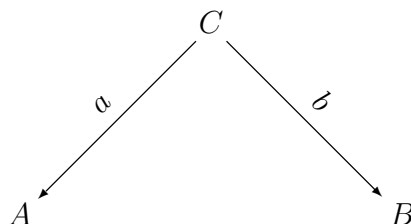


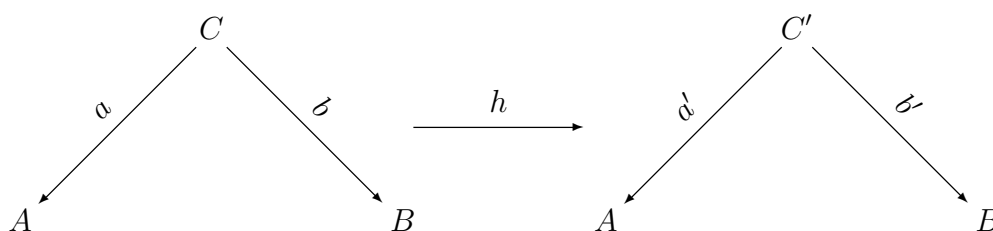
## (OCTAVA CLASE : CATEGORÍAS DE FLECHAS. FUNTORES REPRESENTABLES Y OTROS

**Categorías de diagramas.** A continuación, un ejemplo de construcción de una categoría a partir de otra. Dada una categoría  $\mathbf{C}$ , se construye otra en la que los objetos son diagramas de  $\mathbf{C}$ .

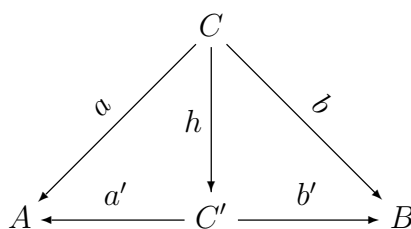
**Ejemplo 165.** Dada una categoría  $\mathbf{C}$  y dos objetos  $A$  y  $B$ , se puede formar la categoría  $\mathbf{C}/AB$  cuyos objetos son diagramas de la forma



Una flecha  $h \in \mathbf{C}/AB$  entre dos objetos (diagramas)



es una flecha  $C \xrightarrow{h} C'$  de la categoría original  $\mathbf{C}$  tal que el diagrama



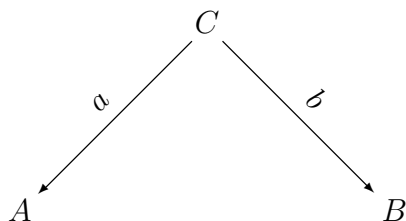
de la categoría original  $\mathbf{C}$  conmuta.

Formalmente, podríamos definir  $\mathbf{C}/AB$  como sigue:

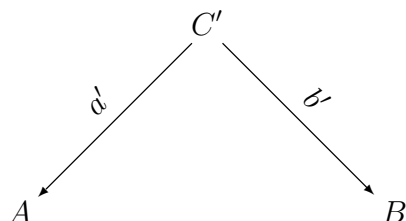
- $(\mathbf{C}/AB)_0 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{C}_1 \wedge \text{dom}(a) = \text{dom}(b) \wedge \text{cod}(a) = A \wedge \text{cod}(b) = B\}$ ,
- $\mathbf{C}/AB((a, b), (a', b')) = \{h \in \mathbf{C}(\text{dom}(a), \text{dom}(a')) \mid a = a' \circ h \wedge b = b' \circ h\}$ ,
- la composición de  $\mathbf{C}/AB$  es la de  $\mathbf{C}$ ,
- la identidad de  $\mathbf{C}/AB$  es la de  $\mathbf{C}$ .

**Ejercicio 166.** Comprobar que para toda categoría  $\mathbf{C}$  y todo par de objetos  $A$  y  $B$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}/AB$  es una categoría.

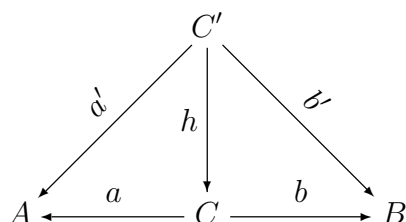
Un objeto terminal de la categoría  $\mathbf{C}/AB$  es un objeto (diagrama de  $\mathbf{C}$ )



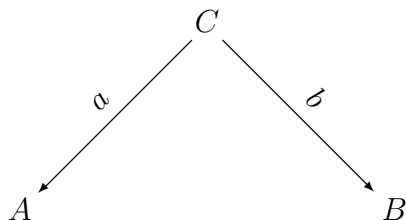
tal que para todo otro objeto (diagrama de  $\mathbf{C}$ )



existe una única flecha  $h$  de este último objeto en el anterior. En términos de la categoría  $\mathbf{C}$ , una única flecha  $h$  que haga conmutar el diagrama



Es decir, el diagrama



es un objeto terminal de  $\mathbf{C}/AB$  sii dicho diagrama es el producto (en  $\mathbf{C}$ ) de  $A$  y  $B$ .

**Ejemplo 167.** Se puede definir un funtor  $\mathbf{C}/AB \xrightarrow{\text{dom}} \mathbf{C}$  por

- $\text{dom}_0((a, b)) = \text{dom}(a)$  (que es igual a  $\text{dom}(b)$ ), y
- $\text{dom}_1(h) = h$

**Ejercicio 168.** Demostrar que  $\text{dom}$  es un funtor.

**Categorías de flechas.** A continuación algunos ejemplos de categorías donde los objetos son flechas de una categoría dada  $\mathbf{C}$ .

**Definición 169.** Dada una categoría  $\mathbf{C}$  y un objeto  $C \in \mathbf{C}_0$ , se define la **categoría slice de  $\mathbf{C}$  sobre  $C$** ,  $\mathbf{C}/C$  cuyos objetos son flechas que tienen como codominio al objeto  $C$ . Más precisamente,

- $(\mathbf{C}/C)_0 = \{f \in \mathbf{C}_1 \mid \text{cod}(f) = C\}$ .

- Sean  $f$  y  $f'$  objetos de esta categoría (es decir,  $X \xrightarrow{f} C$  y  $X' \xrightarrow{f'} C$  están en  $\mathbf{C}$ ). Entonces,  $g$  es una flecha de  $f$  a  $f'$  en la categoría  $\mathbf{C}/C$  si  $X \xrightarrow{g} X'$  y  $f = f' \circ g$ , es decir, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & C & \end{array}$$

Es decir, los objetos de  $\mathbf{C}/C$  son flechas  $f$  de  $\mathbf{C}$  de la pinta

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ C \end{array}$$

y las flechas  $g$  de  $\mathbf{C}/C$ :

$$\begin{array}{ccc} X & & X' \\ \downarrow f & \xrightarrow{g} & \downarrow f' \\ C & & C \end{array}$$

son también flechas  $X \xrightarrow{g} X'$  de  $\mathbf{C}$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & C & \end{array}$$

de  $\mathbf{C}$  conmuta.

**Ejercicio 170.** Comprobar que  $\mathbf{C}/C$  es una categoría, definiendo composición e identidad adecuadamente.

**Ejercicio 171.** Sea  $\mathbf{C}$  una categoría con objeto terminal. ¿Qué puede decir de  $\mathbf{C}/1$ ?

**Ejercicio 172.** ¿Cuál es el objeto terminal de la categoría  $\mathbf{C}/C$ ?

**Ejercicio 173.** Demostrar que los productos de la categoría  $\mathbf{C}/C$  son pullbacks de la categoría  $\mathbf{C}$ .

**Ejemplo 174.** Sea  $P$  un poset visto como categoría y sea  $p \in P$ . Entonces,  $P/p \cong \downarrow(p)$ , donde  $\downarrow(p)$  es el ideal principal  $\downarrow(p) = \{q \in P \mid q \leq p\}$ .

**Ejercicio 175.** Definir análogamente la *categoría coslice* de  $\mathbf{C}$  bajo  $C$ ,  $C/\mathbf{C}$  donde los objetos ahora son flechas  $C \xrightarrow{f} X$ , y una flecha de  $f$  en  $f'$  debe satisfacer  $h \circ f = f'$ .

**Ejercicio 176.** Otra alternativa es definir la categoría coslice  $C/\mathbf{C}$  utilizando la categoría slice  $\mathbf{C}/C$  y el operador de categoría opuesta.

**Ejercicio 177.** Demostrar que  $1/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}_*$ .

**Ejemplo 178.** Se puede definir un funtor  $\mathbf{C}/\mathbf{C} \xrightarrow{\text{dom}} \mathbf{C}$  por

- $\text{dom}_0(f) = \text{dom}(f)$ , y
- $\text{dom}_1(g) = g$

**Ejemplo 179.** Se puede definir un funtor  $\mathbf{C}/\mathbf{C} \xrightarrow{\text{cod}} \mathbf{C}$  por

- $\text{cod}_0(f) = \text{cod}(f)$ , y
- $\text{cod}_1(g) = g$

**Ejercicio 180.** Comprobar que  $\text{dom}$  y  $\text{cod}$  son funtores.

**Definición 181.** Dada una categoría  $\mathbf{C}$  se define la *categoría flecha*  $\mathbf{C}_\rightarrow$  cuyos objetos son flechas de  $\mathbf{C}$ . Más precisamente,

- $(\mathbf{C}_\rightarrow)_0 = \mathbf{C}_1$ .
- $\mathbf{C}_\rightarrow(f, f') = \{(g, g') \mid \text{dom}(f) \xrightarrow{g} \text{dom}(f') \wedge \text{cod}(f) \xrightarrow{g'} \text{cod}(f') \wedge f' \circ g = g' \circ f\}$ .  
Es decir,  $f \xrightarrow{(g, g')} f'$  sii el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ A' & \xrightarrow{g'} & B' \end{array}$$

de  $\mathbf{C}$  conmuta.

**Ejercicio 182.** Comprobar que  $\mathbf{C}_\rightarrow$  es una categoría.

**Ejercicio 183.** Definir los funtores  $\mathbf{C} \xleftarrow{\text{dom}} \mathbf{C}_\rightarrow \xrightarrow{\text{cod}} \mathbf{C}$ .

**Ejercicio 184.** Es esto un diagrama producto?

**Funtores.** En su momento definimos funtores y vimos algunos ejemplos, principalmente el funtor de olvido y los únicos funtores que convierten a la categoría  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{1}$  en objetos inicial y terminal de la categoría  $\mathbf{Cat}$ . También se mencionó que el producto cartesiano de categorías satisface la definición de producto definida categóricamente, dando lugar a los funtores  $\pi_1$  y  $\pi_2$  de la categoría  $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$  en  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  respectivamente, y por supuesto el funtor  $\mathbf{X} \xrightarrow{\langle F, G \rangle} \mathbf{C} \times \mathbf{D}$  asociado a los funtores  $\mathbf{X} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$  y  $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}$ .

Para algunas categorías de flechas (o diagramas), acabamos de dar algunos ejemplos de funtores que llamamos  $\text{dom}$  y  $\text{cod}$ .

A continuación veremos otros ejemplos de funtores.

**Ejemplo 185.** Dada una categoría localmente pequeña  $\mathbf{C}$ , y un objeto  $A \in \mathbf{C}$ , se define el **functor representable** (covariante)  $\mathbf{C} \xrightarrow{\text{Hom}(A, -)} \mathbf{Set}$  de la siguiente manera:

- dado un objeto  $B \in \mathbf{C}$ ,  $\text{Hom}(A, B) = \{f \in \mathbf{C} \mid A \xrightarrow{f} B\}$
- dada una flecha  $B \xrightarrow{g} B'$ ,  $\text{Hom}(A, g) = f \mapsto g \circ f$ . Así,  $\text{Hom}(A, g)$  es una función que toma una flecha  $f \in \text{Hom}(A, B)$  y devuelve  $g \circ f \in \text{Hom}(A, B')$ .

Como  $\text{Hom}(A, g)$  es una función del conjunto  $\text{Hom}(A, B)$  en el conjunto  $\text{Hom}(A, B')$ , a veces resulta conveniente escribir  $\text{Hom}(A, g)(f) = g \circ f$  en vez de su equivalente  $\text{Hom}(A, g) = f \mapsto g \circ f$ . Se puede comprobar que  $\text{Hom}(A, -)$  es un functor:

- Sean  $B \xrightarrow{g} B'$  y  $B' \xrightarrow{g'} B''$ ,  $\text{Hom}(A, g' \circ g)(f) = g' \circ g \circ f = g' \circ \text{Hom}(A, g)(f) = \text{Hom}(A, g')(\text{Hom}(A, g)(f)) = (\text{Hom}(A, g') \circ \text{Hom}(A, g))(f)$ , donde la última composición  $\circ$  es la composición de funciones. Esto demuestra que se satisface la propiedad  $\text{Hom}(A, g' \circ g) = \text{Hom}(A, g') \circ \text{Hom}(A, g)$ .
- $\text{Hom}(A, 1_B) = f \mapsto 1_B \circ f = f \mapsto f = 1_{\text{Hom}(A, B)}$ .

**Ejemplo 186.** Dada una categoría  $\mathbf{C}$  con productos, se define un functor  $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \xrightarrow{\times} \mathbf{C}$  de la siguiente manera:

- dado un objeto  $(A, B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ,  $\times((A, B)) = A \times B$
- dada una flecha  $(A, B) \xrightarrow{(f, g)} (A', B') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$  (o sea,  $A \xrightarrow{f} A'$  y  $B \xrightarrow{g} B' \in \mathbf{C}$ ),  $\times((A, B)) \xrightarrow{\times((f, g))} \times((A', B'))$ . Éste es exactamente el diagrama que habíamos denotado  $A \times B \xrightarrow{f \times g} A' \times B'$ .

Observar que se asume acá que se ha elegido un diagrama  $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$  para cada par de objetos  $A$  y  $B$  y en base a dicha elección se define el functor  $\times$ .

**Ejercicio 187.** Comprobar que si  $\mathbf{C}$  tiene productos,  $\times$  es un functor.

**Ejercicio (posgrado) 188.** Sea  $\mathbf{C}$  una categoría, y el siguiente un diagrama en  $\mathbf{C}$ ,

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{f'} & E & \xrightarrow{g'} & D \\ \downarrow h'' & & \downarrow h' & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Entonces, si

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f'} & E \\ \downarrow h'' & & \downarrow h' \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g'} & D \\ \downarrow h' & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

son pullbacks, entonces

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{g' \circ f'} & D \\
 \downarrow h'' & & \downarrow h \\
 A & \xrightarrow{g \circ f} & C
 \end{array}$$

también lo es.

Recíprocamente, si

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{g' \circ f'} & D \\
 \downarrow h'' & & \downarrow h \\
 A & \xrightarrow{g \circ f} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g'} & D \\
 \downarrow h' & & \downarrow h \\
 B & \xrightarrow{g} & C
 \end{array}$$

son pullbacks, entonces

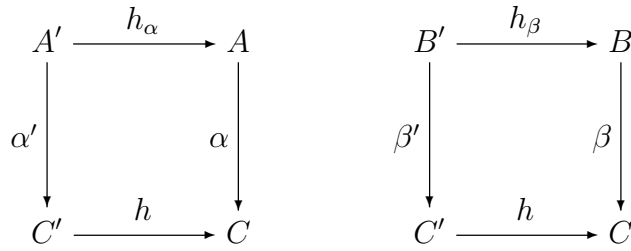
$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{f'} & E \\
 \downarrow h'' & & \downarrow h' \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

también lo es.

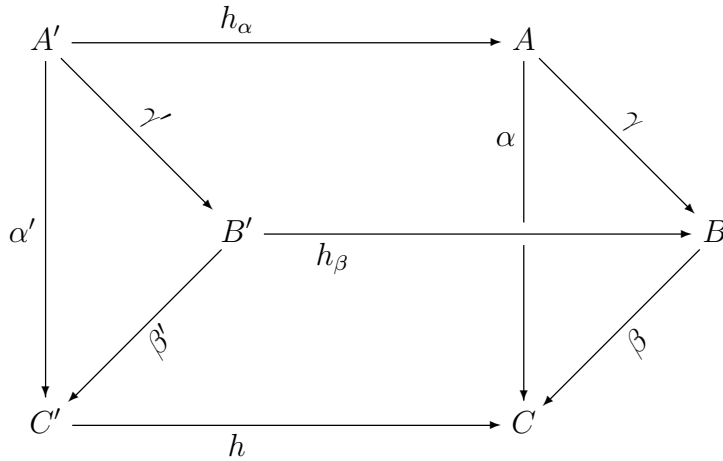
**Ejercicio (posgrado) 189.** Sea  $\mathbf{C}$  una categoría con el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & & \\
 \downarrow \alpha & \searrow \gamma & \\
 & & B \\
 & \swarrow \beta & \\
 C & & 
 \end{array}$$

Entonces, si



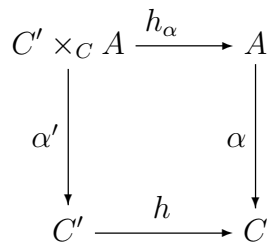
son pullbacks, entonces, hay una única flecha  $A' \xrightarrow{\gamma'} B'$  tal que el diagrama



conmuta.

**Prop 190.** Pullback es un funtor. Sea  $C' \xrightarrow{h} C$  en una categoría  $\mathbf{C}$  con pullbacks, entonces hay un funtor  $\mathbf{C}/C \xrightarrow{h^*} \mathbf{C}/C'$  que lleva el objeto (de  $\mathbf{C}/C$ )  $A \xrightarrow{\alpha} C$  en el objeto (de  $\mathbf{C}/C'$ )  $C' \times_C A \xrightarrow{\alpha'} C'$  donde  $\alpha'$  es la paralela a  $\alpha$  en el pullback entre  $\alpha$  y  $h$ . El efecto de  $h^*$  sobre una flecha (de  $\mathbf{C}/C$ )  $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$  está dada por el ejercicio 189.

En la proposición, la flecha  $h$  está fija. Dado el objeto  $\alpha$ , para obtener  $h^*(\alpha)$  se usa que  $\mathbf{C}$  tiene pullbacks, en particular el de  $h$  y  $\alpha$ :



de donde  $h^*(\alpha) = \alpha'$  es el efecto de  $h^*$  en objetos de  $\mathbf{C}/C$ .

Dada una flecha  $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$  de  $\mathbf{C}/C$ , podemos formar el pullback de  $\alpha$  y el de  $\beta$  obteniendo un diagrama como el del ejercicio 189, la existencia y unicidad de  $\gamma'$  nos permite tomar  $h^*(\gamma) = \gamma'$  como el efecto de  $h^*$  en las flechas.

**Ejercicio (posgrado) 191.** Comprobar que  $h^*$  es un funtor.