LENGUAJES Y COMPILADORES

Repaso. La clase pasada consideramos la definición en Haskell

g :: Int → Int
g n = if n == 0 then 0
        else if n == 1 then 1
            else g (n-2)

Vimos que su significado es una función f que satisfaga

$$f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \tag{1}$$

Pero también vimos que no hay una única que lo satisfaga: $mod2$, $modRara$, $modFea$, etc. De todas ellas, la que intuitivamente quisiéramos asociar a g es $mod2$, definida por

$$mod2\ n = \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es decir, la menos definida de las funciones que satisfacen (1). Comenzamos a introducirnos en la teoría de dominios que hoy nos va a dar una herramienta, un teorema, para hallar sistemáticamente soluciones a ecuaciones como (1).

Introdujimos las nociones de orden parcial, orden discreto, orden llano, cadena (interesante y no interesante), predominio, dominio, espacio de funciones, lifting.

Mencionamos que si Q es un orden parcial, predominio o dominio, $P \to Q$ también lo es con el orden, supremo o mínimo definido punto a punto.

Morfismos. Vimos 3 componentes en la definición de un dominio: el orden parcial, el supremo, el elemento mínimo. Cuando una función preserva alguna de estas componentes recibe un nombre especial:

Monotonía. Sean P y Q órdenes parciales con $\leq_P$ y $\leq_Q$, y sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **monótona** si f preserva orden, es decir, si $x \leq_P y \Rightarrow f\ x \leq_Q\ f\ y$.
Ejemplos. Las funciones constantes son monótonas. La función identidad en cualquier conjunto ordenado es monótona.

Las funciones monótonas de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$ son

- las funciones constantes (hay 3 de ellas),
- las que mandan $\perp$ en $\perp$ (ojo al contar, que entre éstas 9 se encuentra también la función constante $\perp$).

En total son 11.

Proposición 1. Si f es monótona, f aplicada a los elementos de una cadena devuelve una cadena.

Demostración. Si $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$ es una cadena, entonces claramente $f\ p_0 \leq_Q f\ p_1 \leq_Q f\ p_2 \leq_Q f\ p_3 \leq_Q \ldots \leq_Q f\ p_n \leq_Q \ldots$ también.

Proposición 2. Si f es monótona, entonces f preserva el supremo de cadenas no interesantes.

Demostración. Si $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P p_n \leq_P p_n \leq_P \ldots$. donde p_n es el supremo, entonces aplicando f a cada uno de los elementos de la cadena $f\ p_0 \leq_Q f\ p_1 \leq_Q f\ p_2 \leq_Q f\ p_3 \leq_Q \ldots \leq_Q f\ p_n \leq_Q f\ p_n \leq_Q f\ p_n \leq_Q \ldots$ donde $f\ p_n$ es el supremo. O sea, f del supremo es el supremo.

Pero por más que sea monótona, f puede no preservar el supremo de cadenas interesantes, como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $f \in \mathbb{N}^\infty \to \{\top\}_\perp$ entre el dominio vertical y el dominio llano de 2 elementos:

$$\begin{array}{ccc}
\infty & & \\
\vdots & & \\
3 & & \\
2 & \xrightarrow{f} & \\
1 & & \top \\
0 & & \perp
\end{array}$$

sea f tal que manda todos los naturales a $\perp$ y manda ∞ a $\top$. Claramente es monótona. Pero no preserva el supremo de la cadena $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \ldots$ En efecto, el supremo de esa cadena es ∞, y f de dicho supremo es $\top$. Pero si aplico f a cada miembro de la cadena obtengo $\perp \leq \perp \leq \perp \leq \perp \leq \ldots$ cuyo supremo es $\perp \neq \top$. Por lo tanto el supremo no se preserva.

Entonces, una función monótona $f \in P \to Q$ entre predominios P y Q puede no preservar el supremo de las cadenas interesantes. Es decir, puede ocurrir que para alguna cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$, se dé la desigualdad $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \neq f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$. Pero podemos demostrar que para toda cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$. al menos se cumple $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$:

Proposición 3. Si la función $f \in P \to Q$ entre predominios es monótona entonces $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$.

Demostración. Sea f monótona y $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \ldots$ una cadena interesante (para las no interesantes ya vimos que el supremo se preserva). Para todo j, $p_j \leq_P \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$. Como f es monótona, para todo j, $f\ p_j \leq_Q f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$. Como eso vale para todo j, $f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$ es cota superior de $\{f\ p_0, f\ p_1, f\ p_2, \ldots\}$, que por proposición 1 es una cadena y por ser Q predominio su supremo existe. Como $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ es la menor tal cota, $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$.

En el ejemplo anterior, $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = \perp$ y $f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}) = \top$.

Como vimos en el último ejemplo, monotonía no alcanza para que se preserve el supremo de cadenas interesantes. A las funciones que preservan supremos se las llama continuas:

Continuidad. Sean P y Q predominios con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente y $\sup_P$ y $\sup_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **continua** si f preserva supremos de cadenas, es decir, si $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \ldots$ entonces el supremo $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$.

Observar que, a priori, no puedo asegurar que $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ exista ya que no es seguro que $f\ p_0, f\ p_1, \ldots, f\ p_n, \ldots$ sea una cadena. Lo sería si f fuera monótona.

Proposición 4. Si f es continua, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos $f \in P \to Q$ continua. Sea $x \leq_P y$. Entonces, $x \leq_P y \leq_P y \leq_P y \leq_P \ldots$ es una cadena (no interesante) cuyo supremo es y. Como f es continua, $\sup_Q(\{f\ x, f\ y, f\ y, f\ y, \ldots\})$ existe y es igual a $f\ (\sup_P(\{x, y, y, y, \ldots\})$. Pero el primer miembro de esa igualdad es $\sup_Q(\{f\ x, f\ y\})$ y el segundo es $f\ (\sup_P(\{x, y\})) = f\ y$. Por lo tanto, $\sup_Q(\{f\ x, f\ y\}) = f\ y$, o sea, $f\ x \leq_Q f\ y$.

La inversa no vale. Monotonía implica que $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe, también implica que la igualdad $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$ vale para las cadenas no interesantes, pero para las interesantes sólo implica la validez de la desigualdad $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ (sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$.

Corolario. Sean P y Q predominios con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente y $\sup_P$ y $\sup_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$ monótona. Entonces, f es continua sii para toda cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$ la desigualdad $f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})) \leq_Q \sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ también vale.

Ahora resulta fácil comprobar que las funciones constantes son continuas y que la identidad también lo es. ¿Cuáles son las funciones continuas de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$ (son todas las monótonas ya que no hay cadenas interesantes en $\mathbb{B}_\perp$).

Funciones estrictas. Sean D y D' dominios con $\perp$ y $\perp'$ respectivamente. Se dice que la función $f \in D \to D'$ es **estricta** si f preserva elemento mínimo, es decir, si $f\ \perp = \perp'$.

Las constantes no son estrictas (salvo la constante que siempre devuelve $\perp'$). La identidad es siempre estricta. ¿Cuáles son las funciones continuas estrictas de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$?

Teorema del Menor Punto Fijo

Teorema. Sea D un dominio, y $F \in D \to D$ continua. Entonces $\sup(F^i\ \perp)$ existe y es el menor punto fijo de F.

Demostración. Como $\perp$ es el elemento mínimo, $\perp \leq F\ \perp$. Como F es continua, F es monótona. Aplicando F a ambos lados obtenemos

$$F\ \perp \leq F\ (F\ \perp) = F^2\ \perp$$

Iterando esto obtenemos $\perp \leq F\ \perp \leq F^2\ \perp \leq F^3\ \perp \leq \ldots$, es decir que $\{F^i\ \perp | i \in \mathbb{N}\}$ es una cadena y por lo tanto el supremo $x = \sup(\{F^i\ \perp | i \in \mathbb{N}\})$ existe.

Veamos que es punto fijo de F, es decir, que $F\ x = x$:

$$\begin{array}{rcl} F\ x &=& F\ \sup(\{F^i\ \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ &=& \sup(\{F\ (F^i\ \perp) | i \in \mathbb{N}\}) \\ &=& \sup(\{F^{i+1}\ \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ &=& \sup(\{F^i\ \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ &=& x \end{array}$$

Veamos que es el menor de ellos. Sea y punto fijo de F, es decir $F\ y = y$. Veamos que $x \leq y$. Claramente $\perp \leq y$ por ser elemento mínimo. Como F es monótona, se obtiene $F\ \perp \leq F\ y = y$. Iterando, obtenemos $F^i\ \perp \leq y$ para todo i. Es decir, y es cota superior de la cadena $\{F^i\ \perp | i \in \mathbb{N}\}$. Como el supremo es la menor de esas cotas,

$$\begin{array}{rcl} x &=& \sup(\{F^i\ \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ &\leq& y \end{array}$$

Aplicando al problema original. Queríamos encontrar la menor solución a la ecuación (1). Definimos $F \in (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z} \to Z_\perp)$ por

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Así, $F\ f\ n$ es un nombre para la parte derecha de la ecuación (1), que ahora se puede reescribir

$$f\ n = F\ f\ n$$

O más brevemente, $f = F\ f$. Es decir que buscar una solución a la ecuación (1) es lo mismo que buscar un punto fijo de F. Y buscar la menor solución es lo mismo que buscar el menor punto fijo de F. Asumiendo que F es continua, la menor solución es $\sup(F^i\ \perp')$ donde $\perp'$ es el elemento mínimo de $\mathbb{Z} \to Z_\perp$, es decir, la función que devuelve siempre $\perp$, que escribimos también $n \mapsto \perp$.

Resta comprobar que F es continua, y que $\sup(F^i\ \perp')$ es $mod2$. Dejemos por el momento la prueva de continuidad de F, y calculemos $\sup(F^i\ \perp')$ asumiendo que lo es.

Por simplicidad en las cuentas conviene observar que F admite una definición un poco más compacta:

$$F\ f\ n = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Calculemos $F^i\ \perp'$.

Si $i = 0$, $F^i\ \perp' = F^0\ \perp' = \perp' = n \mapsto \perp$.

Si $i = 1$,

$$\begin{array}{rcl} F^i\ \perp' &=& F^1\ \perp' \\ &=& F\ \perp' \\ &=& n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \perp'\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\ &=& n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \end{array}$$

Si $i = 2$,

$$\begin{array}{rcl} F^i \perp' & = & F^2 \perp' \\ & = & F\ (F^1 \perp') \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ F^1 \perp' (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{array} \right. \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-2 & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \in \{0,1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \notin \{0,1\} \end{array} \right. \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-2 & \text{si } n \in \{2,3\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,2,3\} \end{array} \right. \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,2,3\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,2,3\} \end{array} \right. \end{array}$$

Se puede comprobar por inducción en i que

$$F^i \perp' \ = \ n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,\ldots,2*i-1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*i-1\} \end{array} \right. \tag{2}$$

En efecto, para $i = 0$ el conjunto $\{0, 1, \ldots, 2 * i - 1\}$ es vacío, por ello la fórmula (2) equivale en este caso a $\perp' = F^i \perp'$. Aprovechando que hemos calculado explícitamente $F^1 \perp'$ y $F^2 \perp'$, el lector puede comprobar que la fórmula general (2) coincide también en esos casos.

En general, asumiendo que $F^i \perp'$ satisface (2), lo demostramos para $i + 1$:

$$\begin{array}{rcl} F^{i+1} \perp' & = & F\ (F^i \perp') \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ F^i \perp' (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{array} \right. \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ (n-2)\,\%2 & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \in \{0,1,\ldots,2*i-1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \notin \{0,1,\ldots,2*i-1\} \end{array} \right. \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ (n-2)\,\%2 & \text{si } n \in \{2,3,\ldots,2*i+1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*i+1\} \end{array} \right. \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,\ldots,2*i+1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*i+1\} \end{array} \right. \\ & = & n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,\ldots,2*(i+1)-1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*(i+1)-1\} \end{array} \right. \end{array}$$

Intuitivamente, cuando i crece, el conjunto $\{0, 1, \ldots, 2^i + 1\}$ se aproxima a $\mathbb{N}$, y $F^i \perp'$ a $mod2$, cuya definición recordamos:

$$mod2 = n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} n\,\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{si } n < 0 \end{array} \right.$$

A continuación comprobaremos que $mod2$ es el supremo de la cadena $F^0 \perp' \leq' F^1 \perp' \leq' F^2 \perp' \leq' \ldots$ (que es una cadena se puede demostrar, aunque en realidad es consecuencia de que F es continua (y por ello monótona), prueba que aún no hemos hecho).

Primero demostramos que para todo $i \in \mathbb{N}$, $F^i\ \bot' \leq' mod2$. Para ello, demostramos que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $F^i\ \bot'\ n \leq mod2\ n$. Si $n \in \{0, 1, \ldots, 2 * i - 1\}$ vale la igualdad. En caso contrario, $F^i\ \bot'\ n = \bot \leq mod2\ n$.

Por lo tanto, $mod2$ es cota superior. Veamos que es supremo. Sea f tal que $\forall i \in \mathbb{N}$ $F^i\ \bot' \leq' f$. Veamos que $mod2 \leq' f$. Sea $n \in \mathbb{Z}$, si $n \geq 0$, sea $i = n/2 + 1$, tenemos $mod2\ n = n\,\%2 = F^i\ \bot'\ n \leq f\ n$. Si $n < 0$, $mod2\ n = \bot \leq f\ n$. Por lo tanto $mod2 \leq' f$.

Sólo resta demostrar que F es continua. Veamos primero que es monótona. Sea $f \leq' g$. Para comprobar que $F\ f \leq' F\ g$ sea $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \{0, 1\}$, $F\ f\ n = n = F\ g\ n$. Si $n \notin \{0, 1\}$, $F\ f\ n = f\ (n - 2) \leq g\ (n - 2) = F\ g\ n$.

Como F es monótona, para demostrar continuidad basta con demostrar que para toda cadena interesante $f_0 \leq' f_1 \leq' f_2 \leq' \ldots$ de funciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\bot$, se satisface $F\ (\sup'\{f_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq' \sup'\{F\ f_i | i \in \mathbb{N}\}$. Recordemos que por la definición de F,

$$\begin{aligned} F\ (\sup{}'\{f_i|i \in \mathbb{N}\}) &= n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \sup{}'\{f_i|i \in \mathbb{N}\}\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\ &= n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \sup\{f_i\ (n-2)|i \in \mathbb{N}\} & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \end{aligned}$$

y por otro lado, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$F\ f_i = n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ f_i\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Si $n \in \{0, 1\}$, $F\ (\sup'\{f_i|i \in \mathbb{N}\})\ n = n = \sup'\{F\ f_i\ n|i \in \mathbb{N}\}$. Si $n \notin \{0, 1\}$, $F\ (\sup'\{f_i|i \in \mathbb{N}\})\ n = \sup\{f_i\ (n-2)|i \in \mathbb{N}\} = \sup\{F\ f_i\ n|i \in \mathbb{N}\} = \sup'\{F\ f_i|i \in \mathbb{N}\}\ n$.

Hemos demostrado $F\ (\sup'\{f_i|i \in \mathbb{N}\}) = \sup'\{F\ f_i|i \in \mathbb{N}\}$, que obviamente implica $F\ (\sup'\{f_i|i \in \mathbb{N}\}) \leq' \sup'\{F\ f_i|i \in \mathbb{N}\}$. Uno puede preguntarse si valió la pena demostrar monotonía: por lo menos eso nos ahorró la demostración de la existencia de $\sup'\{F\ f_i|i \in \mathbb{N}\}$.