(Novena clase: Límites y colímites)

Las definiciones de objeto terminal, producto binario, ecualizador y pullback, son casos particulares de un concepto general, llamado límite, que presentaremos a continuación. Además, la equivalencia demostrada de que una categoría tiene objeto terminal y pullbacks sii tiene productos finitos y ecualizadores puede completarse con una tercera propiedad equivalente a las dos anteriores: la de tener todos los límites finitos.

Lo mismo puede decirse en el mundo dual: una categoría tiene objeto inicial y pushouts sii tiene coproductos finitos y coecualizadores sii tiene todos los colímites finitos.

Además el resultado puede generalizarse más allá de lo finito, si se consideran límites, productos y ecualizadores de igual cardinalidad.

Diagrama, cono y límite, intuitivamente. Para definir límite, se definen previamente los conceptos de diagrama y cono.

Por ejemplo, en el caso del producto de A y B en una categoría $\mathbf{C}$, el diagrama será

$$A \qquad\qquad B$$

y los conos serán todos los diagramas (acá usamos la palabra en el sentido habitual, no en el que acabamos de definir) de la forma

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$$

que conmutan (en este caso la conmutatividad no significa nada). Como vimos la clase pasada al considerar la categoría $\mathbf{C}/AB$, los conos forman una categoría y el límite u objeto terminal de dicha categoría (si existe) es el producto entre A y B.

En el caso del pullback entre $A \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$ en una categoría $\mathbf{C}$, el diagrama será

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

y los conos serán todos los diagramas (en el sentido habitual de la palabra) de la forma

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

que conmutan. Tal como se hizo en el caso del producto, estos conos forman una categoría y el límite u objeto terminal de dicha categoría (si existe) es el pullback entre f y g.

Ejercicio 192. *Identificar diagrama, cono y límite para el caso del ecualizador.*

Diagrama, cono y límite, formalmente.

Definición 193. *Dadas dos categorías* $\mathbf{J}$ *y* $\mathbf{C}$*, un **diagrama de tipo*** $\mathbf{J}$ *en* $\mathbf{C}$ *es un funtor*

$$\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$$

Ejemplo 194. *En el caso del producto, la categoría* $\mathbf{J}$ *consiste de dos objetos (llamemosle i y j) y ninguna flecha (salvo las identidades). El funtor D se define por $D(i) = A$ y $D(j) = B$ (además de definirse de manera obvia para las identidades). Esto define el diagrama que se consideró más arriba.*

Ejemplo 195. *En el caso del pullback, la categoría* $\mathbf{J}$ *consiste de tres objetos y dos flechas (además de las identidades):*

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[d, "\beta"'] \\ i \arrow[r, "\alpha"] & k \end{tikzcd}$$

El funtor D se define por $D(i \xrightarrow{\alpha} k) = A \xrightarrow{f} C$ y $D(j \xrightarrow{\beta} k) = B \xrightarrow{g} C$.

Ejercicio 196. *Definir una categoría* $\mathbf{J}$ *y un funtor D adecuados para el diagrama correspondiente a ecualizadores.*

Definición 197. *Dado un diagrama* $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ *de tipo* $\mathbf{J}$*, un* ***cono*** *al diagrama D consiste de un objeto C de la categoría* $\mathbf{C}$ *y una familia de flechas en* $\mathbf{C}$*, una para cada objeto del diagrama D,*

$$C \xrightarrow{c_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

tal que todos los triángulos formados por estas flechas con las del diagrama D

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c_j"] \arrow[d, "c_i"'] & D(j) \\ D(i) \arrow[ur, "D(\alpha)"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad i \xrightarrow{\alpha} j \qquad \in \qquad \mathbf{J}_1$$

conmutan.

Ejemplo 198. *En el caso del producto, los conos consisten de un objeto C y un par de flechas (una familia de dos flechas), una $C \xrightarrow{f} A$ (o sea $C \xrightarrow{c_i} D(i)$) y otra $C \xrightarrow{g} B$ (o sea $C \xrightarrow{c_j} D(j)$). En este caso no hay flechas en el diagrama D por lo que no hay triángulos que deban conmutar. Un cono, entonces tiene la forma $A \xleftarrow{c_i} C \xrightarrow{c_j} B$.*

En realidad, para ser exactos, sí hay flechas en el diagrama D: las identidades $1_{D(i)} = 1_A$ y $1_{D(j)} = 1_B$, pero los triángulos correspondientes conmutan trivialmente:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c_i"] \arrow[d, "c_i"'] & D(i) \\ D(i) \arrow[ur, "1_{D(i)}"'] & \end{tikzcd}$$

La conmutatividad de estos triángulos vale trivialmente en todo cono, por eso solo se considerarán los casos correspondientes a flechas de D que no son identidades.

Ejemplo 199. *En el caso del pullback, los conos consisten de un objeto D y (una familia de) tres flechas: $D \xrightarrow{c_i} A$, $D \xrightarrow{c_j} B$ y $D \xrightarrow{c_k} C$ tales que los triángulos*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "c_i"'] & C \\ A \arrow[ur, "D(\alpha)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "c_j"'] & C \\ B \arrow[ur, "D(\beta)"'] & \end{tikzcd}$$

conmuten. Del primero se deduce que c_k queda unívocamente determinado por c_i y del segundo, por c_j. En realidad, esto solo es posible si $D(\alpha) \circ c_i = D(\beta) \circ c_j$. Se observa que la conmutatividad de los triángulos equivale a la del diagrama.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "c_j"] \arrow[d, "c_i"'] \arrow[dr, "c_k"] & B \arrow[d, "D(\beta)"] \\ A \arrow[r, "D(\alpha)"] & C \end{tikzcd}$$

donde c_k sigue estando determinado por c_i (o por c_j) y por ello se omite en la definición habitual de pullback.

Ejercicio 200. *¿Cuáles son los conos correspondientes a la definición de ecualizador?*

Ejercicio 201. *Dado un diagrama $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$, comprobar que la collección de conos a D forman una categoría $\mathbf{Cone}(D)$, donde una flecha h del cono*

$$C \xrightarrow{c_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

al cono

$$C' \xrightarrow{c'_j} D(j) \qquad\qquad j \in \mathbf{J}_0$$

es una flecha $C \xrightarrow{h} C'$ *tal que para todo* $j \in \mathbf{J}_0$ *el triángulo*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 202. *Un **límite** para el diagrama* $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ *es un objeto terminal de la categoría* $\mathbf{Cone}(D)$. *Un **límite** se dice **finito** cuando la categoría* $\mathbf{J}$ *es finita.*

El límite (si existe) es un objeto en la categoría $\mathbf{Cone}(D)$, es decir, es un cono: un objeto de $\mathbf{C}$ y una familia de flechas. Es habitual escribir el objeto de $\mathbf{C}$ en cuestión como

$$\varprojlim_j D(j)$$

y también como $\varprojlim_j D(j)$, y las flechas del cono como

$$\varprojlim_j D(j) \xrightarrow{p_i} D(i)$$

para cada $i \in \mathbf{J}_0$.

Ejemplo 203. *En el caso del producto, la categoría* $\mathbf{Cone}(D)$ *tiene por objetos a los conos ya mencionados, y por flechas entre el cono* $A \xleftarrow{c_i} C \xrightarrow{c_j} B$ *y el cono* $A \xleftarrow{c'_i} C' \xrightarrow{c'_j} B$, *a las flechas* $C \xrightarrow{h} C'$ *tal que los triángulos*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_i"'] & C' \arrow[d, "c'_i"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & B \end{tikzcd}$$

conmutan, lo que equivale a que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "c_j"] & \\ A & C' \arrow[l, "c'_i"'] \arrow[r, "c'_j"] & B \end{tikzcd}$$

conmute. Sobre el $\varprojlim_j D(j)$, *debe ser el objeto terminal de esta categoría. Es decir, debe ser un cono* $A \xleftarrow{p_i} \varprojlim_j D(j) \xrightarrow{p_j} B$ *de* $\mathbf{Cone}(D)$ *tal que para todo cono*

$A \xleftarrow{c_i} C \xrightarrow{c_j} B$ *de* $\mathbf{Cone}(D)$, *exista una única* $C \xrightarrow{h} \varprojlim_j D(j)$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "c_j"] & \\ A & \varprojlim_j D(j) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "p_j"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, coincide exactamente con la definición de producto.

Ejercicio 204. *Hacer explícita la categoría* $\mathbf{Cone}(D)$ *para el pullback, comprobar que el objeto* $\varprojlim_j D(j)$ *es el pullback.*

Ejercicio 205. *Hacer explícita la categoría* $\mathbf{Cone}(D)$ *para el ecualizador, comprobar que el objeto* $\varprojlim_j D(j)$ *es el ecualizador.*

Ejercicio 206. *¿Cuál sería* $\mathbf{J}$ *y* D*, cuáles los conos, cuál la categoría* $\mathbf{Cone}(D)$ *para obtener que el objeto terminal de la categoría* C *sea* $\varprojlim_j D(j)$*?*

Equivalencia con pullbacks y objeto terminal. Como adelantamos, es posible agregar a la equivalencia entre tener objeto terminal y pullbacks, por un lado, y tener productos finitos y ecualizadores, por el otro, una más: la de tener todos los límites finitos.

Prop 207. *Una categoría* $\mathbf{C}$ *tiene todos los límites finitos sii tiene los productos finitos y ecualizadores (sii tiene objeto terminal y pullbacks).*

Ya hemos demostrado (en los ejemplos precedentes) que productos finitos y ecualizadores son casos particulares de límites. Resta demostrar el recíproco: asumimos que $\mathbf{C}$ tiene productos finitos y ecualizadores y, con ello, comprobaremos que también tiene los demás límites finitos.

Para demostrarlo usamos la definición de producto generalizado, que como su nombre lo indica es una generalización sencilla de la de producto binario. Dada una categoría $\mathbf{C}$, y dada una familia de objetos $A_i \in \mathbf{C}_0$ para i en un conjunto arbitrario I, el producto de la familia de objetos es un objeto junto con una familia de flechas (proyecciones):

$$\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j \qquad\qquad j \in I$$

tal que para todo otro objeto que venga equipado también con igual número de flechas

$$C \xrightarrow{f_j} A_j \qquad\qquad j \in I$$

exista una única flecha

$$C \xrightarrow{<f_i|i\in I>} \prod_{i\in I} A_i$$

tal que los triángulos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "<f_i|i \in I>"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \end{tikzcd}$$

conmuten para todo $j \in I$.

Luce diferente porque en vez de tener dos objetos, dos flechas, y finalmente dos triángulos, como la definición de producto binario, tiene un objeto, una flecha y finalmente un triángulo para cada $j \in I$.

Si I es finito, este producto es isomorfo al que se obtiene iterando el producto binario un número suficiente de veces.

Ahora sí, retomamos la prueba de la Proposición. Sea $\mathbf{J}$ una categoría finita y $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ un diagrama. Sean

$$\prod_{i\in \mathbf{J}_0} D(i) \qquad\qquad \prod_{\alpha\in \mathbf{J}_1} D(cod(\alpha))$$

los productos finitos indicados. Son finitos porque están indexados por $\mathbf{J}_0$ en el primer caso, y $\mathbf{J}_1$ en el segundo, y ambos índices son finitos. En el primer caso los índices son objetos de $\mathbf{J}$ y por eso las proyecciones resultarán indexadas por objetos.

(1) $$\prod_{i\in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{\pi_j} D(j) \qquad j \in \mathbf{J}_0$$

En el segundo caso, los índices son flechas de $\mathbf{J}$, por eso las proyecciones resultarán indexadas por flechas:

$$\prod_{\alpha\in \mathbf{J}_1} D(cod(\alpha)) \xrightarrow{\pi_\beta} D(cod(\beta)) \qquad \beta \in \mathbf{J}_1$$

Los objetos que participan del producto son esencialmente los mismos: $D(i)$ para $i \in \mathbf{J}_0$. La diferencia es el número de veces que participan del producto. En el primer producto, participan una vez cada uno, mientras que en el segundo puede ser cero o más veces dependiendo de cuántas veces aparezca i en el codominio de una flecha de $\mathbf{J}_1$.

A continuación se definen dos flechas entre estos productos

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in \mathbf{J}_0} D(i) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{\alpha\in \mathbf{J}_1} D(cod(\alpha)) \end{tikzcd}$$

Para definir cada una de ellas usamos la propiedad universal: para cada $\alpha \in \mathbf{J}_1$ debemos determinar una flecha

$$\prod_{i\in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{f_\alpha} D(cod(\alpha))$$

La ecuación (1) indica que podemos tomar $f_\alpha = \pi_{cod(\alpha)}$ para cada $\alpha \in \mathbf{J}_1$. Por definición del producto obtenemos una única $\phi =< \pi_{cod(\alpha)} | \alpha \in \mathbf{J}_1 >$ tal que para todo $\alpha \in \mathbf{J}_1$, $\pi_\alpha \circ \phi = \pi_{cod(\alpha)}$.

Para definir la flecha ψ también debemos proporcionar para cada $\alpha \in \mathbf{J}_1$ una flecha

$$\prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{f_\alpha} D(cod(\alpha))$$

Esta vez combinamos la ecuación (1) que no dice que

$$\prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{\pi_{dom(\alpha)}} D(dom(\alpha))$$

con el hecho de que $D(dom(\alpha)) \xrightarrow{D(\alpha)} D(cod(\alpha))$ por ser D funtor, lo que nos permite tomar $f_\alpha = D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)}$. Nuevamente por definición del producto obtenemos una única $\psi =< D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)} | \alpha \in \mathbf{J}_1 >$ tal que para todo $\alpha \in \mathbf{J}_1$, $\pi_\alpha \circ \psi = D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)}$.

Definidas las dos flechas ϕ y ψ definimos su ecualizador

$$E \xrightarrow{e} \prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha \in \mathbf{J}_1} D(cod(\alpha))$$

Se puede demostrar que el ecualizador es $\varprojlim_j D(j)$. Para ello, primero construimos el cono definiendo una flecha e_j desde E a cada $D(j)$:

$$E \xrightarrow{e} \prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i) \xrightarrow{\pi_j} D(j)$$

Tomamos $e_j = \pi_j \circ e$.

Veamos que es un cono: si $i \xrightarrow{\alpha} j$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e_j"] \arrow[d, "e_i"'] & D(j) \\
D(i) \arrow[ur, "D(\alpha)"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto,

$$\begin{array}{rcll}
D(\alpha) \circ e_i & = & D(\alpha) \circ \pi_i \circ e & \text{por def de } e_i \\
 & = & D(\alpha) \circ \pi_{dom(\alpha)} \circ e & \text{por } i = dom(\alpha) \\
 & = & \pi_\alpha \circ \psi \circ e & \text{por prop de } \psi \\
 & = & \pi_\alpha \circ \phi \circ e & \text{por } e \text{ ecualizador} \\
 & = & \pi_{cod(\alpha)} \circ e & \text{por prop de } \phi \\
 & = & \pi_j \circ e & \text{por } j = cod(\alpha) \\
 & = & e_j & \text{por def de } e_j
\end{array}$$

Ahora sea C con $C \xrightarrow{c_i} D(i)$ para cada $i \in \mathbf{J}_0$. Por definición de producto, existe una única flecha $c =< c_i | i \in \mathbf{J}_0 >$ de C en $\prod_{i \in \mathbf{J}_0} D(i)$ tal que para todo $i \in \mathbf{J}_0$, $c_i = \pi_i \circ c$.

Igual que recién, podemos calcular

$$\begin{aligned} D(\alpha)\circ c_i &= D(\alpha)\circ\pi_i\circ c \\ &= D(\alpha)\circ\pi_{dom(\alpha)}\circ c \\ &= \pi_\alpha\circ\psi\circ c \\ c_j &= \pi_j\circ c \\ &= \pi_{cod(\alpha)}\circ c \\ &= \pi_\alpha\circ\phi\circ c \end{aligned}$$

Como C con $C \xrightarrow{c_i} D(i)$ para cada $i \in \mathbf{J}_0$ es un cono sii $D(\alpha)\circ c_i = c_j$ para todo $i \xrightarrow{\alpha} j \in \mathbf{J}_1$, ser un cono equivale a que se satisfaga $\pi_\alpha\circ\psi\circ c = \pi_\alpha\circ\phi\circ c$ para todo $\alpha \in \mathbf{J}_1$, o más brevemente, a que $\psi\circ c = \phi\circ c$.

Por lo tanto, si C con $C \xrightarrow{c_i} D(i)$ para cada $i \in \mathbf{J}_0$ es un cono, c "ecualiza" ϕ y ψ, por lo tanto existe una única flecha $C \xrightarrow{u} E$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & \prod_{i\in\mathbf{J}_0} D(i) \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero la conmutatividad de este diagrama es equivalente a la de

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e_i"] & D(i) \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "c_i"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $i \in \mathbf{J}_0$. Por lo tanto, E con $E \xrightarrow{e_i} D(i)$ es $\varprojlim_j D(j)$, dando por terminada la prueba.

Epílogo. No hace falta rehacer la prueba para convencerse de que el mismo resultado puede alcanzarse para otras cardinalidades.

Quedan también resultados parecidos para el mundo dual:

Ejercicio 208. *Definir la noción de* ***cocono*** *por analogía con la de cono. Definir la categoría* **Cocone**(D). *Definir la noción de colímite por análogía con la de límite (notación* $\varinjlim_j D(j)$*).*

Ejercicio 209. *¿Se satisface que* **Cocone**$(D) \cong$ **Cone**$(D)^{\mathbf{op}}$*?*

Ejercicio 210. *Ejemplificar con las definiciones de coproducto, coecualizador, etc.*