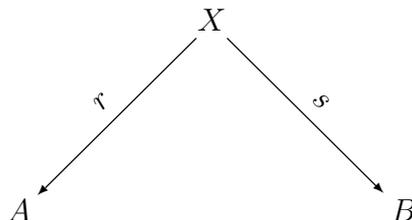
$$\begin{aligned} \langle M, N \rangle &= \langle \pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h \rangle \\ &= \lambda x. ((\pi_1 \circ h) x, (\pi_2 \circ h) x) \\ &= \lambda x. (\pi_1 (h x), \pi_2 (h x)) \\ &= \lambda x. ((\lambda y.fst(y)) (h x), (\lambda y.snd(y)) (h x)) \\ &= \lambda x. (fst(h x), snd(h x)) \\ &= \lambda x. h x \\ &= h \end{aligned}$$

**Ejemplo 118.** En la categoría **Rel**, el producto entre  $A$  y  $B$  es en realidad la unión disjunta  $A+B = \{(i, x) \mid (i = 1 \wedge x \in A) \vee (i = 2 \wedge x \in B)\}$  junto con las “proyecciones”

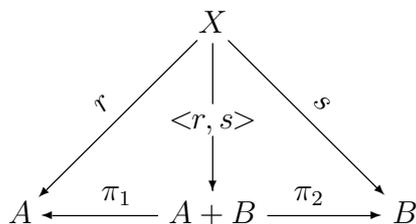
$\pi_1 = \{((1, a), a) \mid a \in A\}$  y  $\pi_2 = \{((2, b), b) \mid b \in B\}$ . En efecto, se obtiene el diagrama

$$A \xleftarrow{\pi_1} A + B \xrightarrow{\pi_2} B$$

Resta ver que este diagrama satisface la propiedad universal correspondiente al producto. Sean



se define  $\langle r, s \rangle = \{(x, (1, a)) \mid (x, a) \in r\} \cup \{(x, (2, b)) \mid (x, b) \in s\}$ , se puede comprobar que el diagrama



conmuta.

**Ejercicio 119.** Demostrar que  $\langle r, s \rangle$  es la única flecha que hace conmutar el diagrama.

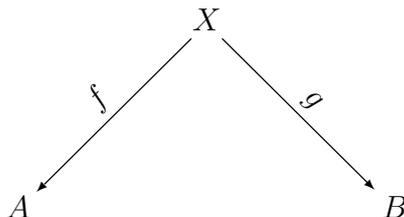
**Ejercicio 120.** ¿Tiene productos finitos la categoría **Pfn**? Justificar.

**Ejemplo 121.** La categoría **Set\*** tiene por objetos pares de la forma  $(a, A)$  donde  $A$  es un conjunto y  $a \in A$ . Una flecha  $(a, A) \xrightarrow{f} (b, B)$  es una función de  $A$  en  $B$  que satisface que  $f(a) = b$ .

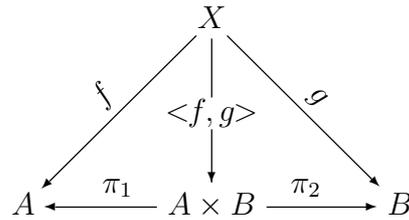
**Ejercicio 122.** Comprobar que **Set\*** es una categoría. ¿Cuándo dos objetos son isomorfos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto terminal? ¿Tiene productos binarios?

*Definición de producto utilizando hom-sets.* En este segmento trabajamos con categorías localmente pequeñas (para garantizar que los hom-sets involucrados sean conjuntos).

La propiedad universal del producto dice que para todo diagrama



existe una única flecha  $\langle f, g \rangle$  tal que



conmuta. Esto sugiere la siguiente definición de la función  $\mu_X$  de  $\text{Hom}(X, A) \times \text{Hom}(X, B)$  en  $\text{Hom}(X, A \times B)$

$$\mu_X((f, g)) = \langle f, g \rangle$$

Observemos que si  $\mu_X((f, g)) = \mu_X((f', g'))$ , entonces

$$\begin{aligned}
 f &= \pi_1 \circ \langle f, g \rangle \\
 &= \pi_1 \circ \mu_X((f, g)) \\
 &= \pi_1 \circ \mu_X((f', g')) \\
 &= \pi_1 \circ \langle f', g' \rangle \\
 &= f'
 \end{aligned}$$

y de la misma forma  $g = g'$ . Esto prueba que  $\mu_X$  es inyectiva. También es suryectiva ya que dada la flecha  $X \xrightarrow{h} A \times B$ ,

$$\begin{aligned}
 h &= 1_{A \times B} \circ h \\
 &= \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ h \\
 &= \langle \pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h \rangle \\
 &= \mu_X((\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h))
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mu_X$  es una biyección, su inversa es la función  $\nu_X$  de  $\text{Hom}(X, A \times B)$  en  $\text{Hom}(X, A) \times \text{Hom}(X, B)$  definida por

$$\nu_X(h) = (\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)$$

**Ejercicio 123.** Asumiendo que  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  es un producto entre  $A$  y  $B$ , comprobar que  $\nu_X$  es la inversa de  $\mu_X$ .

Para definir  $\mu_X$  es necesario saber que  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  es un producto entre  $A$  y  $B$ , para que  $\langle f, g \rangle$  tenga sentido. En cambio, la definición de  $\nu_X$  es elemental, requiere sólo que  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  sea un diagrama para que las composiciones  $\pi_1 \circ h$  y  $\pi_2 \circ h$  sean válidas.

**Prop 124.** Esto permite una definición alternativa de producto:  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  es un producto entre  $A$  y  $B$  si para todo objeto  $X$ ,  $\nu_X$  es una biyección entre  $\text{Hom}(X, A \times B)$  en  $\text{Hom}(X, A) \times \text{Hom}(X, B)$ .

En efecto, ya hemos comprobado que si el diagrama  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  es un producto entre  $A$  y  $B$ ,  $\nu_X$  es biyectiva. El recíproco se demuestra observando que la suryectividad de  $\nu_X$  implica la existencia de la flecha de  $X$  a  $A \times B$  que hace conmutar el diagrama, mientras que la inyectividad de  $\nu_X$  implica la unicidad de una tal flecha.

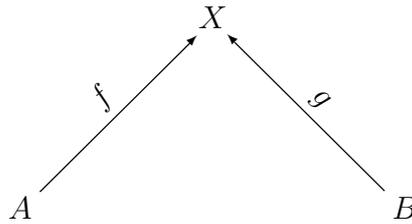
**Ejercicio 125.** Comprobar que si  $\nu_X$  es biyectiva para todo objeto  $X$ , entonces el diagrama  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  es un producto entre  $A$  y  $B$ .

**Coproducto.** El principio de dualidad nos dice que hay una definición dual a la de producto:

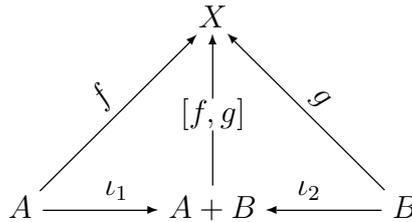
**Definición 126.** En una categoría  $\mathbf{C}$ , el diagrama

$$A \xrightarrow{\iota_1} A + B \xleftarrow{\iota_2} B$$

es un **coproducto** de los objetos  $A$  y  $B$  si satisface la siguiente propiedad universal: para todo diagrama de la forma



existe una única flecha  $C \xrightarrow{[f, g]} X$  tal que el diagrama



conmuta.

**Ejercicio 127.** Demostrar que si el coproducto entre  $A$  y  $B$  existe, entonces es único salvo isomorfismo.

**Ejercicio 128.** ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Set**?

**Ejercicio 129.** Sea  $P$  un preorden visto como categoría. ¿Qué define el coproducto?

**Ejercicio 130.** ¿Es el coproducto asociativo? ¿Cuál es su elemento neutro?

**Ejercicio 131.** ¿Qué ecuaciones pueden deducirse utilizando los operadores  $[\_, \_]$  y las flechas  $\iota_1$  y  $\iota_2$ ?

**Ejercicio 132.** Extender  $\lambda \rightarrow$  con tipos, expresiones y ecuaciones para que tenga coproductos.

**Ejercicio 133.** ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Rel**?

**Ejercicio 134.** ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Pfn**?

**Ejercicio 135.** ¿Cuál es el coproducto en la categoría **Set\***?

**Ejercicio 136.** A la luz de la proposición 124, ¿qué definición alternativa puede dar del coproducto entre dos objetos?