(Sexta clase: mono, epi y ecualizadores)

La clase pasada demostramos (ejercicio 107) que $1 \times A \cong A$. En efecto, $1 \xleftarrow{!_A} A \xrightarrow{1_A} A$; y para todo $1 \xleftarrow{!_X} X \xrightarrow{g} A$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "!_X"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
1 & A \arrow[l, "!_A"'] \arrow[r, "1_A"] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta sii $h = g$: el triángulo izquierdo conmuta independientemente de h (hay una única flecha de X en 1, y el derecho conmuta sii $g = 1_A \circ h = h$.

Resolvamos el ejercicio 109 que pedía demostrar que $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$. Conocemos las siguientes flechas:

$$\begin{tikzcd}
& & (A \times B) \times C \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
& A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & C \\
A & & B &
\end{tikzcd}$$

de donde podemos concluir que $(A \times B) \times C \xrightarrow{<\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>} B \times C$. Con esta nueva flecha, obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& (A \times B) \times C \arrow[dl, "\pi_1 \circ \pi_1"'] \arrow[dr, "<\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>"] & \\
A & & B \times C
\end{tikzcd}$$

de donde resulta $(A \times B) \times C \xrightarrow{<\pi_1 \circ \pi_1, <\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2>>} A \times (B \times C)$. En forma análoga se obtiene $A \times (B \times C) \xrightarrow{<<\pi_1, \pi_1 \circ \pi_2>, \pi_2 \circ \pi_2>} (A \times B) \times C$.

Para comprobar que $(A\times B)\times C \cong A\times(B\times C)$, basta con asegurarse que las flechas $h = {<}\pi_1\circ\pi_1, {<}\pi_2\circ\pi_1, \pi_2{>}{>}$ y $h' = {<}{<}\pi_1, \pi_1\circ\pi_2{>}, \pi_2\circ\pi_2{>}$ son inversas mutuas:

$$\begin{array}{rcl} h\circ h' & = & {<}\pi_1\circ\pi_1\circ h', {<}\pi_2\circ\pi_1\circ h', \pi_2\circ h'{>}{>} \\ & = & {<}\pi_1, {<}\pi_1\circ\pi_2, \pi_2\circ\pi_2{>}{>} \\ & = & {<}\pi_1, {<}\pi_1, \pi_2{>}\circ\pi_2{>} \\ & = & {<}\pi_1, 1_{B\times C}\circ\pi_2{>} \\ & = & {<}\pi_1, \pi_2{>} \\ & = & 1_{A\times(B\times C)} \\ h'\circ h & = & 1_{(A\times B)\times C} \end{array}$$

Ejemplo 137. *Definir la categoría* **Set**$*$*, (ver los apuntes de la clase pasada). Identificar objeto inicial y terminal (relacionar con ejercicio sobre ¿*$0\times A\cong 0$*?), productos y coproductos.*

Ejemplo 138. *En* $\lambda{\to}$*, agregamos tipos para el coproducto*

$$A, B \quad ::= \quad \ldots \mid A+B \mid \ldots$$

y los términos incluyen inyecciones y análisis por caso

$$M, N \quad ::= \quad \ldots \mid \mathit{inl}(M) \mid \mathit{inr}(M) \mid \textbf{case } M \textbf{ of } (N, N') \mid \ldots$$

Además de las ecuaciones enumeradas en el ejemplo 117, agregamos:

$$\begin{array}{rcl} \textbf{case } \mathit{inl}(M) \textbf{ of } (N, N') & = & N\ M \\ \textbf{case } \mathit{inr}(M) \textbf{ of } (N, N') & = & N'\ M \\ \textbf{case } M \textbf{ of } (\lambda x.\ \mathit{inl}(x), \lambda y.\ \mathit{inr}(y)) & = & M \end{array}$$

todas ellas ecuaciones entre términos de igual tipo.

Queda como ejercicio definir ι_1, ι_2 y $[M, N]$ para tener el coproducto en la categoría $\lambda{\to}$.

Monos y epis. Dada la función $f : A\to B$, se dice que

- f es inyectiva, si para todo $a, a'\in A$, $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.
- f es suryectiva, si para todo $b\in B$, existe $a\in A$ tal que $f(a) = b$.

En términos categóricos, se generalizan estos conceptos, como es habitual sin apelar a los elementos de los conjuntos ya que estas son particularidades solo de las categorías concretas.

Definición 139. *En una categoría* **C***, dada una flecha* $A\xrightarrow{f} B$ *se dice que*

- f *es* ***mono****,* ***monic*** *o* ***monomorfismo****, si para todo* $C\xrightarrow{g} A$ *y* $C\xrightarrow{h} A$*,* $f\circ g = f\circ h$ *implica que* $g = h$*,*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

- f *es* **epi, epic** *o* **epimorfismo**, *si para todo* $B \xrightarrow{g} C$ *y* $B \xrightarrow{h} C$, $g \circ f = h \circ f$ *implica que* $g = h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo 140. *En la categoría* **Set**, f *es mono sii* f *es inyectiva, y* f *es epi sii* f *es suryectiva.*

Ejemplo 141. *En muchas categorías concretas (***Mon**, **Grp**, **Poset**, *etc.) la* f *es mono sii* f *es (un homomorfismo) inyectivo.*

Ejemplo 142. *En general, en esas categorías un epimorfismo no necesariamente es suryectivo. En* **Mon**, *por ejemplo, una flecha* $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{g} (M, \cdot, e)$ *queda unívocamente determinada por el valor de* $g(1)$. *En efecto,* $g(0)$ *debe ser* e, *si* $k > 0$, $g(k) = g(\overbrace{1 + \ldots + 1}^{k}) = \overbrace{g(1) \cdot \ldots \cdot g(1)}^{k}$ *y* $e = g(0) = g(k + (-k)) = g(k) \cdot g(-k)$ *y también* $e = g(-k) \cdot g(k)$ *de donde se obtiene que* $g(-k)$ *es el único inverso de* $g(k)$ *(sí, que* g *sea homomorfismo de monoide implica que la imagen de* g *es en realidad un grupo ya que* $\mathbb{Z}$ *lo es).*

Se vió que $g(1)$ *determina unívocamente todo* g. *Entonces si* $(\mathbb{Z}, +, 0) \xrightarrow{h} (M, \cdot, e)$ *satisface* $g(1) = h(1)$, *se obtiene* $g = h$.

Ahora tomamos $(\mathbb{N}, +, 0) \xrightarrow{\iota} (\mathbb{Z}, +, 0)$ *(donde* ι *es la inyección de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{Z}$*), si* $g \circ \iota = h \circ \iota$, *entonces* $g(1) = g(\iota(1)) = h(\iota(1)) = h(1)$, *luego* $g = h$. *Sin embargo* ι *no es suryectiva.*

Ejemplo 143. *Si* $A \xrightarrow{f} B$ *es iso, entonces es mono y epi. En efecto, sea*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

tal que $f \circ g = f \circ h$. *Se deduce que* $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$, *luego* f *es mono. Análogamente, sea*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

tal que $g \circ f = h \circ f$. *Se deduce que* $g = g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f \circ f^{-1} = h$, *luego* f *es epi.*

En **Set**, f es iso sii es mono y epi. Pero tal equivalencia no vale en general:

Ejercicio 144. *Comprobar que la inversa del ejemplo anterior no vale:* f *puede ser mono y epi, y sin embargo no ser iso.*

Ecualizadores.

Definición 145. *Dado un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

en la categoría $\mathbf{C}$*, un* ***ecualizador*** *de* f *y* g *consiste de una flecha* $E \xrightarrow{e} A$ *universal tal que* $f \circ e = g \circ e$*. Es decir, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta[1]*, y tal que para todo otro diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[ur, "x"] & & \end{tikzcd}$$

que conmute, existe una única flecha $X \xrightarrow{u} E$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "x"] & & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 146. *En* **Set***, el ecualizador es* $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ *con la inyección* $E \xrightarrow{\iota} A$ *(definida por* $\iota(a) = a$ *para todo* $a \in E$*). En efecto, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta $((f \circ \iota)(a) = f(\iota(a)) = f(a) = g(a) = g(\iota(a)) = (g \circ \iota)(a))$*, y si*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$$

también conmuta, entonces $Im(h) \subseteq E$*, ya que para todo* $a \in Im(h)$*, existe* $x \in X$ *tal que* $a = h(x)$ *y como* $f \circ h = g \circ h$*,* $f(a) = f(h(x)) = (f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) =$

[1]Cuando se afirma que un diagrama con flechas paralelas, como en este caso f y g, conmuta, NO se afirma que $f = g$.

$g(a)$. Luego, podemos definir $X \xrightarrow{u} E$ por $u(x) = h(x)$, claramente

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta ($(\iota \circ u)(x) = \iota(u(x)) = u(x) = h(x)$). Es más, u es única ya que se debe definir igual a h para que el diagrama conmute.

Ejemplo 147. *El ecualizador es mono. En efecto, sea*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

un ecualizador entre f y g, y sea

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & E \arrow[r, "e"] & A
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Denotamos $z = e \circ x = e \circ y$. Debemos comprobar que $x = y$. Combinamos los dos diagramas obteniendo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
Z \arrow[u, shift left, "x"] \arrow[u, shift right, "y"'] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}$$

cuya conmutatividad implica que $f \circ z = f \circ e \circ x = g \circ e \circ x = g \circ z$. Por ser e ecualizador, existe una única flecha $Z \xrightarrow{u} E$ tal que $e \circ u = z$. Por lo tanto, las dos flechas que tenemos que lo satisfacen (x e y) deben ser iguales. Luego, $x = y$.

Ejercicio 148. *Dado un subconjunto $E \subseteq A$, determinar un conjunto B y dos funciones $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ tales que $E \xrightarrow{\iota} A$ sea un ecualizador de f y g.*

Ejercicio 149. *Comprobar que el ecualizador de dos flechas, si existe, es único salvo isomorfismo.*

Ejercicio 150. *Intente identificar ecualizadores en las categorías vistas (por ejemplo,* **Set**$*$, **Rel**, **Pfn**, *un preorden P visto como categoría, etc.).*