Teorema 1 (Teorema de Coincidencia)**.**

(1) Si para toda $w \in FV(c)$, $\sigma w = \sigma' w$, entonces

(a) $[\![c]\!]\sigma = \bot = [\![c]\!]\sigma'$

(b) $[\![c]\!]\sigma \neq \bot \neq [\![c]\!]\sigma'$ y para toda $w \in FV(c)$ vale $([\![c]\!]\sigma)\, w = ([\![c]\!]\sigma')\, w$

(2) Si $[\![c]\!]\sigma \neq \bot$, entonces para toda $w \notin FA(c)$ vale $[\![c]\!]\sigma = \sigma\, w$

Demostración 1. *La prueba procede por inducción estructural. Caso $c =$ **while** b **do** c'. Luego la hipótesis inductiva para c' es:*

(1) Si para toda $w \in FV(c')$, $\sigma w = \sigma' w$, entonces

(a) $[\![c']\!]\sigma = \bot = [\![c']\!]\sigma'$

(b) $[\![c']\!]\sigma \neq \bot \neq [\![c']\!]\sigma'$ y para toda $w \in FV(c')$ vale $([\![c']\!]\sigma)\, w = ([\![c']\!]\sigma')\, w$

(2) Si $[\![c']\!]\sigma \neq \bot$, entonces para toda $w \notin FA(c')$ vale $[\![c']\!]\sigma = \sigma\, w$

Recordemos además que $[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ c]\!] = \bigsqcup_{i=0}^{\infty}{}' (F^i \bot')$, con $\bot' : \Sigma \to \Sigma_\bot$ y donde

$$F\, w\, \sigma = \begin{cases} w_{\bot\!\!\!\bot}([\![c]\!]\sigma) & si\ [\![b]\!]\sigma \\ \sigma & c.c. \end{cases} \tag{*}$$

*Entonces basta probar que para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$ tenemos (recordar que c ahora es el **while**)*

(1) Si para toda $w \in FV(c)$, $\sigma w = \sigma' w$, entonces

(a) $F^i \bot' \sigma = \bot = F^i \bot' \sigma'$

(b) $F^i \bot' \sigma \neq \bot \neq F^i \bot' \sigma'$ y para toda $w \in FV(c)$ vale $(F^i \bot' \sigma)\, w = (F^i \bot' \sigma')\, w$

(2) Si $F^i \bot' \sigma \neq \bot$, entonces para toda $w \notin FA(c)$ vale $(F^i \bot' \sigma)\, w = \sigma\, w$

Probamos esto por inducción en i. El caso $i = 0$ es trivial porque de (1b) y (2) no hay nada que probar.

Supongamos vale $i - 1$. Veamos para i.

(1a) $(F^i \bot' \sigma) = \bot$ implica $F(F^{i-1} \bot')\, \sigma = \bot$, en particular si $[\![b]\!]\sigma$ vale, por definición de F, luego

$$F(F^{i-1} \bot')\, \sigma = (F^{i-1} \bot')_{\bot\!\!\!\bot}([\![c']\!]\sigma) = \bot$$

Tenemos dos casos, veamos que en ambos deducimos $F^i \bot' \sigma' = \bot$

(1) Si $[\![c']\!]\sigma = \bot$, entonces $F^i \bot' \sigma' = (F^{i-1} \bot')_{\bot\!\!\!\bot}([\![c']\!]\sigma') = \bot$

(2) Si $[\![c']\!]\sigma \neq \bot$, entonces sea $\overline{\sigma} = [\![c']\!]\sigma$ y $\overline{\sigma'} = [\![c']\!]\sigma'$

Podemos aplicar la HI para c' para demostrar que el $\overline{\sigma}$ y $\overline{\sigma'}$ satisface la hipótesis para todo $w \in FV(c)$, $\overline{\sigma} w = \overline{\sigma'} w$ Luego podemos aplicar la HI para $i - 1$ para concluir

$$F^i \bot' \sigma' = (F^{i-1} \bot')_{\bot\!\!\!\bot} \overline{\sigma'} = \bot$$

Esta misma estrategia puede ser utilizada para probar el resto ((1b) y (2)):

- *Advertir que tendremos el caso $[\![c']\!]\sigma \neq \bot$*
- *Aplicar HI sobre i a los estados $\overline{\sigma}$ y $\overline{\sigma'}$. Para esto utilizar la HI sobre c'.*