1. Definiendo el problema

Queremos encontrar la menor solución a la ecuación

$$f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases} \tag{*}$$

Definimos $F \in (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp)$ por

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

Así, Ffn es un nombre para la parte derecha de (*). La ecuación (*) se puede reescribir como

$$f\,n = F\,f\,n$$

O más brevemente, $f = Ff$. Es decir que buscar una solución a (*) es lo mismo que buscar un punto fijo de F. Y buscar la menor solución de (*) es lo mismo que buscar el menor punto fijo de F. Asumiendo que F es continua, la menor solución de (*) es $\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i\perp')$ donde $\perp'$ es el elemento mínimo de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$, es decir, la función que devuelve siempre $\perp$.

2. Cálculo de $\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i\perp')$

- $i = 0$, entonces $F^i\perp' n = F^0\perp' n = \perp' n = \perp$
- $i = 1$, entonces

$$F^i\perp' n = F^1\perp' n = F\perp' n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ \perp'\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

- $i = 2$, entonces

$$F^i\perp' n = F^2\perp' n = F\,(F\perp')\,n = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ (F\perp')\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge (n-2) \in \{0,1\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \in \{0,1,2,3\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

De la misma forma se obtiene

- $i = 3$, entonces

$$F^i \perp' n = F^3 \perp' n = F\,(F^2 \perp')\, n = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ (F^2 \perp')\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n \,\%\, (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge (n-2) \in \{0,1,2,3\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

En general (se puede demostrar por inducción en i), se obtiene

$$F^i \perp' n = \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \in \{0,1,2,\ldots,2 * i - 1\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

Recordemos ahora (revisar las filminas y el audio!!) que $\mathbb{Z}_\perp$ es orden llano, por lo tanto la cadena

$$F^0 \perp' n \sqsubseteq F^1 \perp' n \sqsubseteq F^2 \perp' n \sqsubseteq \ldots$$

tiene 2 posibilidades:

- es la cadena $\perp \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \perp \sqsubseteq \ldots$ y por lo tanto $\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i \perp')\ n = \perp$
- existe algún i tal que $\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i \perp')\ n \neq \perp$. En este caso, $\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i \perp')\ n = F^i \perp' n = F^{i+1} \perp' n$ $= \ldots$

Esto nos permite deducir que :

$$\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i \perp')n = \bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i \perp' n) = \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } 0 \leq n \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

Es decir $\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i \perp')n = \text{mod2}\ n$, para todo n, es decir, $\bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}'(F^i \perp') = \text{mod2}$ que es la solución que se deseaba.