Lenguajes y Compiladores. Práctico 3 del 27/03/2019

Objetivos: Comparar las nociones de predominio y de dominio; comprender los dominios de espacios de funciones y de productos. Distinguir y caracterizar funciones monótonas, estrictas y continuas. Establecer supremos de conjuntos, en particular de cadenas, en predominios; determinar si una función es continua o no y probarlo en caso que lo sea. Identificar puntos fijos para funciones continuas; aplicar el teorema del menor punto fijo.

Repaso. Se recomienda no utilizar más de 15 minutos en esto.

(1) Explicar conceptualmente el error cometido en cada una de las siguientes sustituciones. Sea $p = \exists \mathsf{r}.(0 \leq \mathsf{r} < \mathsf{y}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + \mathsf{r})$.
  (a) $p/(id \mid \mathsf{y}\colon 3 + \mathsf{r}) = (\exists \mathsf{r}.(0 \leq \mathsf{r} < 3 + \mathsf{r}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + \mathsf{r}))$
  (b) $p/(id \mid y\colon 3 + \mathsf{r}) = (\exists \mathsf{t}.(0 \leq \mathsf{t} < 3 + \mathsf{r}) \wedge (\mathsf{x} = 3 + \mathsf{r} * \mathsf{z} + \mathsf{t}))$
  (c) $p/(id \mid r\colon 3 + \mathsf{w}) = (\exists \mathsf{t}.(0 \leq 3 + \mathsf{w} < \mathsf{y}) \wedge (\mathsf{x} = \mathsf{y} * \mathsf{z} + 3 + \mathsf{w}))$

(2) Decida si las siguientes afirmacions son ciertas o no; justifique.
  (a) Para toda frase p y toda sustitución δ, se cumple $FV(p) \subseteq FV(p/\delta)$.
  (b) Para toda frase p y toda sustitución δ, se cumple

$$FV(p/\delta) \subseteq FV(p) \cup \bigcup_{v \in FV(p)} FV(\delta\, v)$$

(3) Dada una frase p, una sustitución δ y un estado σ, definir un estado σ' tal que $[\![p/\delta]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma'$.

(4) Dé un ejemplo concreto en su lenguaje de programación preferido que evidencie el teorema de renombre. Ayuda: piense en qué contexto hay variables ligadas.

Ejercicios.

(1) Decida si los siguientes órdenes parciales son predominios ó dominios.
  (a) $\langle\text{intexp}\rangle$, con el orden discreto (b) $\langle\text{intexp}\rangle \to \mathbb{B}_\perp$ (c) $\mathbb{B}_\perp \to \langle\text{intexp}\rangle$
  Si necesita defina la relación de orden para $A \to P$, cuando P es un orden parcial.

(2) Hacer diagramas que representen los siguientes dominios, si es posible.
  (a) $\mathbb{B}_\perp$ (b) $\mathbb{N}_\perp$ (c) $\mathbb{B} \to \mathbb{B}_\perp$ (d) $\mathbb{N}^\infty$ (e*) $\mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty$

(3) Indique el menor elemento para cada dominio de los ejercicios 1 y 2.

(4) Calcule, en caso de existir, el supremo de los siguientes conjuntos:
  (a) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$, en $\mathbb{N}_\perp$ (b) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$, en $\mathbb{N}^\infty$
  (c) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo}\}$, en $\mathbb{N}^\infty$ (d) $\mathcal{A} = \{V, F\}$, en $\mathbb{B}_\perp$
  (e) $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$, donde

$$f_n x = \begin{cases} 1 & \text{si } x|n \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  (f*) $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$, donde

$$f_n x = \begin{cases} x & \text{si } |x - 10| < log(n+1) \\ \perp & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(5) Para cada uno de los siguientes espacios de funciones, dar ejemplos de: *(a)* funciones monótonas y no continuas; *(b)* funciones continuas; y *(c)* funciones continuas y estrictas.
  (a) de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$ (b) de $\mathbb{N}_\perp$ en $\mathbb{N}_\perp$
  (c) de $\mathbb{N}^\infty$ en $\mathbb{N}_\perp$ (d) de $\mathbb{N}^\infty$ en $\mathbb{N}^\infty$

(6) En cada uno de los casos del ejercicio 5 caracterizar todas las funciones continuas.

(7) En cada uno de los casos del ejercicio 6 indicar cuáles son estrictas y cuáles no.

(8) Para cada una de las siguientes funciones caracterizar los puntos fijos; decidir si existe un menor punto fijo. Si no existe, explicar por qué.

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f\,n = n$$

$$h\colon \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty \qquad h\,n = n+1$$

$$g\colon \langle\text{intexp}\rangle \to \langle\text{intexp}\rangle \qquad g\,e = e$$

$$k\colon \mathbb{N}^\infty \to \mathbb{N}^\infty \qquad k\,n = \begin{cases} n+1 & \text{si } n < 8 \\ n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

(9) Considere las siguientes $F \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$,

$$F\ f\ = \begin{cases} f & \text{si } f \text{ es una función total} \\ \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ f(n-2) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Determine si F es continua.
(b) Calcule $F^{(i)} \perp_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\perp}$, para $i = 0, 1, 2$.

(10) Calcular la menor $f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ que satisface la siguiente ecuación

$$f\ n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n * f\ (n-1) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Notar que n corre sobre todo $\mathbb{Z}$. Asumir que la multiplicación y la suma son estrictas.

(11) Caracterizar las funciones que satisfacen la ecuación

$$f\ n = \begin{cases} f(n-1) & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ n * f\ (n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Comparar esta ecuación con la ecuación del ejercicio 10. ¿Tienen las mismas soluciones?