Categorías de diagramas. A continuación, un ejemplo de construcción de una categoría a partir de otra. Dada una categoría $\mathbf{C}$, se construye otra en la que los objetos son diagramas de $\mathbf{C}$.

Ejemplo 165. *Dada una categoría $\mathbf{C}$ y dos objetos A y B, se puede formar la categoría $\mathbf{C}/AB$ cuyos objetos son diagramas de la forma*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Una flecha $h \in \mathbf{C}/AB$ entre dos objetos (diagramas)

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & & & & & C' \arrow[dl, "a'"'] \arrow[dr, "b'"] & \\
A & & B & {} \arrow[r, "h"] & {} & A & & B
\end{tikzcd}$$

es una flecha $C \xrightarrow{h} C'$ de la categoría original $\mathbf{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "b"] & \\
A & C' \arrow[l, "a'"'] \arrow[r, "b'"] & B
\end{tikzcd}$$

de la categoría original $\mathbf{C}$ conmuta.

Formalmente, podríamos definir $\mathbf{C}/AB$ como sigue:

- $(\mathbf{C}/AB)_0 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbf{C}_1 \wedge dom(a) = dom(b) \wedge cod(a) = A \wedge cod(b) = B\}$,
- $\mathbf{C}/AB((a,b),(a',b')) = \{h \in \mathbf{C}(dom(a), dom(a')) \mid a = a' \circ h \wedge b = b' \circ h\}$,
- la composición de $\mathbf{C}/AB$ es la de $\mathbf{C}$,
- la identidad de $\mathbf{C}/AB$ es la de $\mathbf{C}$.

Ejercicio 166. *Comprobar que para toda categoría $\mathbf{C}$ y todo par de objetos A y B de $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}/AB$ es una categoría.*

Un objeto terminal de la categoría $\mathbf{C}/AB$ es un objeto (diagrama de $\mathbf{C}$)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

tal que para todo otro objeto (diagrama de $\mathbf{C}$)

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "a'"'] \arrow[dr, "b'"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

existe una única flecha h de este último objeto en el anterior. En términos de la categoría $\mathbf{C}$, una única flecha h que haga conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "a'"'] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "b'"] & \\ A & C \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

es un objeto terminal de $\mathbf{C}/AB$ sii dicho diagrama es el producto (en $\mathbf{C}$) de A y B.

Ejemplo 167. *Se puede definir un funtor* $\mathbf{C}/AB \xrightarrow{\mathbf{dom}} \mathbf{C}$ *por*

- $\mathbf{dom}_0((a,b)) = dom(a)$ *(que es igual a* $dom(b)$*), y*
- $\mathbf{dom}_1(h) = h$

Ejercicio 168. *Demostrar que* **dom** *es un funtor.*

Categorías de flechas. A continuación algunos ejemplos de categorías donde los objetos son flechas de una categoría dada $\mathbf{C}$.

Definición 169. *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *y un objeto* $C \in \mathbf{C}_0$*, se define la* ***categoría slice*** *de* $\mathbf{C}$ ***sobre*** C*,* $\mathbf{C}/C$ *cuyos objetos son flechas que tienen como codominio al objeto* C*. Más precisamente,*

- $(\mathbf{C}/C)_0 = \{f \in \mathbf{C}_1 | cod(f) = C\}$.

- *Sean f y f' objetos de esta categoría (es decir, $X \xrightarrow{f} C$ y $X' \xrightarrow{f'} C$ están en $\mathbf{C}$). Entonces, g es una flecha de f a f' en la categoría $\mathbf{C}/C$ si $X \xrightarrow{g} X'$ y $f = f' \circ g$, es decir, si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Es decir, los objetos de $\mathbf{C}/C$ son flechas f de $\mathbf{C}$ de la pinta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ C \end{tikzcd}$$

y las flechas g de $\mathbf{C}/C$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\;g\;}", pos=0.5, yshift=20pt] & C \end{tikzcd}$$

son también flechas $X \xrightarrow{g} X'$ de $\mathbf{C}$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

de $\mathbf{C}$ conmuta.

Ejercicio 170. *Comprobar que $\mathbf{C}/C$ es una categoría, definiendo composición e identidad adecuadamente.*

Ejercicio 171. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría con objeto terminal. ¿Qué puede decir de $\mathbf{C}/1$?*

Ejercicio 172. *¿Cuál es el objeto teminal de la categoría $\mathbf{C}/C$?*

Ejercicio 173. *Demostrar que los productos de la categoría $\mathbf{C}/C$ son pullbacks de la categoría $\mathbf{C}$.*

Ejemplo 174. *Sea P un poset visto como categoría y sea $p \in P$. Entonces, $P/p \cong \downarrow(p)$, donde $\downarrow(p)$ es el ideal principal $\downarrow(p) = \{q \in P \mid q \leq p\}$.*

Ejercicio 175. *Definir análogamente la **categoría coslice** de $\mathbf{C}$ **bajo** C, $C/\mathbf{C}$ donde los objetos ahora son flechas $C \xrightarrow{f} X$, y una flecha de f en f' debe satisfacer $h \circ f = f'$.*

Ejercicio 176. *Otra alternativa es definir la categoría coslice $C/\mathbf{C}$ utilizando la categoría slice $\mathbf{C}/C$ y el operador de categoría opuesta.*

Ejercicio 177. *Demostrar que $1/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}*$.*

Ejemplo 178. *Se puede definir un funtor $\mathbf{C}/C \xrightarrow{\mathbf{dom}} \mathbf{C}$ por*

- $\mathbf{dom}_0(f) = dom(f)$, *y*
- $\mathbf{dom}_1(g) = g$

Ejemplo 179. *Se puede definir un funtor $C/\mathbf{C} \xrightarrow{\mathbf{cod}} \mathbf{C}$ por*

- $\mathbf{cod}_0(f) = cod(f)$, *y*
- $\mathbf{cod}_1(g) = g$

Ejercicio 180. *Comprobar que* **dom** *y* **cod** *son funtores.*

Definición 181. *Dada una categoría $\mathbf{C}$ se define la **categoría flecha** $\mathbf{C}_{\rightarrow}$ cuyos objetos son flechas de $\mathbf{C}$. Más precisamente,*

- $(\mathbf{C}_{\rightarrow})_0 = \mathbf{C}_1$.
- $\mathbf{C}_{\rightarrow}(f, f') = \{(g, g') \mid dom(f) \xrightarrow{g} dom(f') \wedge cod(f) \xrightarrow{g'} cod(f') \wedge f' \circ g = g' \circ f\}$.
  Es decir, $f \xrightarrow{(g,g')} f'$ sii el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, "g'"'] & B' \end{tikzcd}$$

  de $\mathbf{C}$ conmuta.

Ejercicio 182. *Comprobar que $\mathbf{C}_{\rightarrow}$ es una categoría.*

Ejercicio 183. *Definir los funtores $\mathbf{C} \xleftarrow{\mathbf{dom}} \mathbf{C}_{\rightarrow} \xrightarrow{\mathbf{cod}} \mathbf{C}$.*

Ejercicio 184. *Es esto un diagrama producto?*

Funtores. En su momento definimos funtores y vimos algunos ejemplos, principalmente el funtor de olvido y los únicos funtores que convierten a la categoría $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ en objetos inicial y terminal de la categoría **Cat**. También se mencionó que el producto cartesiano de categorías satisface la definición de producto definida categóricamente, dando lugar a los funtores π_1 y π_2 de la categoría $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ en $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ respectivamente, y por supuesto el funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{<F,G>} \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ asociado a los funtores $\mathbf{X} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ y $\mathbf{X} \xrightarrow{G} \mathbf{D}$.

Para algunas categorías de flechas (o diagramas), acabamos de dar algunos ejemplos de funtores que llamamos **dom** y **cod**.

A continuación veremos otros ejemplos de funtores.

Ejemplo 185. *Dada una categoría localmente pequeña* $\mathbf{C}$*, y un objeto* $A \in \mathbf{C}$*, se define el **funtor representable** (covariante)* $\mathbf{C} \xrightarrow{Hom(A,\_)} \mathbf{Set}$ *de la siguiente manera:*

- *dado un objeto* $B \in \mathbf{C}$*,* $Hom(A, B) = \{f \in \mathbf{C} \mid A \xrightarrow{f} B\}$
- *dada una flecha* $B \xrightarrow{g} B'$*,* $Hom(A, g) = f \mapsto g \circ f$*. Así,* $Hom(A, g)$ *es una funcíon que toma una flecha* $f \in Hom(A, B)$ *y devuelve* $g \circ f \in Hom(A, B')$*.*

Como $Hom(A, g)$ es una función del conjunto $Hom(A, B)$ en el conjunto $Hom(A, B')$, a veces resulta conveniente escribir $Hom(A, g)(f) = g \circ f$ en vez de su equivalente $Hom(A, g) = f \mapsto g \circ f$. Se puede comprobar que $Hom(A,\_)$ es un funtor:

- Sean $B \xrightarrow{g} B'$ y $B' \xrightarrow{g'} B''$, $Hom(A, g' \circ g)(f) = g' \circ g \circ f = g' \circ Hom(A, g)(f) = Hom(A, g')(Hom(A, g)(f)) = (Hom(A, g') \circ Hom(A, g))(f)$, donde la última composición $\circ$ es la composición de funciones. Esto demuestra que se satisface la propiedad $Hom(A, g' \circ g) = Hom(A, g') \circ Hom(A, g)$.
- $Hom(A, 1_B) = f \mapsto 1_B \circ f = f \mapsto f = 1_{Hom(A,B)}$.

Ejemplo 186. *Dada una categoría* $\mathbf{C}$ *con productos, se define un funtor* $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \xrightarrow{\times} \mathbf{C}$ *de la siguiente manera:*

- *dado un objeto* $(A, B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$*,* $\times((A, B)) = A \times B$
- *dada una flecha* $(A, B) \xrightarrow{(f,g)} (A', B') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *(o sea,* $A \xrightarrow{f} A'$ *y* $B \xrightarrow{g} B' \in \mathbf{C}$*),* $\times((A, B)) \xrightarrow{\times((f,g))} \times((A', B'))$*. Éste es exactamente el diagrama que habíamos denotado* $A \times B \xrightarrow{f \times g} A' \times B'$*.*

Observar que se asume acá que se ha elegido un diagrama $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ para cada par de objetos A y B y en base a dicha elección se define el funtor $\times$.

Ejercicio 187. *Comprobar que si* $\mathbf{C}$ *tiene productos,* $\times$ *es un funtor.*

Ejercicio (posgrado) 188. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría, y el siguiente un diagrama en* $\mathbf{C}$*,*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"'] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Entonces, si

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[d, "h'"'] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"'] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

son pullbacks, entonces

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g' \circ f'"] \arrow[d, "h''"'] & D \arrow[d, "h"'] \\ A \arrow[r, "g \circ f"] & C \end{tikzcd}$$

también lo es.

Recíprocamente, si

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g' \circ f'"] \arrow[d, "h''"'] & D \arrow[d, "h"'] \\ A \arrow[r, "g \circ f"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"'] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

son pullbacks, entonces

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[d, "h'"'] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

también lo es.

Ejercicio (posgrado) 189. *Sea* **C** *una categoría con el siguiente triángulo conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\alpha"'] & \\ & B \arrow[dl, "\beta"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Entonces, si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B' \arrow[r, "h_\beta"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

son pullbacks, entonces, hay una única flecha $A' \xrightarrow{\gamma'} B'$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, "\gamma'"] \arrow[dd, "\alpha'"'] & & A \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\alpha"] & \\ & B' \arrow[rr, "h_\beta"] \arrow[dl, "\beta'"] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ C' \arrow[rr, "h"'] & & C & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Prop 190. *Pullback es un funtor. Sea* $C' \xrightarrow{h} C$ *en una categoría* $\mathbf{C}$ *con pullbacks, entonces hay un funtor* $\mathbf{C}/C \xrightarrow{h*} \mathbf{C}/C'$ *que lleva el objeto (de* $\mathbf{C}/C$*)* $A \xrightarrow{\alpha} C$ *en el objeto (de* $\mathbf{C}/C'$*)* $C' \times_C A \xrightarrow{\alpha'} C'$ *donde* α' *es la paralela a* α *en el pullback entre* α *y* h*. El efecto de* $h*$ *sobre una flecha (de* $\mathbf{C}/C$*)* $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$ *está dada por el ejercicio 189.*

En la proposición, la flecha h está fija. Dado el objeto α, para obtener $h*(\alpha)$ se usa que $\mathbf{C}$ tiene pullbacks, en particular el de h y α:

$$\begin{tikzcd} C' \times_C A \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ C' \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

de donde $h*(\alpha) = \alpha'$ es el efecto de $h*$ en objetos de $\mathbf{C}/C$.

Dada una flecha $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$ de $\mathbf{C}/C$, podemos formar el pullback de α y el de β obteniendo un diagrama como el del ejercicio 189, la existencia y unicidad de γ' nos permite tomar $h*(\gamma) = \gamma'$ como el efecto de $h*$ en las flechas.

Ejercicio (posgrado) 191. *Comprobar que* $h*$ *es un funtor.*