

(PRIMER TAKE-HOME PARCIAL, A ENTREGAR EL 28/9)

Ejercicio 1. Se define el funtor F de \mathbf{Set}^* en \mathbf{Pfn} :

- $F_0((a, A)) = A - \{a\}$
- $F_1((a, A) \xrightarrow{f} (b, B)) = \{(x, y) \in f \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x \neq a \wedge y \neq b\}$.

Comprobar que es un funtor. Definir un funtor G de \mathbf{Pfn} a \mathbf{Set}^* tal que $F \circ G = 1_{\mathbf{Pfn}}$.

Ejercicio 2. Completar y demostrar las siguientes propiedades para una categoría con coproductos binarios, asumiendo que $f + g = [\iota_1 \circ f, \iota_2 \circ g]$

1. $[\iota_1, \iota_2] = \dots$
2. $h \circ [f, g] = \dots$
3. $(f + g) \circ (h + k) = \dots$
4. $1_A + 1_B = \dots$
5. $[f, g] \circ (h + k) = \dots$

Ejercicio 3. Demostrar que si $B \xrightarrow{q} Q$ es un coequalizador entonces q es epi.

Ejercicio 4. Demostrar que si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & B \\ p_1 \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

es un pullback, entonces, si g es mono, p_1 también lo es.

Ejercicio 5. Demostrar que $1/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}^*$.

Ejercicio 6. Demostrar que $\mathbf{C} \xleftarrow{\text{dom}} \mathbf{C}_- \xrightarrow{\text{cod}} \mathbf{C}$ no es un diagrama producto (por ejemplo, para alguna categoría \mathbf{C} , hallar $\mathbf{C} \xleftarrow{F} \mathbf{C} \times \mathbf{C} \xrightarrow{G} \mathbf{C}$ pero que, sin embargo, no haya un único funtor de $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}_-$).

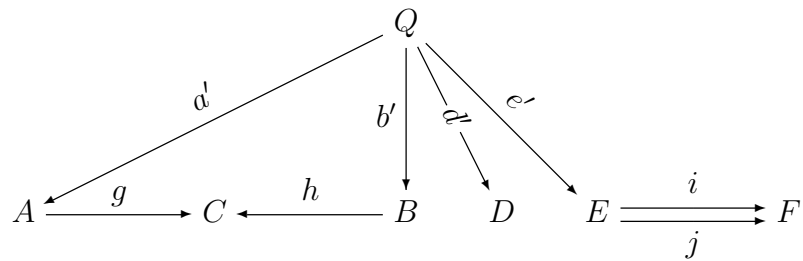
Ejercicio 7. Sea el siguiente diagrama en \mathbf{Set} :

$$A \xrightarrow{g} C \xleftarrow{h} B \quad D \quad E \xrightleftharpoons[j]{i} F$$

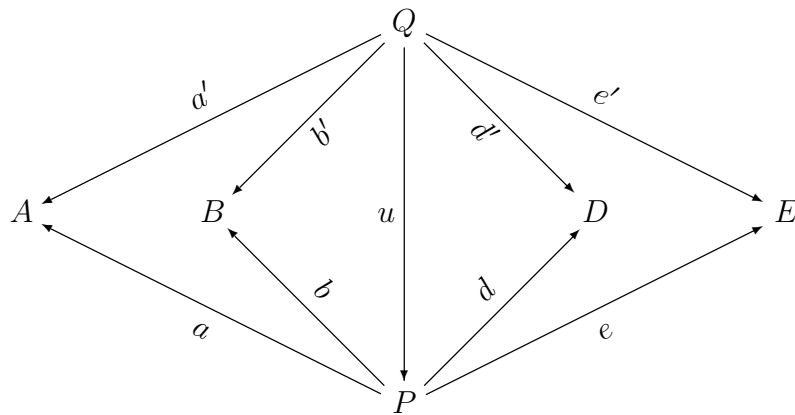
demostrar que existe un conjunto P y funciones a, b, d y e tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P & & & \\ & & & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & & & a & b & d & e \\ & & & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ A & \xrightarrow{g} & C & \xleftarrow{h} & B & \quad D & \quad E \xrightleftharpoons[j]{i} F \end{array}$$

conmuta; y además que es universal con esa propiedad, es decir, que para todo conjunto Q y funciones d' , b' , d y e' tales que el diagrama



conmute, existe una única flecha $Q \xrightarrow{u} P$ tal que el diagrama



conmuta.

Ejercicio 8. Sea $\mathbf{J} \xrightarrow{D} \mathbf{C}$ un diagrama. Demostrar que si $\lim_{\leftarrow j} D(j)$ existe, es único salvo isomorfismo.

Ejercicio (posgrado) 9. Resolver los ejercicios 188, 189 y 191.