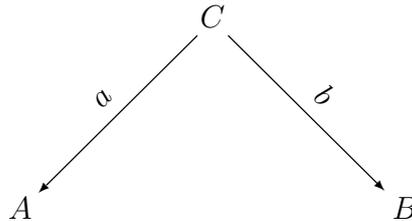


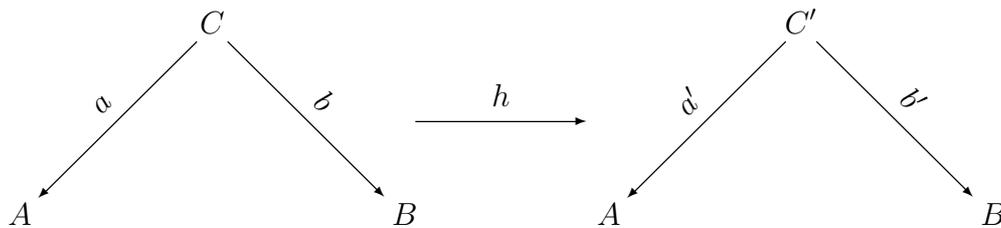
(OCTAVA CLASE : CATEGORÍAS DE FLECHAS. FUNTORES REPRESENTABLES Y OTROS

Categorías de diagramas. A continuación, un ejemplo de construcción de una categoría a partir de otra. Dada una categoría \mathbf{C} , se construye otra en la que los objetos son diagramas de \mathbf{C} .

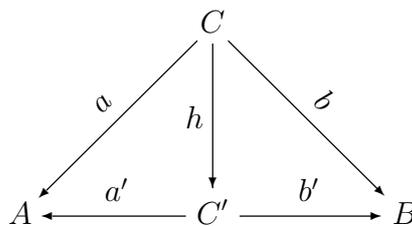
Ejemplo 165. Dada una categoría \mathbf{C} y dos objetos A y B , se puede formar la categoría \mathbf{C}/AB cuyos objetos son diagramas de la forma



Una flecha $h \in \mathbf{C}/AB$ entre dos objetos (diagramas)



es una flecha $C \xrightarrow{h} C'$ de la categoría original \mathbf{C} tal que el diagrama



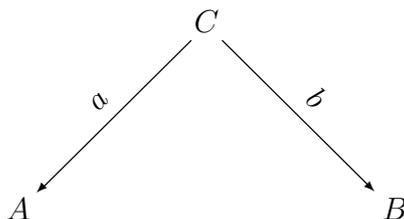
de la categoría original \mathbf{C} conmuta.

Formalmente, podríamos definir \mathbf{C}/AB como sigue:

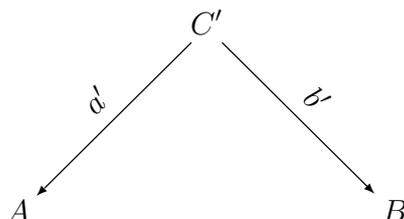
- $(\mathbf{C}/AB)_0 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{C}_1 \wedge \text{dom}(a) = \text{dom}(b) \wedge \text{cod}(a) = A \wedge \text{cod}(b) = B\}$,
- $\mathbf{C}/AB((a, b), (a', b')) = \{h \in \mathbf{C}(\text{dom}(a), \text{dom}(a')) \mid a = a' \circ h \wedge b = b' \circ h\}$,
- la composición de \mathbf{C}/AB es la de \mathbf{C} ,
- la identidad de \mathbf{C}/AB es la de \mathbf{C} .

Ejercicio 166. Comprobar que para toda categoría \mathbf{C} y todo par de objetos A y B de \mathbf{C} , \mathbf{C}/AB es una categoría.

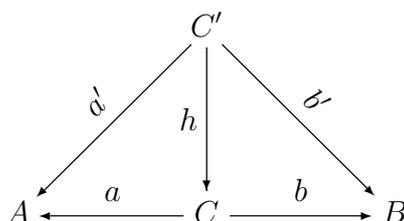
Un objeto terminal de la categoría \mathbf{C}/AB es un objeto (diagrama de \mathbf{C})



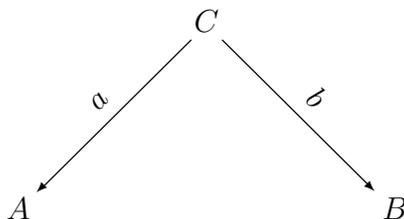
tal que para todo otro objeto (diagrama de \mathbf{C})



existe una única flecha h de este último objeto en el anterior. En términos de la categoría \mathbf{C} , una única flecha h que haga conmutar el diagrama



Es decir, el diagrama



es un objeto terminal de \mathbf{C}/AB sii dicho diagrama es el producto (en \mathbf{C}) de A y B .

Ejemplo 167. Se puede definir un funtor $\mathbf{C}/AB \xrightarrow{\text{dom}} \mathbf{C}$ por

- $\text{dom}_0((a, b)) = \text{dom}(a)$ (que es igual a $\text{dom}(b)$), y
- $\text{dom}_1(h) = h$

Ejercicio 168. Demostrar que dom es un funtor.

Categorías de flechas. A continuación algunos ejemplos de categorías donde los objetos son flechas de una categoría dada \mathbf{C} .

Definición 169. Dada una categoría \mathbf{C} y un objeto $C \in \mathbf{C}_0$, se define la **categoría slice de \mathbf{C} sobre C** , \mathbf{C}/C cuyos objetos son flechas que tienen como codominio al objeto C . Más precisamente,

- $(\mathbf{C}/C)_0 = \{f \in \mathbf{C}_1 \mid \text{cod}(f) = C\}$.

- Sean f y f' objetos de esta categoría (es decir, $X \xrightarrow{f} C$ y $X' \xrightarrow{f'} C$ están en \mathbf{C}). Entonces, g es una flecha de f a f' en la categoría \mathbf{C}/C si $X \xrightarrow{g} X'$ y $f = f' \circ g$, es decir, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & C & \end{array}$$

Es decir, los objetos de \mathbf{C}/C son flechas f de \mathbf{C} de la pinta

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ C \end{array}$$

y las flechas g de \mathbf{C}/C :

$$\begin{array}{ccc} X & & X' \\ \downarrow f & \xrightarrow{g} & \downarrow f' \\ C & & C \end{array}$$

son también flechas $X \xrightarrow{g} X'$ de \mathbf{C} tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & C & \end{array}$$

de \mathbf{C} conmuta.

Ejercicio 170. Comprobar que \mathbf{C}/C es una categoría, definiendo composición e identidad adecuadamente.

Ejercicio 171. Sea \mathbf{C} una categoría con objeto terminal. ¿Qué puede decir de $\mathbf{C}/1$?

Ejercicio 172. ¿Cuál es el objeto terminal de la categoría \mathbf{C}/C ?

Ejercicio 173. Demostrar que los productos de la categoría \mathbf{C}/C son pullbacks de la categoría \mathbf{C} .

Ejemplo 174. Sea P un poset visto como categoría y sea $p \in P$. Entonces, $P/p \cong \downarrow(p)$, donde $\downarrow(p)$ es el ideal principal $\downarrow(p) = \{q \in P \mid q \leq p\}$.

Ejercicio 175. Definir análogamente la *categoría coslice* de \mathbf{C} bajo C , C/\mathbf{C} donde los objetos ahora son flechas $C \xrightarrow{f} X$, y una flecha de f en f' debe satisfacer $h \circ f = f'$.

Ejercicio 176. Otra alternativa es definir la categoría coslice C/\mathbf{C} utilizando la categoría slice \mathbf{C}/C y el operador de categoría opuesta.

Ejercicio 177. Demostrar que $1/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}_*$.

Ejemplo 178. Se puede definir un funtor $\mathbf{C}/\mathbf{C} \xrightarrow{\text{dom}} \mathbf{C}$ por

- $\text{dom}_0(f) = \text{dom}(f)$, y
- $\text{dom}_1(g) = g$

Ejemplo 179. Se puede definir un funtor $\mathbf{C}/\mathbf{C} \xrightarrow{\text{cod}} \mathbf{C}$ por

- $\text{cod}_0(f) = \text{cod}(f)$, y
- $\text{cod}_1(g) = g$

Ejercicio 180. Comprobar que dom y cod son funtores.

Definición 181. Dada una categoría \mathbf{C} se define la *categoría flecha* \mathbf{C}_\rightarrow cuyos objetos son flechas de \mathbf{C} . Más precisamente,

- $(\mathbf{C}_\rightarrow)_0 = \mathbf{C}_1$.
- $\mathbf{C}_\rightarrow(f, f') = \{(g, g') \mid \text{dom}(f) \xrightarrow{g} \text{dom}(f') \wedge \text{cod}(f) \xrightarrow{g'} \text{cod}(f') \wedge f' \circ g = g' \circ f\}$.
Es decir, $f \xrightarrow{(g, g')} f'$ sii el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow f' \\
 A' & \xrightarrow{g'} & B'
 \end{array}$$

de \mathbf{C} conmuta.

Ejercicio 182. Comprobar que \mathbf{C}_\rightarrow es una categoría.

Ejercicio 183. Definir los funtores $\mathbf{C} \xleftarrow{\text{dom}} \mathbf{C}_\rightarrow \xrightarrow{\text{cod}} \mathbf{C}$.

Ejercicio 184. Es esto un diagrama producto?

Funtores. En su momento definimos funtores y vimos algunos ejemplos, principalmente el funtor de olvido y los únicos funtores que convierten a la categoría $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ en objetos inicial y terminal de la categoría \mathbf{Cat} . También se mencionó que el producto cartesiano de categorías satisface la definición de producto definida categóricamente, dando lugar a los funtores π_1 y π_2 de la categoría $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ en \mathbf{C} y \mathbf{D} respectivamente, y por supuesto el funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{\langle F, G \rangle} \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ asociado a los funtores $\mathbf{X} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ y $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}$.

Para algunas categorías de flechas (o diagramas), acabamos de dar algunos ejemplos de funtores que llamamos dom y cod .

A continuación veremos otros ejemplos de funtores.

Ejemplo 185. Dada una categoría localmente pequeña \mathbf{C} , y un objeto $A \in \mathbf{C}$, se define el **functor representable** (covariante) $\mathbf{C} \xrightarrow{\text{Hom}(A, -)} \mathbf{Set}$ de la siguiente manera:

- dado un objeto $B \in \mathbf{C}$, $\text{Hom}(A, B) = \{f \in \mathbf{C} \mid A \xrightarrow{f} B\}$
- dada una flecha $B \xrightarrow{g} B'$, $\text{Hom}(A, g) = f \mapsto g \circ f$. Así, $\text{Hom}(A, g)$ es una función que toma una flecha $f \in \text{Hom}(A, B)$ y devuelve $g \circ f \in \text{Hom}(A, B')$.

Como $\text{Hom}(A, g)$ es una función del conjunto $\text{Hom}(A, B)$ en el conjunto $\text{Hom}(A, B')$, a veces resulta conveniente escribir $\text{Hom}(A, g)(f) = g \circ f$ en vez de su equivalente $\text{Hom}(A, g) = f \mapsto g \circ f$. Se puede comprobar que $\text{Hom}(A, -)$ es un functor:

- Sean $B \xrightarrow{g} B'$ y $B' \xrightarrow{g'} B''$, $\text{Hom}(A, g' \circ g)(f) = g' \circ g \circ f = g' \circ \text{Hom}(A, g)(f) = \text{Hom}(A, g')(\text{Hom}(A, g)(f)) = (\text{Hom}(A, g') \circ \text{Hom}(A, g))(f)$, donde la última composición \circ es la composición de funciones. Esto demuestra que se satisface la propiedad $\text{Hom}(A, g' \circ g) = \text{Hom}(A, g') \circ \text{Hom}(A, g)$.
- $\text{Hom}(A, 1_B) = f \mapsto 1_B \circ f = f \mapsto f = 1_{\text{Hom}(A, B)}$.

Ejemplo 186. Dada una categoría \mathbf{C} con productos, se define un functor $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \xrightarrow{\times} \mathbf{C}$ de la siguiente manera:

- dado un objeto $(A, B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\times((A, B)) = A \times B$
- dada una flecha $(A, B) \xrightarrow{(f, g)} (A', B') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ (o sea, $A \xrightarrow{f} A'$ y $B \xrightarrow{g} B' \in \mathbf{C}$), $\times((A, B)) \xrightarrow{\times((f, g))} \times((A', B'))$. Éste es exactamente el diagrama que habíamos denotado $A \times B \xrightarrow{f \times g} A' \times B'$.

Observar que se asume acá que se ha elegido un diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ para cada par de objetos A y B y en base a dicha elección se define el functor \times .

Ejercicio 187. Comprobar que si \mathbf{C} tiene productos, \times es un functor.

Ejercicio (posgrado) 188. Sea \mathbf{C} una categoría, y el siguiente un diagrama en \mathbf{C} ,

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{f'} & E & \xrightarrow{g'} & D \\ \downarrow h'' & & \downarrow h' & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Entonces, si

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f'} & E \\ \downarrow h'' & & \downarrow h' \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g'} & D \\ \downarrow h' & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

son pullbacks, entonces

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{g' \circ f'} & D \\
 \downarrow h'' & & \downarrow h \\
 A & \xrightarrow{g \circ f} & C
 \end{array}$$

también lo es.

Recíprocamente, si

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{g' \circ f'} & D \\
 \downarrow h'' & & \downarrow h \\
 A & \xrightarrow{g \circ f} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g'} & D \\
 \downarrow h' & & \downarrow h \\
 B & \xrightarrow{g} & C
 \end{array}$$

son pullbacks, entonces

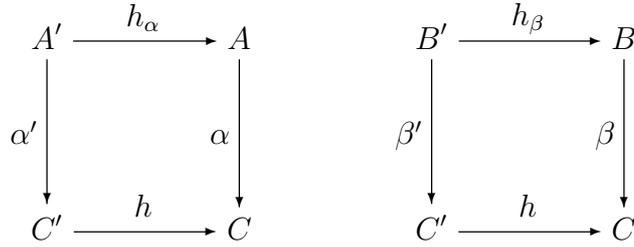
$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{f'} & E \\
 \downarrow h'' & & \downarrow h' \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

también lo es.

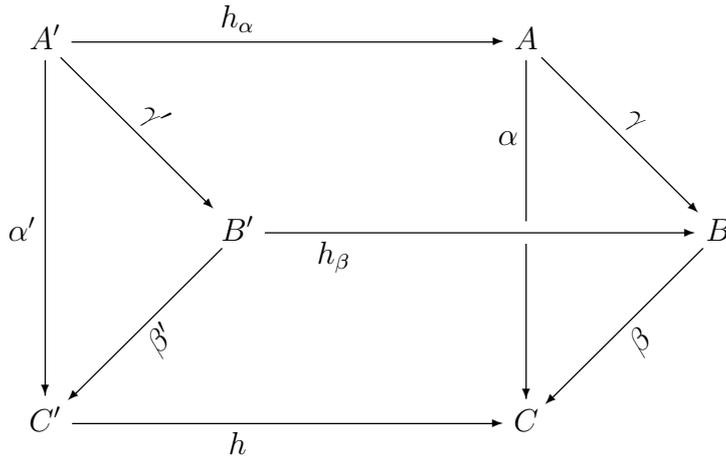
Ejercicio (posgrado) 189. Sea \mathbf{C} una categoría con el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & & \\
 \downarrow \alpha & \searrow \gamma & \\
 & & B \\
 & \swarrow \beta & \\
 C & &
 \end{array}$$

Entonces, si



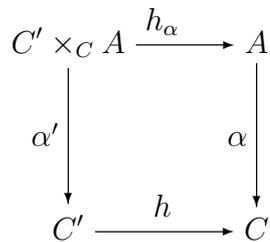
son pullbacks, entonces, hay una única flecha $A' \xrightarrow{\gamma'} B'$ tal que el diagrama



conmuta.

Prop 190. Pullback es un funtor. Sea $C' \xrightarrow{h} C$ en una categoría \mathbf{C} con pullbacks, entonces hay un funtor $\mathbf{C}/C \xrightarrow{h^*} \mathbf{C}/C'$ que lleva el objeto (de \mathbf{C}/C) $A \xrightarrow{\alpha} C$ en el objeto (de \mathbf{C}/C') $C' \times_C A \xrightarrow{\alpha'} C'$ donde α' es la paralela a α en el pullback entre α y h . El efecto de h^* sobre una flecha (de \mathbf{C}/C) $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$ está dada por el ejercicio 189.

En la proposición, la flecha h está fija. Dado el objeto α , para obtener $h^*(\alpha)$ se usa que \mathbf{C} tiene pullbacks, en particular el de h y α :



de donde $h^*(\alpha) = \alpha'$ es el efecto de h^* en objetos de \mathbf{C}/C .

Dada una flecha $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$ de \mathbf{C}/C , podemos formar el pullback de α y el de β obteniendo un diagrama como el del ejercicio 189, la existencia y unicidad de γ' nos permite tomar $h^*(\gamma) = \gamma'$ como el efecto de h^* en las flechas.

Ejercicio (posgrado) 191. Comprobar que h^* es un funtor.