(Primer take-home parcial, a entregar el 28/9)

Ejercicio 1. *Se define el funtor F de* $\mathbf{Set}*$ *en* $\mathbf{Pfn}$*:*

- $F_0((a,A)) = A - \{a\}$
- $F_1((a,A) \xrightarrow{f} (b,B)) = \{(x,y) \in f \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x \neq a \wedge y \neq b\}$.

Comprobar que es un funtor. Definir un funtor G de $\mathbf{Pfn}$ *a* $\mathbf{Set}*$ *tal que* $F \circ G = 1_{\mathbf{Pfn}}$.

Ejercicio 2. *Completar y demostrar las siguientes propiedades para una categoría con coproductos binarios, asumiendo que* $f + g = [\iota_1 \circ f, \iota_2 \circ g]$

1. $[\iota_1, \iota_2] = \ldots$
2. $h \circ [f, g] = \ldots$
3. $(f + g) \circ (h + k) = \ldots$
4. $1_A + 1_B = \ldots$
5. $[f, g] \circ (h + k) = \ldots$

Ejercicio 3. *Demostrar que si* $B \xrightarrow{q} Q$ *es un coecualizador entonces q es epi.*

Ejercicio 4. *Demostrar que si el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

es un pullback, entonces, si g es mono, p_1 tambíen lo es.

Ejercicio 5. *Demostrar que* $1/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}*$.

Ejercicio 6. *Demostrar que* $\mathbf{C} \xleftarrow{\mathbf{dom}} \mathbf{C}_{\rightarrow} \xrightarrow{\mathbf{cod}} \mathbf{C}$ *no es un diagrama producto (por ejemplo, para alguna categoría* $\mathbf{C}$*, hallar* $\mathbf{C} \xleftarrow{F} \mathbf{C} \times \mathbf{C} \xrightarrow{G} \mathbf{C}$ *pero que, sin embargo, no haya un único funtor de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}_{\rightarrow}$*).*

Ejercicio 7. *Sea el siguiente diagrama en* $\mathbf{Set}$*:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] & C & B \arrow[l, "h"'] & D & E \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & F
\end{tikzcd}$$

demostrar que existe un conjunto P y funciones a, b, d y e tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & P \arrow[dll, "a"'] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, "d"] \arrow[drr, "e"] & & & \\
A \arrow[r, "g"] & C & B \arrow[l, "h"'] & D & E \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & F
\end{tikzcd}$$

conmuta; y además que es universal con esa propiedad, es decir, que para todo conjunto Q y funciones a', b', d' y e' tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & Q \arrow[dlll, "a'"'] \arrow[d, "b'"'] \arrow[dr, "d'"] \arrow[drr, "e'"] & & & \\
A \arrow[r, "g"] & C & & B \arrow[ll, "h"'] & D & E \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & F
\end{tikzcd}$$

conmute, existe una única flecha $Q \xrightarrow{u} P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Q \arrow[dll, "a'"'] \arrow[dl, "b'"'] \arrow[dd, "u"'] \arrow[dr, "d'"] \arrow[drr, "e'"] & & \\
A & B & & D & E \\
 & & P \arrow[ull, "a"] \arrow[ul, "b"] \arrow[ur, "d"'] \arrow[urr, "e"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejercicio 8. *Sea* $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ *un diagrama. Demostrar que si* $\varprojlim_j D(j)$ *existe, es único salvo isomorfismo.*

Ejercicio (posgrado) 9. *Resolver los ejercicios 188, 189 y 191.*