Teorema (Teorema de Coincidencia).

(1) Si para toda $w \in FV(c)$, $\sigma w = \sigma' w$, entonces
(a) $[\![c]\!]\sigma = \bot = [\![c]\!]\sigma'$
(b) $[\![c]\!]\sigma \neq \bot \neq [\![c]\!]\sigma'$ y para toda $w \in FV(c)$ vale $([\![c]\!]\sigma)\, w = ([\![c]\!]\sigma')\, w$
(2) Si $[\![c]\!]\sigma \neq \bot$, entonces para toda $w \notin FA(c)$ vale $([\![c]\!]\sigma)w = \sigma\, w$

Práctico 4 - Ejercicio 10.
Usando el Teorema de coincidencia para comandos probar que para todo par de comandos c_0, c_1, si

$$FV\ c_0 \cap FA\ c_1 = FV\ c_1 \cap FA\ c_0 = \emptyset,$$

entonces $[\![c_0; c_1]\!] = [\![c_1; c_0]\!]$.

Solución.

La estrategia para probar esta propiedad consistirá en probar algunos resultados parciales que van a ser útiles en general y luego demostrar que para todo $\sigma \in \Sigma$ vale alguna de las siguientes

- $[\![c_0; c_1]\!]\sigma = \bot = [\![c_1; c_0]\!]\sigma$.
- *para toda $w \in \langle var \rangle$, $([\![c_0; c_1]\!]\sigma)\, w = ([\![c_1; c_0]\!]\sigma)\, w$.*

Empecemos probando los resultados intermedios que nos van a ser útiles:

(1) Si $[\![c_0]\!]\sigma \neq \bot$, entonces para todo $w \in FV(c_1)$ vale $\sigma\, w = ([\![c_0]\!]\sigma)w$.
(2) Si $[\![c_1]\!]\sigma \neq \bot$, entonces para todo $w \in FV(c_0)$ vale $\sigma\, w = ([\![c_1]\!]\sigma)w$.

Para el caso de (1), notar que si suponemos $[\![c_0]\!]\sigma \neq \bot$ y tomamos una variable cualquiera $w \in FV(c_1)$, entonces por nuestra hipótesis principal tenemos que $w \notin FA(c_0)$, por lo tanto utilizando la parte 2 del teorema de coincidencia tenemos que vale $\sigma\, w = ([\![c_0]\!]\sigma)w$. El caso de (2) es análogo.

Tomemos cualquier $\sigma \in \Sigma$, y probemos que $[\![c_0; c_1]\!]\sigma = \bot = [\![c_1; c_0]\!]\sigma$, para esto la estrategia que vamos a usar es probar que valen

- *Si $[\![c_0\, ;\, c_1]\!]\sigma = \bot$, entonces $[\![c_1\, ;\, c_0]\!]\sigma = \bot$*
- *Si $[\![c_1\, ;\, c_0]\!]\sigma = \bot$, entonces $[\![c_0\, ;\, c_1]\!]\sigma = \bot$*

Supongamos $[\![c_0\, ;\, c_1]\!]\sigma = [\![c_1]\!]_{\perp\!\!\!\perp}([\![c_0]\!]\sigma) = \bot$ y probemos que $[\![c_1\, ;\, c_0]\!]\sigma = [\![c_0]\!]_{\perp\!\!\!\perp}([\![c_1]\!]\sigma) = \bot$, para esto consideremos los siguientes casos:

- *Si $[\![c_0]\!]\sigma = \bot$ y $[\![c_1]\!]\sigma = \bot$, no hay nada que probar.*
- *Si $[\![c_0]\!]\sigma = \bot$ y $[\![c_1]\!]\sigma \neq \bot$ entonces por (2) tenemos que todo $w \in FV(c_0)$ vale $\sigma\, w = ([\![c_1]\!]\sigma)w$ y por (1a) del teorema de coincidencia concluimos*

$$[\![c_0]\!]\sigma = \bot = [\![c_0]\!]([\![c_1]\!]\sigma) = [\![c_0]\!]_{\perp\!\!\!\perp}([\![c_1]\!]\sigma) = [\![c_1\, ;\, c_0]\!]\sigma$$

- *Si $[\![c_0]\!]\sigma \neq \bot$ luego por (1) tenemos que para todo $w \in FV(c_1)$ vale $\sigma\, w = ([\![c_0]\!]\sigma)w$ y como antes usando (1a) del teorema de coincidencia recordando que supusimos que $[\![c_0\, ;\, c_1]\!]\sigma = \bot$*

$$[\![c_0\, ;\, c_1]\!]\sigma = [\![c_1]\!]_{\perp\!\!\!\perp}([\![c_0]\!]\sigma) = [\![c_1]\!]([\![c_0]\!]\sigma) = \bot = [\![c_1]\!]\sigma$$

luego podemos concluir

$$[\![c_1\, ;\, c_0]\!]\sigma = [\![c_0]\!]_{\perp\!\!\!\perp}([\![c_1]\!]\sigma) = [\![c_0]\!]_{\perp\!\!\!\perp}\bot = \bot$$

Por lo tanto, hemos probado de forma general que $[\![c_1\,;\,c_0]\!]\sigma = \perp$ *cuando* $[\![c_0\,;\,c_1]\!]\sigma = \perp$*. La prueba de la otra implicación es análoga. Y por lo tanto podemos concluir*

$$[\![c_0\,;\,c_1]\!]\sigma = \perp = [\![c_1\,;\,c_0]\!]\sigma$$

Ahora nos enfocamos en probar el caso en que cada semántica es distinta de $\perp$*, supongamos* $[\![c_0\,;\,c_1]\!]\sigma = \sigma_{0,1}$ *y* $[\![c_1\,;\,c_0]\!]\sigma = \sigma_{1,0}$*, lo que queremos probar es que para toda variable* $w \in \langle var\rangle$ *se cumple*

$$([\![c_0\,;\,c_1]\!]\sigma)\, w = \sigma_{0,1}\, w = \sigma_{1,0}\, w = ([\![c_1\,;\,c_0]\!]\sigma)\, w$$

Tomamos un w *cualquiera y lo primero que podemos notar es que si* $w \notin (FA(c_0) \cup FA(c_1))$*, es decir que* w *no es una variable asignada por* c_0 *ni por* c_1*, entonces independientemente del orden de estos comandos tenemos por (2) del teorema de coincidencia que*

$$([\![c_0\,;\,c_1]\!]\sigma)\, w = \sigma\, w = ([\![c_1\,;\,c_0]\!]\sigma)\, w$$

Si suponemos $w \in (FA(c_0) \cup FA(c_1))$*, entonces tenemos dos casos, que* w *sea una variable asignable en* c_0*, o que lo sea en* c_1

- *Supongamos* $w \in FA(c_0)$*, luego como estamos suponiendo* $[\![c_0\,;\,c_1]\!]\sigma = [\![c_1]\!]([\![c_0]\!]\sigma) \neq \perp$ *tenemos por (2) del teorema de coincidencia que para toda variable* $v \notin FA(c_1)$ *vale* $[\![c_1]\!]([\![c_0]\!]\sigma)\, v = ([\![c_0]\!]\sigma)\, v$*.*

  Además vale $[\![c_1]\!]\sigma \neq \perp$ *ya que también estamos suponiendo* $([\![c_1\,;\,c_0]\!]\sigma) = [\![c_0]\!]([\![c_1]\!]\sigma) \neq \perp$*, por lo tanto tenemos por (2) que para todo* $v \in FV(c_0)$ *vale* $\sigma\, v = ([\![c_1]\!]\sigma) v$*, luego este resultado nos permite utilizar (1b del teorema de coincidencia para obtener que para toda variable* $v \in FV(c_0)$ *vale* $([\![c_0]\!]\sigma)\, v = [\![c_0]\!]([\![c_1]\!]\sigma)\, v$*.*

  Hemos probado entonces dos resultados relevantes
  - *Para toda variable* $v \notin FA(c_1)$ *vale* $[\![c_1]\!]([\![c_0]\!]\sigma)\, v = ([\![c_0]\!]\sigma)\, v$*.*
  - *Para toda variable* $v \in FV(c_0)$ *vale* $([\![c_0]\!]\sigma)\, v = [\![c_0]\!]([\![c_1]\!]\sigma)\, v$*.*

  Notar que $w \in FA(c_0) \subseteq FV(c_0)$ *y por lo tanto* $w \in FV(c_0)$ *y* $w \notin FA(c_1)$*, luego podemos concluir que para* $w \in FA(c_0)$ *vale*

  $$[\![c_0]\!]([\![c_1]\!]\sigma)\, w = [\![c_0]\!]\sigma\, w = [\![c_1]\!]([\![c_0]\!]\sigma)\, w$$

- *Si* $w \in FA(c_1)$ *podemos utilizar argumentos análogos y concluir que*

  $$[\![c_1]\!]([\![c_0]\!]\sigma)\, w = [\![c_1]\!]\sigma\, w = [\![c_0]\!]([\![c_1]\!]\sigma)\, w$$