(SEGUNDO TAKE-HOME PARCIAL, A ENTREGAR ANTES DEL 5/12 O DEL 21/12)

Ejercicio (posgrado) 1. *Sea* **Cpo** *la categoría cuyos objetos son posets* W*, tales que para toda cadena* $w_0 \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \in W$ *existe un supremo en* W*, es decir,* $w \in W$ *tal que*

1. w *es cota superior: para todo* $i \in \mathbb{N}$*,* $w_i \leq w$*, y*
2. w *es la menor de ellas: si para todo* $i \in \mathbb{N}$*,* $w_i \leq x$*, entonces* $w \leq x$*.*

Se escribe $w = \sqcup_i w_i$*. Un poset* W *que satisfaga esto se llama cpo (por complete partial order).*

Una flecha $W \xrightarrow{f} W'$ *es una función monótona (que preserva orden,* $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y)$*) y continua (que preserva supremo de cadenas, para todo* $w_0 \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \in W$*,* $f(\sqcup_i w_i) = \sqcup'_i f(w_i)$*). Para ser cuidadosos, deberíamos habernos asegurado de que* $f(w_0) \leq' \ldots \leq' f(w_n) \leq' \ldots$ *es una cadena antes de escribir* $\sqcup'_i f(w_i)$*. Pero lo es ya que se pidió que* f *fuera monótona.*

Comprobar que **Cpo** *es una categoría cartesiana cerrada. Para ello, proponer definiciones adecuadas de objeto terminal, producto cartesiano y objeto exponencial y comprobar que satisfacen las propiedades universales. Tener en cuenta que cada uno de ellos deben ser también cpos.*

Ejercicio 2. *Demostrar que si* $\mathbf{D}$ *tiene coproductos binarios, entonces* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *también (parte del ejercicio 241).*

Ejercicio 3. *Resolver el ejercicio 247.*

Ejercicio 4. *Resolver el ejercicio 280.*

Ejercicio 5. *Resolver el ejercicio 290.*

Ejercicio 6. *Resolver los ejercicios 322 y 323.*

Ejercicio 7. *Para cada una de las adjunciones* $\Delta \dashv \times$ *y* $+ \dashv \Delta$ *identificar el unit y la multiplicación de la mónada correspondiente.*

Ejercicio 8. *Sea* $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *el funtor definido por* $\mathcal{P}(X \xrightarrow{f} Y) = im(f) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$*. Sea* $\eta_X : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *definida por* $\eta_X(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ *y* $\mu_X : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *definida por* $\mu_X(\alpha) = \bigcup \alpha \in \mathcal{P}(X)$*.*

Comprobar la naturalidad de η *y* μ*, y que* $(\mathcal{P}, \{\_\}, \bigcup)$ *es una mónada.*

Ejercicio 9. *Resolver el ejercicio 333.*

Ejercicio 10. *Resolver el ejercicio 345.*

Ejercicio 11. *Resolver el ejercicio 353.*