(SÉPTIMA CLASE: COECUALIZADORES, PULLBACK, PUSHOUT)

Coecualizadores.

Definición 151. *Dado un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

en la categoría $\mathbf{C}$*, un* ***coecualizador*** *de* f *y* g *consiste de una flecha* $B \xrightarrow{q} Q$ *universal tal que* $q \circ f = q \circ g$*. Es decir, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$$

conmuta, y tal que para todo otro diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[dr, "x"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

que conmute, existe una única flecha $Q \xrightarrow{u} X$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "x"] & Q \arrow[d, "u"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 152. *¿Qué es un coecualizador en* $\mathbf{Set}$*? Sean las funciones* $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{q} Q$*. Para que* q *sea un coecualizador, debe cumplirse* $q \circ f = q \circ g$*. Es decir que para cada* $a \in A$*,* $q(f(a)) = q(g(a))$ *por más que* $f(a) \neq g(a)$*. Para definir* q*, nos preguntamos para cuáles* $b, b' \in B$ *debe ocurrir* $q(b) = q(b')$*. Claramente, si existe* $a \in A$ *tal que* $b = f(a)$ *y* $b' = g(a)$*, necesitamos* $q(b) = q(b')$*. Podríamos tomar* q *constante, eso garantiza que tales igualdades valen, pero la intención es igualar lo menos posible. Por más restrictivos que seamos al definir* q*, se puede observar que la relación* $b \sim b'$ *sii* $q(b) = q(b')$ *será una relación de equivalencia. Entonces, para igualar lo menos posible, definamos* $\sim$ *como la menor relación de equivalencia que incluye* $f(a) \sim g(a)$ *para todo* $a \in A$*. Tal relación de equivalencia puede definirse inductivamente a través de las* *siguientes reglas de inferencia:*

$$\frac{}{f(a) \sim g(a)} \qquad \frac{}{b \sim b}$$

$$\frac{b' \sim b}{b \sim b'} \qquad \frac{b \sim b' \quad b' \sim b''}{b \sim b''}$$

Dado $b \in B$, *se denota por* $[b] = \{b' \in B \mid b \sim b'\}$ *la clase de equivalencia de* b. *Sea* $Q = \{[b] \mid b \in B\}$ *el conjunto de clases de equivalencia, que es una partición de* B *y se suele denotar* $Q = B/\sim$. *Se define* $B \xrightarrow{q} Q$ *por* $q(b) = [b]$. *Veamos que es un coecualizador de* f *y* g.

Si $f(a) = g(a)$ *entonces* $f(a) \sim g(a)$ *y por lo tanto* $q(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = q(g(a))$ *y el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea ahora

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[dr, "x"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

que conmute. La conmutatividad de este diagrama, como antes para q, *implica que* $x(f(a)) = x(g(a))$. *Razonando como hicimos para* q *concluimos que necesariamente* $b \sim b'$ *implica* $x(b) = x(b')$. *Entonces, si definimos* $Q \xrightarrow{u} X$ *por* $u([b]) = x(b)$, *la función* u *está bien definida y además* $x(b) = u([b]) = u(q(b))$ *obteniendo la conmutatividad del diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "x"] & Q \arrow[d, "u"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

Ejercicio 153. *Comprobar que si* $B \xrightarrow{q} Q$ *es un coecualizador, entonces* q *es epi.*

Ejercicio 154. *Demostrar que el coecualizador, si existe, es único salvo isomorfismo.*

Ejercicio 155. *Intente identificar coecualizadores en las categorías vistas (por ejemplo,* **Set**$*$, **Rel**, **Pfn**, *un preorden* P *visto como categoría, etc.).*

Pullbacks. Otra construcción importante en categorías es la de pullback

Definición 156. *Dadas dos flechas f y g con igual codominio en una categoría* $\mathbf{C}$*,*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

*un **pullback de** f **y** g consiste de dos flechas*

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

conmuta y es universal con esta propiedad, es decir, para todo par de flechas

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\ & & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rrd, "z_2"] \arrow[rdd, "z_1"'] & & \\
& & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}
$$

conmuta, existe una única flecha $Z \xrightarrow{u} A \times_C B$ *tal que el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rd, "u"] \arrow[rrd, "z_2"] \arrow[rdd, "z_1"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Como se ve, la definición ocupa más de una página. Por brevedad se suele presentar directamente el diagrama que incluye todas las flechas involucradas:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rd, "u"] \arrow[rrd, "z_2"] \arrow[rdd, "z_1"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}
$$

Este diagrama se puede leer: "dadas las flechas f y g, se dice que las flechas p_1 y p_2 forman un pullback de f y g si el cuadrado del diagrama conmuta (o sea, $f \circ p_1 = g \circ p_2$) y para todo par de flechas z_1 y z_2 tal que el rombo acostado del diagrama conmuta (o sea, $f \circ z_1 = g \circ z_2$) existe una única flecha u tal que los dos triángulos conmutan (o sea, $z_1 = p_1 \circ u$ y $z_2 = p_2 \circ u$)."

Esta construcción es importante ya que se puede comprobar que una categoría tiene objeto terminal y todos los pullbacks sii tiene todos los ecualizadores y productos finitos. Objeto terminal, pullbacks, ecualizadores y productos son ejemplos particulares de construcciones más generales que reciben el nombre de **límites**. Se verá también que si una categoría tiene objeto terminal y pullbacks (o ecualizadores y productos finitos), entonces tiene todos los límites finitos, lo que pone de manifiesto la importancia de estas cuatro construcciones.

Exactamente lo mismo puede decirse para las construcciones duales: existencia de objeto inicial y **pushouts** (el dual de pullbacks, cuya definición se deja como ejercicio) equivale a la de los coproductos finitos y coecualizador. Y un resultado análogo al mencionado se obtiene para el concepto general: el de **colímite**.

Ejercicio 157. *Definir* ***pushout****, el concepto dual al de pullback.*

Ejercicio 158. *Identificar el pushout de la categoría* **Set**. *Ayuda: combinar el coecualizador y el coproducto de* **Set**.

Las definiciones de límite y colímite van a esperar por ahora. Antes de abordar la equivalencia entre la existencia de objeto terminal y pullbacks y la de productos finitos y ecualizadores, intentemos entender qué es un pullback en **Set**:

Ejemplo 159. *Consideramos la categoría* **Set**. *Salvo por la inclinación del diagrama, los pullbacks son muy parecidos a los productos. Están los objetos A y B y las flechas p_1 y p_2, en vez de las proyecciones π_1 y π_2. La novedad es la participación de las flechas f y g que no están en la definición del producto. En realidad, estas dos flechas nos recuerdan la definición de ecualizador, salvo que en aquel caso ambas flechas no solo compartían el codominio sino también el dominio. Justamente, para obtener flechas que compartan el dominio consideramos $f \circ p_1$ y $g \circ p_2$.*

El pullback parece combinar de alguna manera productos y ecualizadores. Ensayamos definir

$$\begin{aligned} A \times_C B &= \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \\ p_1((a,b)) &= a \\ p_2((a,b)) &= b \end{aligned}$$

Con esto el cuadrado del diagrama conmuta. Sean z_1 y z_2 funciones que hacen que el rombo acostado conmute. Definimos $u(z) = (z_1(z), z_2(z))$. Claramente $Im(u) \subseteq A \times_C B$ ya que $f(z_1(z)) = g(z_2(z))$ porque $f \circ z_1 = g \circ z_2$. También resulta obvio que esta definición de u hace que los triángulos conmuten.

Para ver unicidad de u, sea $Z \xrightarrow{u'} A \times_C B$ tal que los triángulos conmutan, sea $z \in Z$ y $(a,b) = u'(z)$. La conmutatividad de los triángulos implica que $a = p_1((a,b)) = p_1(u'(z)) = z_1(z)$ y también $b = z_2(z)$. Por lo tanto $u'(z) = (a,b) = (z_1(z), z_2(z)) = u(z)$.

Esta construcción nos ayuda a intuir las propiedades de los pullbacks. Por ejemplo, cómo se puede construir productos a partir de los pullbacks. En **Set**, tenemos que $A \times_C B \subseteq A \times B$, ya que solo se admite un par (a,b) si $f(a) = g(b)$. Para lograr que $A \times_C B = A \times B$ es necesario que todos los pares satisfagan ese criterio de admisión. Para ello, f y g deben ser funciones constantes (y deben devolver la misma constante).

Una forma de decirlo en general para cualquier categoría que tenga pullbacks y objeto terminal, es elgiendo $C = 1$ y tomando $f = !_A$ y $g = !_B$:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
& A \times_1 B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "!_B"] \\
& A \arrow[r, "!_A"] & 1
\end{tikzcd}$$

En este diagrama, la conmutatividad del cuadrado es trivial, ya que hay una única flecha de $A \times_1 B$ en 1. Y lo mismo pasa con la del rombo acostado. La única parte del diagrama cuya conmutatividad resulta relevante, entonces, es la formada por los dos triángulos, que es exactamente igual a la del producto. Acabamos de comprobar que:

Prop 160. *Si una categoría tiene objeto terminal y pullbacks, entonces tiene productos finitos.*

Sea **C** una categoría con objeto terminal y pullbacks (y por lo tanto también productos finitos) podemos comprobar que también tiene ecualizadores. Sean $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$, que podemos también escribir $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} B$, entonces $A \xrightarrow{<f,g>} B \times B$. También tenemos $B \xleftarrow{1_B} B \xrightarrow{1_B} B$, entonces $B \xrightarrow{<1_B, 1_B>} B \times B$. Se puede graficar así:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "<1_B, 1_B>"] \\
A \arrow[r, "<f,g>"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Veremos que existe h tal que

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \\
A &
\end{tikzcd}$$

es un pullback de $<f, g>$ y $<1_B, 1_B>$ sii e es un ecualizador de f y g.

Sea e y h un pullback de $<f, g>$ y $<1_B, 1_B>$. Eso implica que $<f \circ e, g \circ e> = <f, g> \circ e = <1_B, 1_B> \circ h = <1_B \circ h, 1_B \circ h> = <h, h>$, y luego, $f \circ e = h = g \circ e$, por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[ur, "x"] & &
\end{tikzcd}$$

que también conmuta. Entonces, también conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, "f \circ x"] \arrow[ddr, "x"'] & & \\
 & & B \arrow[d, "<1_B, 1_B>"] \\
 & A \arrow[r, "<f, g>"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

En efecto, $<f, g> \circ x = <f \circ x, g \circ x> = <f \circ x, f \circ x> = <1_B \circ f \circ x, 1_B \circ f \circ x> = <1_B, 1_B> \circ f \circ x$. Como e y h conforman un pullback de $<f, g>$ y $<1_B, 1_B>$, existe una única flecha $X \xrightarrow{u} E$ tal que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "f \circ x"] \arrow[ddr, "x"'] & & \\
 & E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"] & B \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, tenemos que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \\ X \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, luego e es un ecualizador.

Ahora el recíproco. Sea $E \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ un ecualizador, comprobaremos que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

es un pullback de

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "{<1_B, 1_B>}"] \\ A \arrow[r, "{<f, g>}"] & B \times B \end{tikzcd}$$

tomando $h = f \circ e$. Para ello, primero comprobamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "{<1_B, 1_B>}"] \\ A \arrow[r, "{<f, g>}"] & B \times B \end{tikzcd}$$

conmuta. Efectivamente, $<f,g>\circ e = <f\circ e, g\circ e> = <f\circ e, f\circ e> = <1_B\circ f\circ e, 1_B\circ f\circ e> = <1_B,1_B>\circ f\circ e = <1_B,1_B>\circ h$. Sea ahora

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[ddr, "z_1"'] \arrow[drr, "z_2"] & & \\
 & & B \arrow[d, "<1_B,1_B>"] \\
 & A \arrow[r, "<f,g>"] & B\times B
\end{tikzcd}$$

que conmuta, es decir, tal que $<f\circ z_1, g\circ z_1> = <f,g>\circ z_1 = <1_B,1_B>\circ z_2 = <1_B\circ z_2, 1_B\circ z_2> = <z_2,z_2>$, de donde se obtiene que $f\circ z_1 = z_2 = g\circ z_1$, que implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
Z \arrow[ur, "z_1"] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por ser e un ecualizador, existe una única $Z \xrightarrow{u} E$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \\
Z \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "z_1"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sólo resta comprobar que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\
 & E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"] & B \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

también conmuta. El triángulo inferior es exactamente el diagrama anterior, que conmuta. El triángulo superior se ve que conmuta porque recordando que $h = f \circ e$, se tiene $h \circ u = f \circ e \circ u = f \circ z_1 = z_2$. Con esto demostramos que

Prop 161. *Si una categoría tiene objeto terminal y pullbacks, entonces tiene ecualizadores.*

Por último, demostramos que

Prop 162. *Si una categoría tiene ecualizadores y productos finitos, entonces tiene pullbacks.*

Sea una categoría **C**, con ecualizadores y productos finitos. Queremos encontrar el pullback de

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Contamos con la existencia del producto $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$, de donde se obtienen dos flechas paralelas $A \times B \underset{g \circ \pi_2}{\overset{f \circ \pi_1}{\rightrightarrows}} C$. Sea e el ecualizador de $f \circ \pi_1$ y $g \circ \pi_2$, se tiene que

$$E \xrightarrow{e} A \times B \underset{g \circ \pi_2}{\overset{f \circ \pi_1}{\rightrightarrows}} C$$

conmuta, de donde se obtiene la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_2 \circ e"] \arrow[d, "\pi_1 \circ e"'] & B \arrow[d, "g"'] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Resta demostrar que $\pi_1 \circ e$ y $\pi_2 \circ e$ son un pullback de f y g.

Ejercicio 163. *Demostrar que que $\pi_1 \circ e$ y $\pi_2 \circ e$ son un pullback de f y g.*

Ejercicio 164. *Identificar pullbacks en alguna de las categorías vistas (ej:* **Set**$*$*,* **Rel***, etc.).*