

Objetivos: Comparar las nociones de predominio y de dominio; comprender los dominios de espacios de funciones y de productos. Distinguir y caracterizar funciones monótonas, estrictas y continuas. Establecer supremos de conjuntos, en particular de cadenas, en predomios; determinar si una función es continua o no y probarlo en caso que lo sea. Identificar puntos fijos para funciones continuas; aplicar el teorema del menor punto fijo.

Repaso.

- (1) Explicar conceptualmente el error cometido en cada una de las siguientes sustituciones.

Sea $p = \exists r.(0 \leq r < y) \wedge (x = y * z + r)$.

(a) $p/(id \mid y: 3 + r) = (\exists r.(0 \leq r < 3 + r) \wedge (x = y * z + r))$

(b) $p/(id \mid y: 3 + r) = (\exists t.(0 \leq t < 3 + r) \wedge (x = 3 + r * z + t))$

(c) $p/(id \mid r: 3 + w) = (\exists t.(0 \leq 3 + w < y) \wedge (x = y * z + 3 + w))$

- (2) Decida si las siguientes afirmaciones son ciertas o no; justifique.

(a) Para toda frase p y toda sustitución δ , se cumple $FV(p) \subseteq FV(p/\delta)$.

(b) Para toda frase p y toda sustitución δ , se cumple

$$FV(p/\delta) \subseteq FV(p) \cup \bigcup_{v \in FV(p)} FV(\delta, v)$$

- (3) Dada una frase p , una sustitución δ y un estado σ , definir un estado σ' tal que $\llbracket p/\delta \rrbracket \sigma = \llbracket p \rrbracket \sigma'$.

- (4) Dé un ejemplo concreto en su lenguaje de programación preferido que evidencie el teorema de reemplazo. Ayuda: piense en qué contexto hay variables ligadas.

Ejercicios.

- (1) Decida si los siguientes órdenes parciales son predomios ó dominios. Si lo necesita defina la relación de orden para $A \rightarrow P$, donde P es un orden parcial.

(a) $\langle \text{intexp} \rangle$, con el orden discreto (b) $\langle \text{intexp} \rangle \rightarrow \mathbb{B}_\perp$ (c) $\mathbb{B}_\perp \rightarrow \langle \text{intexp} \rangle$

- (2) Hacer diagramas que representen los siguientes dominios, si es posible.

(a) \mathbb{B}_\perp (b) \mathbb{N}_\perp
 (c) $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}_\perp$ (d) \mathbb{N} con el orden usual
 (e) \mathbb{N}^∞ (f) $\mathbb{N}^\infty \rightarrow \mathbb{N}^\infty$

- (3) Indique el menor elemento para cada dominio de los ejercicios 1 y 2.

- (4) Calcule, en caso de existir, el supremo de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par} \}$, en \mathbb{N}_\perp (b) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par} \}$, en \mathbb{N}^∞

(c) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo} \}$, en \mathbb{N}^∞ (d) $\mathcal{A} = \{V, F\}$, en \mathbb{B}_\perp

(e) $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\perp$, donde

$$f_n x = \begin{cases} x & \text{si } |x - 10| < \log(n + 1) \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(f) $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\perp$, donde

$$f_n x = \begin{cases} 1 & \text{si } x|n \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- (5) Para cada uno de los siguientes espacios de funciones, dar ejemplos de: (a) funciones monótonas y no continuas; (b) funciones continuas; y (c) funciones continuas y estrictas.

$$\begin{array}{ll} \text{(a) de } \mathbb{B}_\perp \text{ en } \mathbb{B}_\perp & \text{(b) de } \mathbb{N}_\perp \text{ en } \mathbb{N}_\perp \\ \text{(c) de } \mathbb{N}^\infty \text{ en } \mathbb{N}_\perp & \text{(d) de } \mathbb{N}^\infty \text{ en } \mathbb{N}^\infty \end{array}$$

- (6) En cada uno de los casos del ejercicio 5 caracterizar todas las funciones continuas.
 (7) En cada uno de los casos del ejercicio 6 indicar cuáles son estrictas y cuáles no.
 (8) Para cada una de las siguientes funciones caracterizar los puntos fijos; decidir si existe un menor punto fijo. Si no existe, explicar por qué.

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & h: \mathbb{N}^\infty \rightarrow \mathbb{N}^\infty \\ f n = n & h n = n + 1 \\ g: \langle \text{intexp} \rangle \rightarrow \langle \text{intexp} \rangle & k: \mathbb{N}^\infty \rightarrow \mathbb{N}^\infty \\ g e = e & k n = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n < 8 \\ n & \text{caso contrario} \end{cases} \end{array}$$

- (9) Considere las siguientes $F \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\perp) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\perp)$,

$$\begin{array}{l} F f = \begin{cases} f & \text{si } f \text{ es una función total} \\ \perp_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\perp} & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ F f n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ f(n - 2) & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{array}$$

- (a) Determine si F es continua.
 (b) Calcule $F^{(i)} \perp_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\perp}$, para $i = 0, 1, 2$.
- (10) Calcular la menor $f \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$ que satisface la siguiente ecuación

$$f n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n * f(n - 1) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Notar que n corre sobre todo \mathbb{Z} . Asumir que la multiplicación y la suma son estrictas.

- (11) Caracterizar las funciones que satisfacen la ecuación

$$f n = \begin{cases} f(n - 1) & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ n * f(n - 1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Comparar esta ecuación con la ecuación del ejercicio 10. ¿Tienen las mismas soluciones?