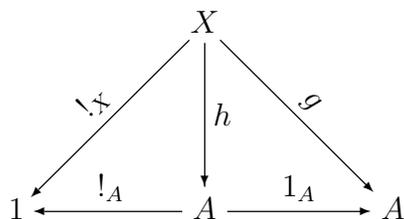


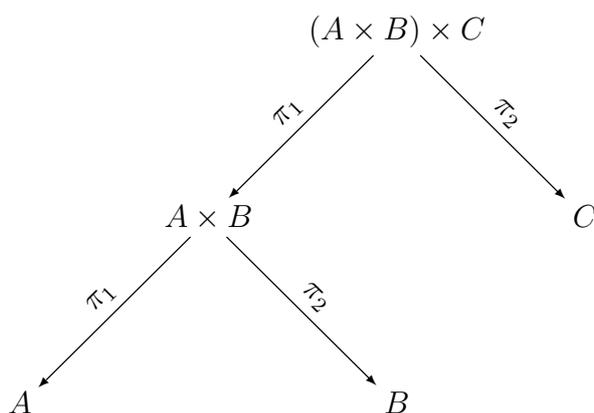
(SEXTA CLASE: MONO, EPI Y ECUALIZADORES)

La clase pasada demostramos (ejercicio 107) que $1 \times A \cong A$. En efecto, $1 \xleftarrow{!_A} A \xrightarrow{1_A} A$; y para todo $1 \xleftarrow{!_X} X \xrightarrow{g} A$ el diagrama

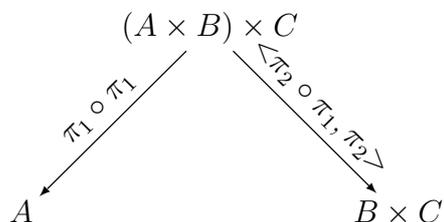


conmuta sii $h = g$: el triángulo izquierdo conmuta independientemente de h (hay una única flecha de X en 1 , y el derecho conmuta sii $g = 1_A \circ h = h$).

Resolvamos el ejercicio 109 que pedía demostrar que $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$. Conocemos las siguientes flechas:



de donde podemos concluir que $(A \times B) \times C \xrightarrow{\langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle} B \times C$. Con esta nueva flecha, obtenemos el diagrama



de donde resulta $(A \times B) \times C \xrightarrow{\langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle} A \times (B \times C)$. En forma análoga se obtiene $A \times (B \times C) \xrightarrow{\langle \langle \pi_1, \pi_1 \circ \pi_2 \rangle, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle} (A \times B) \times C$.

Para comprobar que $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$, basta con asegurarse que las flechas $h = \langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle$ y $h' = \langle \langle \pi_1, \pi_1 \circ \pi_2 \rangle, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle$ son inversas mutuas:

$$\begin{aligned}
 h \circ h' &= \langle \pi_1 \circ \pi_1 \circ h', \langle \pi_2 \circ \pi_1 \circ h', \pi_2 \circ h' \rangle \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \langle \pi_1 \circ \pi_2, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ \pi_2 \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \mathbf{1}_{B \times C} \circ \pi_2 \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \\
 &= \mathbf{1}_{A \times (B \times C)} \\
 h' \circ h &= \mathbf{1}_{(A \times B) \times C}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 137. Definir la categoría \mathbf{Set}^* , (ver los apuntes de la clase pasada). Identificar objeto inicial y terminal (relacionar con ejercicio sobre $\mathbb{Z}0 \times A \cong 0?$), productos y coproductos.

Ejemplo 138. En $\lambda \rightarrow$, agregamos tipos para el coproducto

$$A, B ::= \dots \mid A + B \mid \dots$$

y los términos incluyen inyecciones y análisis por caso

$$M, N ::= \dots \mid \mathit{inl}(M) \mid \mathit{inr}(M) \mid \mathbf{case} M \mathbf{of} (N, N') \mid \dots$$

Además de las ecuaciones enumeradas en el ejemplo 117, agregamos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{case} \mathit{inl}(M) \mathbf{of} (N, N') &= N M \\
 \mathbf{case} \mathit{inr}(M) \mathbf{of} (N, N') &= N' M \\
 \mathbf{case} M \mathbf{of} (\lambda x. \mathit{inl}(x), \lambda y. \mathit{inr}(y)) &= M
 \end{aligned}$$

todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.

Queda como ejercicio definir ι_1, ι_2 y $[M, N]$ para tener el coproducto en la categoría $\lambda \rightarrow$.

Monos y epis. Dada la función $f : A \rightarrow B$, se dice que

- f es inyectiva, si para todo $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.
- f es suryectiva, si para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

En términos categóricos, se generalizan estos conceptos, como es habitual sin apelar a los elementos de los conjuntos ya que estas son particularidades solo de las categorías concretas.

Definición 139. En una categoría \mathbf{C} , dada una flecha $A \xrightarrow{f} B$ se dice que

- f es **mono**, **monic** o **monomorfismo**, si para todo $C \xrightarrow{g} A$ y $C \xrightarrow{h} A$, $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$,

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

- f es *epi*, *epic* o *epimorfismo*, si para todo $B \xrightarrow{g} C$ y $B \xrightarrow{h} C$, $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$.

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

Ejemplo 140. En la categoría **Set**, f es mono sii f es inyectiva, y f es epi sii f es suryectiva.

Ejemplo 141. En muchas categorías concretas (**Mon**, **Grp**, **Poset**, etc.) la f es mono sii f es (un homomorfismo) inyectivo.

Ejemplo 142. En general, en esas categorías un epimorfismo no necesariamente es suryectivo. En **Mon**, por ejemplo, una flecha $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{g} (M, \cdot, e)$ queda unívocamente determinada por el valor de $g(1)$. En efecto, $g(0)$ debe ser e , si $k > 0$,

$g(k) = g(\overbrace{1 + \dots + 1}^k) = \overbrace{g(1) \cdot \dots \cdot g(1)}^k$ y $e = g(0) = g(k + (-k)) = g(k) \cdot g(-k)$ y también $e = g(-k) \cdot g(k)$ de donde se obtiene que $g(-k)$ es el único inverso de $g(k)$ (sí, que g sea homomorfismo de monoide implica que la imagen de g es en realidad un grupo ya que \mathbb{Z} lo es).

Se vió que $g(1)$ determina unívocamente todo g . Entonces si $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{h} (M, \cdot, e)$ satisface $g(1) = h(1)$, se obtiene $g = h$.

Ahora tomamos $(\mathbb{N}, +, 0) \xrightarrow{\iota} (\mathbb{Z}, +, 0)$ (donde ι es la inyección de \mathbb{N} en \mathbb{Z}), si $g \circ \iota = h \circ \iota$, entonces $g(1) = g(\iota(1)) = h(\iota(1)) = h(1)$, luego $g = h$. Sin embargo ι no es suryectiva.

Ejemplo 143. Si $A \xrightarrow{f} B$ es iso, entonces es mono y epi. En efecto, sea

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} B$$

tal que $f \circ g = f \circ h$. Se deduce que $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$, luego f es mono. Análogamente, sea

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

tal que $g \circ f = h \circ f$. Se deduce que $g = g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f \circ f^{-1} = h$, luego f es epi.

En **Set**, f es iso sii es mono y epi. Pero tal equivalencia no vale en general:

Ejercicio 144. Comprobar que la inversa del ejemplo anterior no vale: f puede ser mono y epi, y sin embargo no ser iso.

Ecualizadores.

Definición 145. Dado un diagrama de la forma

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

en la categoría \mathbf{C} , un **ecualizador** de f y g consiste de una flecha $E \xrightarrow{e} A$ universal tal que $f \circ e = g \circ e$. Es decir, tal que el diagrama

$$E \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

conmuta¹, y tal que para todo otro diagrama de la forma

$$X \xrightarrow{x} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

que conmute, existe una única flecha $X \xrightarrow{u} E$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow u & & \nearrow x & & \\ X & & & & \end{array}$$

conmuta.

Ejemplo 146. En \mathbf{Set} , el ecualizador es $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ con la inyección $E \xrightarrow{\iota} A$ (definida por $\iota(a) = a$ para todo $a \in E$). En efecto, el diagrama

$$E \xrightarrow{\iota} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

conmuta ($(f \circ \iota)(a) = f(\iota(a)) = f(a) = g(a) = g(\iota(a)) = (g \circ \iota)(a)$), y si

$$X \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

también conmuta, entonces $\text{Im}(h) \subseteq E$, ya que para todo $a \in \text{Im}(h)$, existe $x \in X$ tal que $a = h(x)$ y como $f \circ h = g \circ h$, $f(a) = f(h(x)) = (f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) =$

¹Cuando se afirma que un diagrama con flechas paralelas, como en este caso f y g , conmuta, NO se afirma que $f = g$.

$g(a)$. Luego, podemos definir $X \xrightarrow{u} E$ por $u(x) = h(x)$, claramente

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\iota} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow u & & \nearrow h & & \\ X & & & & \end{array}$$

conmuta ($(\iota \circ u)(x) = \iota(u(x)) = u(x) = h(x)$). Es más, u es única ya que se debe definir igual a h para que el diagrama conmute.

Ejemplo 147. El ecualizador es mono. En efecto, sea

$$E \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

un ecualizador entre f y g , y sea

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xrightarrow{y} \end{array} E \xrightarrow{e} A$$

conmutativo. Denotamos $z = e \circ x = e \circ y$. Debemos comprobar que $x = y$. Combinamos los dos diagramas obteniendo

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow x & \uparrow y & \nearrow \iota & & \\ Z & & & & \end{array}$$

cuya conmutatividad implica que $f \circ z = f \circ e \circ x = g \circ e \circ x = g \circ z$. Por ser e ecualizador, existe una única flecha $Z \xrightarrow{u} E$ tal que $e \circ u = z$. Por lo tanto, las dos flechas que tenemos que lo satisfacen (x e y) deben ser iguales. Luego, $x = y$.

Ejercicio 148. Dado un subconjunto $E \subseteq A$, determinar un conjunto B y dos funciones $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ tales que $E \xrightarrow{\iota} A$ sea un ecualizador de f y g .

Ejercicio 149. Comprobar que el ecualizador de dos flechas, si existe, es único salvo isomorfismo.

Ejercicio 150. Intente identificar ecualizadores en las categorías vistas (por ejemplo, \mathbf{Set}^* , \mathbf{Rel} , \mathbf{Pfn} , un preorden P visto como categoría, etc.).