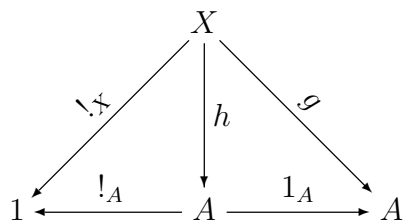


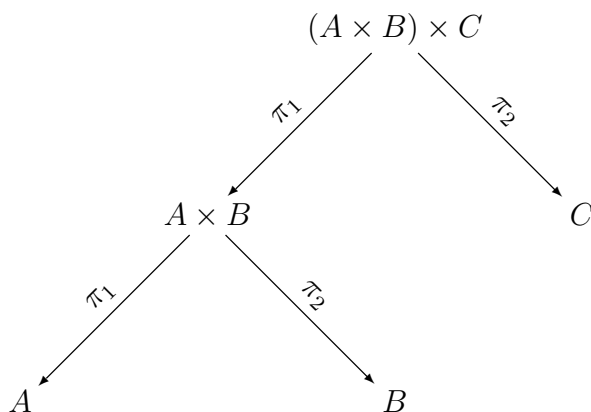
## (SEXTA CLASE: MONO, EPI Y ECUALIZADORES)

La clase pasada demostramos (ejercicio 107) que  $1 \times A \cong A$ . En efecto,  $1 \xleftarrow{!_A} A \xrightarrow{1_A} A$ ; y para todo  $1 \xleftarrow{!_X} X \xrightarrow{g} A$  el diagrama

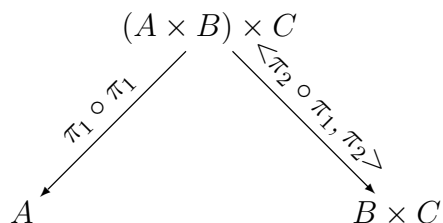


conmuta sii  $h = g$ : el triángulo izquierdo conmuta independientemente de  $h$  (hay una única flecha de  $X$  en  $1$ , y el derecho conmuta sii  $g = 1_A \circ h = h$ ).

Resolvamos el ejercicio 109 que pedía demostrar que  $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ . Conocemos las siguientes flechas:



de donde podemos concluir que  $(A \times B) \times C \xrightarrow{\langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle} B \times C$ . Con esta nueva flecha, obtenemos el diagrama



de donde resulta  $(A \times B) \times C \xrightarrow{\langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle} A \times (B \times C)$ . En forma análoga se obtiene  $A \times (B \times C) \xrightarrow{\langle \langle \pi_1, \pi_1 \circ \pi_2 \rangle, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle} (A \times B) \times C$ .

Para comprobar que  $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ , basta con asegurarse que las flechas  $h = \langle \pi_1 \circ \pi_1, \langle \pi_2 \circ \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle$  y  $h' = \langle \langle \pi_1, \pi_1 \circ \pi_2 \rangle, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle$  son inversas mutuas:

$$\begin{aligned}
 h \circ h' &= \langle \pi_1 \circ \pi_1 \circ h', \langle \pi_2 \circ \pi_1 \circ h', \pi_2 \circ h' \rangle \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \langle \pi_1 \circ \pi_2, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ \pi_2 \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \mathbf{1}_{B \times C} \circ \pi_2 \rangle \\
 &= \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \\
 &= \mathbf{1}_{A \times (B \times C)} \\
 h' \circ h &= \mathbf{1}_{(A \times B) \times C}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 137.** Definir la categoría  $\mathbf{Set}^*$ , (ver los apuntes de la clase pasada). Identificar objeto inicial y terminal (relacionar con ejercicio sobre  $\mathbb{Z}0 \times A \cong 0?$ ), productos y coproductos.

**Ejemplo 138.** En  $\lambda \rightarrow$ , agregamos tipos para el coproducto

$$A, B ::= \dots \mid A + B \mid \dots$$

y los términos incluyen inyecciones y análisis por caso

$$M, N ::= \dots \mid \mathit{inl}(M) \mid \mathit{inr}(M) \mid \mathbf{case} M \mathbf{of} (N, N') \mid \dots$$

Además de las ecuaciones enumeradas en el ejemplo 117, agregamos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{case} \mathit{inl}(M) \mathbf{of} (N, N') &= N M \\
 \mathbf{case} \mathit{inr}(M) \mathbf{of} (N, N') &= N' M \\
 \mathbf{case} M \mathbf{of} (\lambda x. \mathit{inl}(x), \lambda y. \mathit{inr}(y)) &= M
 \end{aligned}$$

todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.

Queda como ejercicio definir  $\iota_1, \iota_2$  y  $[M, N]$  para tener el coproducto en la categoría  $\lambda \rightarrow$ .

**Monos y epis.** Dada la función  $f : A \rightarrow B$ , se dice que

- $f$  es inyectiva, si para todo  $a, a' \in A$ ,  $f(a) = f(a')$  implica que  $a = a'$ .
- $f$  es suryectiva, si para todo  $b \in B$ , existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .

En términos categóricos, se generalizan estos conceptos, como es habitual sin apelar a los elementos de los conjuntos ya que estas son particularidades solo de las categorías concretas.

**Definición 139.** En una categoría  $\mathbf{C}$ , dada una flecha  $A \xrightarrow{f} B$  se dice que

- $f$  es **mono**, **monic** o **monomorfismo**, si para todo  $C \xrightarrow{g} A$  y  $C \xrightarrow{h} A$ ,  $f \circ g = f \circ h$  implica que  $g = h$ ,

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

- $f$  es *epi*, *epic* o *epimorfismo*, si para todo  $B \xrightarrow{g} C$  y  $B \xrightarrow{h} C$ ,  $g \circ f = h \circ f$  implica que  $g = h$ .

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

**Ejemplo 140.** En la categoría **Set**,  $f$  es mono sii  $f$  es inyectiva, y  $f$  es epi sii  $f$  es suryectiva.

**Ejemplo 141.** En muchas categorías concretas (**Mon**, **Grp**, **Poset**, etc.) la  $f$  es mono sii  $f$  es (un homomorfismo) inyectivo.

**Ejemplo 142.** En general, en esas categorías un epimorfismo no necesariamente es suryectivo. En **Mon**, por ejemplo, una flecha  $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{g} (M, \cdot, e)$  queda unívocamente determinada por el valor de  $g(1)$ . En efecto,  $g(0)$  debe ser  $e$ , si  $k > 0$ ,

$g(k) = g(\overbrace{1 + \dots + 1}^k) = \overbrace{g(1) \cdot \dots \cdot g(1)}^k$  y  $e = g(0) = g(k + (-k)) = g(k) \cdot g(-k)$  y también  $e = g(-k) \cdot g(k)$  de donde se obtiene que  $g(-k)$  es el único inverso de  $g(k)$  (sí, que  $g$  sea homomorfismo de monoide implica que la imagen de  $g$  es en realidad un grupo ya que  $\mathbb{Z}$  lo es).

Se vió que  $g(1)$  determina unívocamente todo  $g$ . Entonces si  $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{h} (M, \cdot, e)$  satisface  $g(1) = h(1)$ , se obtiene  $g = h$ .

Ahora tomamos  $(\mathbb{N}, +, 0) \xrightarrow{\iota} (\mathbb{Z}, +, 0)$  (donde  $\iota$  es la inyección de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{Z}$ ), si  $g \circ \iota = h \circ \iota$ , entonces  $g(1) = g(\iota(1)) = h(\iota(1)) = h(1)$ , luego  $g = h$ . Sin embargo  $\iota$  no es suryectiva.

**Ejemplo 143.** Si  $A \xrightarrow{f} B$  es iso, entonces es mono y epi. En efecto, sea

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} B$$

tal que  $f \circ g = f \circ h$ . Se deduce que  $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$ , luego  $f$  es mono. Análogamente, sea

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

tal que  $g \circ f = h \circ f$ . Se deduce que  $g = g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f \circ f^{-1} = h$ , luego  $f$  es epi.

En **Set**,  $f$  es iso sii es mono y epi. Pero tal equivalencia no vale en general:

**Ejercicio 144.** Comprobar que la inversa del ejemplo anterior no vale:  $f$  puede ser mono y epi, y sin embargo no ser iso.

**Ecualizadores.**

**Definición 145.** Dado un diagrama de la forma

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

en la categoría  $\mathbf{C}$ , un **ecualizador** de  $f$  y  $g$  consiste de una flecha  $E \xrightarrow{e} A$  universal tal que  $f \circ e = g \circ e$ . Es decir, tal que el diagrama

$$E \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

conmuta<sup>1</sup>, y tal que para todo otro diagrama de la forma

$$X \xrightarrow{x} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

que conmute, existe una única flecha  $X \xrightarrow{u} E$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow u & & \nearrow x & & \\ X & & & & \end{array}$$

conmuta.

**Ejemplo 146.** En  $\mathbf{Set}$ , el ecualizador es  $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$  con la inyección  $E \xrightarrow{\iota} A$  (definida por  $\iota(a) = a$  para todo  $a \in E$ ). En efecto, el diagrama

$$E \xrightarrow{\iota} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

conmuta ( $(f \circ \iota)(a) = f(\iota(a)) = f(a) = g(a) = g(\iota(a)) = (g \circ \iota)(a)$ ), y si

$$X \xrightarrow{h} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

también conmuta, entonces  $\text{Im}(h) \subseteq E$ , ya que para todo  $a \in \text{Im}(h)$ , existe  $x \in X$  tal que  $a = h(x)$  y como  $f \circ h = g \circ h$ ,  $f(a) = f(h(x)) = (f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) =$

<sup>1</sup>Cuando se afirma que un diagrama con flechas paralelas, como en este caso  $f$  y  $g$ , conmuta, NO se afirma que  $f = g$ .

$g(a)$ . Luego, podemos definir  $X \xrightarrow{u} E$  por  $u(x) = h(x)$ , claramente

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\iota} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow u & & \nearrow h & & \\ X & & & & \end{array}$$

conmuta ( $(\iota \circ u)(x) = \iota(u(x)) = u(x) = h(x)$ ). Es más,  $u$  es única ya que se debe definir igual a  $h$  para que el diagrama conmute.

**Ejemplo 147.** El ecualizador es mono. En efecto, sea

$$E \xrightarrow{e} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

un ecualizador entre  $f$  y  $g$ , y sea

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xrightarrow{y} \end{array} E \xrightarrow{e} A$$

conmutativo. Denotamos  $z = e \circ x = e \circ y$ . Debemos comprobar que  $x = y$ . Combinamos los dos diagramas obteniendo

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow x & \uparrow y & \nearrow \iota & & \\ Z & & & & \end{array}$$

cuya conmutatividad implica que  $f \circ z = f \circ e \circ x = g \circ e \circ x = g \circ z$ . Por ser  $e$  ecualizador, existe una única flecha  $Z \xrightarrow{u} E$  tal que  $e \circ u = z$ . Por lo tanto, las dos flechas que tenemos que lo satisfacen ( $x$  e  $y$ ) deben ser iguales. Luego,  $x = y$ .

**Ejercicio 148.** Dado un subconjunto  $E \subseteq A$ , determinar un conjunto  $B$  y dos funciones  $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$  tales que  $E \xrightarrow{\iota} A$  sea un ecualizador de  $f$  y  $g$ .

**Ejercicio 149.** Comprobar que el ecualizador de dos flechas, si existe, es único salvo isomorfismo.

**Ejercicio 150.** Intente identificar ecualizadores en las categorías vistas (por ejemplo,  $\mathbf{Set}^*$ ,  $\mathbf{Rel}$ ,  $\mathbf{Pfn}$ , un preorden  $P$  visto como categoría, etc.).