LENGUAJES Y COMPILADORES

Dominios. Consideremos la siguiente definición en Haskell:

```
g :: Int → Int
g n = if n == 0 then 0
      else if n == 1 then 1
           else g (n-2)
```

¿Qué función define? Si quisiera darle semántica a esta función, ¿cuál sería la f del metalenguaje que representaría el valor de g?

Intuitivamente, dicha f debería satisfacer una ecuación parecida a la que define a g en Haskell. Así $f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$ debería satisfacer la ecuación

$$f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \tag{1}$$

Dado que la función puede no terminar, agregamos $\perp$ a los posibles resultados (recordemos que en el metalenguaje las funciones son totales, la no terminación se representa por el resultado $\perp$).

Por nuestra familiaridad con las definiciones recursivas en lenguajes de programación, instantáneamente leemos la definición de g, o la ecuación de f, como si fuera una definición recursiva. Con esa intuición, enseguida concluimos que se trata de la función módulo 2 para los $n \geq 0$ y para los negativos no termina. Llamemos $mod2$ a dicha función:

$$mod2\ n = \begin{cases} n\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Pero en realidad, esa lectura que hicimos y que nos permitió concluir que f era en realidad una forma de definir $mod2$, es apresurada. Es la que nos indica nuestra intuición, que proviene de los lenguajes de programación donde estamos acostumbrados a la recursión y también a las funciones parciales.

Pero no deberíamos olvidarnos de que nuestro metalenguaje tiene solamente funciones totales y que, por lo tanto, no podemos concluir tan fácilmente que nuestra intuición -acostumbrada a un contexto de funciones parciales- nos dé trivialmente la solución correcta.

Veamos, por ejemplo, si $mod2$ satisface la ecuación (1) que se dió para definir f. Para ello, colocamos $mod2$ en lugar de f a ambos lados de la ecuación:

$$mod2\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ mod2\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

¿Se satisface esta ecuación?

Para analizarla, analicemos ambos miembros de la ecuación por separado:

$$\begin{array}{rcl} izq & = & mod2\ n \\ der & = & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ mod2\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \end{array}$$

Consideramos los cuatro casos posibles:

1. Cuando $n = 0$: $izq = mod2\ 0 = 0\,\%2 = 0$ y $der = 0$. Por lo tanto la ecuación vale en este caso.
2. Cuando $n = 1$: $izq = mod2\ 1 = 1\,\%2 = 1$ y $der = 1$. Por lo tanto la ecuación vale en este caso también.
3. Cuando $n > 1$: $izq = mod2\ n = n\,\%2$ y $der = mod2\ (n-2) = (n-2)\,\%2 = n\,\%2$. Vale en este caso también.
4. Por útliimo, cuando $n < 0$: $izq = mod2\ n = \perp$ y $der = mod2\ (n-2) = \perp$. Vale en este caso también, o sea siempre.

Por lo tanto, $mod2$ es solución de la ecuación (1). ¿Es $mod2$ la única solución de esa ecuación? No, por ejemplo la función modRara:

$$modRara\ n = \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ 17 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

también es solución. Para comprobarlo, vale exactamente la misma cuenta que hicimos antes (con $modRara$ en lugar de $mod2$), sólo cambia el caso correspondiente a $n < 0$: $izq = modRara\ n = 17$ y $der = modRara\ (n-2) = 17$. Listo.

Se puede comprobar que $modFea$ también es solución, donde $modFea$ se define así:

$$modFea\ n = \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ 11 & \text{si } n < 0 \text{ y } n \text{ par} \\ 23 & \text{si } n < 0 \text{ y } n \text{ impar} \end{cases}$$

En realidad $modFea$ plantea la forma más general de las soluciones de la ecuación (1), donde 11 y 23 pueden cambiarse por cualquier par de valores de $\mathbb{Z}_\perp$. Si ambos se cambian por el mismo número natural se obtienen soluciones de la forma de $modRara$, y si ambos se cambian por $\perp$, se obtiene $mod2$.

Volviendo a la ecuación (1), podemos concluir que ecuaciones de esta forma no necesariamente tienen una única solución. ¿Cómo hacemos para señalar a "la" solución que nos interesa (en este caso $mod2$)? Si sólo escribimos la ecuación, como hemos visto, no alcanza.

La que nos interesa es la que tiene $\perp$ en el lugar en que $modRara$ tiene 17.

Haremos lo siguiente: vamos a inventar un orden parcial entre los elementos de forma tal que $\perp$ sea menor que todos los demás. Y cada vez que escribamos una ecuación como (1), diremos que nos interesa la menor solución posible. Eso excluirá a $modRara$ y $modFea$, ya que son mayores que $mod2$, pues se obtienen de $mod2$ reemplazando $\perp$ por otras cosas. Tanto $modRara$ como $modFea$ son *demasiado informativas* dado que contienen información (el 17, el 11, el 23) que no surge de la ecuación (1). En ese sentido, $mod2$ es la que menor información contiene ya que no agrega información a la que hay en la ecuación. El símbolo $\perp$, utilizado para representar la no terminación, representa la ausencia completa de información. Esto se ajusta a la realidad: un programa que no termina no da ninguna información, ni siquiera da la información de que no termina.

Órdenes parciales. Un **orden parcial** es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Ejemplos: $\mathbb{N}$ con $\leq$, $\mathbb{Z}$ con $\leq$, $\mathbb{Q}$ con $\leq$, $\mathbb{R}$ con $\leq$, $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ son ejemplos de órdenes parciales (también se dice, de **conjuntos parcialmente ordenados**). Cualquier conjunto X con $=$ (la menor relación reflexiva) es un orden parcial. Se lo llama, el **orden discreto**.

Gráficamente, $\mathbb{Z}$ con $\leq$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ \vdots \end{array}$$

Gráficamente, $\mathbb{Z}$ con el orden discreto:

$$\ldots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$$

Funciones. Si Y con $\leq_Y$ es un orden parcial, el espacio de funciones de $X \to Y$ es un orden parcial con $\leq$ definido así:

$$f \leq g \text{ sii } \forall x \in X. f\ x \leq_Y g\ x$$

para $f, g \in X \to Y$. Demostrar que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Lifting. Si X es un orden parcial con $\leq_X$, $X_\perp$ (que se define como $X \cup \{\perp\}$) también es un orden parcial con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \text{ sii } x \leq_X y \vee x = \perp$$

para $x, y \in X_\perp$. Demostrar que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si X es el orden discreto, $X_\perp$ se llama **llano**. Si lifteamos $\mathbb{Z}$ con el orden discreto, obtenemos el siguiente orden llano:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ & & \ldots & \backslash & | & / & \ldots & & \\ & & & & \perp & & & & \end{array}$$

Infinito. Si X es un orden parcial con $\leq_X$, X^∞ (que se define como $X \cup \{\infty\}$) también es un orden parcial con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \text{ sii } x \leq_X y \vee y = \infty$$

Demostrar que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Supremo. Dado un subconjunto $Q \subseteq P$ donde P con $\leq$ es un orden parcial, el supremo de Q (se escribe $\sup(Q)$) es el elemento de P que satisface:

- $\sup(Q)$ es cota superior de Q, y
- $\sup(Q)$ es menor que cualquier otra cota superior de Q.

En símbolos se escribe así:

- $\forall q \in Q \;.\; q \leq \sup(Q)$, y
- $\forall p \in P \;.\; (\forall q \in Q \;.\; q \leq p) \Rightarrow \sup(Q) \leq p$.

El $\sup(Q)$ puede no existir (por ejemplo, en $\mathbb{N}$ con $\leq$, el supremo del conjunto de todos los números pares no existe). Pero en los casos en que el supremo existe, es único (demostrar). Cuando existe, decimos que Q tiene supremo (que puede no estar en Q, está en P).

Cadenas. En un orden parcial P con $\leq$, una **cadena** es una secuencia infinita $p_0 \leq p_1 \leq p2 \leq \ldots \leq p_n \leq \ldots$ de elementos de P. Si el conjunto $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n. \ldots\}$ es infinito, se dice que la cadena es **interesante**. Si dicho conjunto es finito, se dice que la cadena es **no interesante**. Claramente la cadena es no interesante sii a partir de cierto punto la secuencia no hace más que repetir indefinidamente un elemento.

Obviamente, una cadena no interesante siempre tiene supremo: es el elemento que se repite indefinidamente.

Ejemplos. En $\mathbb{N}$ con $\leq$, $0 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq \ldots \leq 20 \leq 22 \leq \ldots$ es una cadena interesante. No tiene supremo.

En $\mathbb{N}$ con $\leq$, $0 \leq 2 \leq 4 \leq 4 \leq \ldots \leq 4 \leq 4 \leq \ldots$ es una cadena no interesante. Su supremo es 4.

Un orden discreto sólo tiene cadenas no interesantes. Más aún, las cadenas son repeticiones indefinidas de un único elemento.

Un orden llano sólo tiene cadenas no interesantes. Hay dos formas de cadenas: las que consisten de repetir indefinidamente $\perp$, y las que consisten de repetir $\perp$ solamente una cantidad finita de veces (0 o más) y luego repiten otro elemento indefinidamente.

Si tomamos $\mathbb{N}$ con $\leq_{\mathbb{N}}$ el operador relacional usual de los naturales, y consideramos $\mathbb{N}^\infty$ con $\leq$ como se definió más arriba $0 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq \ldots \leq 20 \leq 22 \leq \ldots$ es una cadena interesante con supremo. El supremo es ∞. Dar un ejemplo de cadena no interesante que tenga como supremo a ∞.

Si X es finito, $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ no tiene cadenas interesantes. ¿cuántos elementos diferentes puede tener una cadena?. Si X es infinito, tiene cadenas interesantes. Todas ellas tienen supremo. ¿cuál?

Como vimos, $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ es un orden parcial, donde $\mathbb{N}_\perp$ es el orden llano. La secuencia $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots$ es una cadena interesante, donde f_i se define de la siguiente forma

$$f_i\ n = \begin{cases} n & \text{si } n < i \\ \perp & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Esta cadena tiene como supremo a la función identidad.

Predominios. Un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas tienen supremo. Como las cadenas no interesantes siempre tienen supremo, puede redefinirse así: "un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas interesantes tienen supremo".

Por esa misma razón, los órdenes discretos y llanos que vimos son predominios. En cambio $\mathbb{N}$ con $\leq$, $\mathbb{Z}$ con $\leq$, $\mathbb{Q}$ con $\leq$, R con $\leq$ no son predominios porque todos tienen cadenas interesantes que no tienen supremo (por ejemplo, la cadena de los naturales pares). $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ es un predominio.

Si Y es un predominio, $X \to Y$ también lo es. Comprobarlo.

Dominios. Un **dominio** es un predominio D con elemento mínimo (que se suele denotar $\perp$). Los órdenes llanos son dominios (se los llama dominios llanos). Los órdenes discretos en general no son dominios porque no tienen elemento mínimo, salvo que se trate de un conjunto de exactamente un elemento, en cuyo caso es un dominio trivial. Si P es un predominio $P_\perp$ es un dominio. $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ es un dominio, donde $\perp$ es el conjunto vacío. A $\mathbb{N}^\infty$, donde $\mathbb{N}$ viene con el orden usual $\leq$, se lo grafica así:

$$\begin{array}{c} \infty \\ \vdots \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

Claramente 0 es el $\perp$ del dominio.

Si D es un dominio, $X \to D$ también lo es. Comprobarlo.

Morfismos. Vimos 3 componentes en la definición de un dominio: el orden parcial, el supremo, el elemento mínimo. Cuando una función preserva alguna de estas componentes recibe un nombre especial:

Sean P y Q órdenes parciales con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **monótona** si f preserva orden, es decir, si para todo $x, y \in P$, $x \leq_P y \Rightarrow fx \leq_Q fy$.

Sean P y Q predominios con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente y $\sup_P$ y $\sup_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **continua** si f preserva supremos de cadenas, es decir, si $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \leq p_n \leq \ldots$ entonces el $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = f(\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$.

Se puede comprobar fácilmente que si f es continua, entonces f es monótona. Eso implica que preserva cadenas, es decir, si $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$ entonces $f\ p_0 \leq_Q f\ p_1 \leq_Q f\ p_2 \leq_Q f\ p_3 \leq_Q \ldots \leq_Q f\ p_n \leq_Q \ldots$.

Sean D y D' dominios con $\perp$ y $\perp'$ respectivamente. Sea $f \in D \to D'$. Se dice que f es **estricta** si f preserva elemento mínimo, es decir, si $f\ \perp = \perp'$.