DOMINIOS Y TEOREMA DEL MENOR PUNTO FIJO

Consideramos la siguiente definición en Haskell:

```
g :: Int -> Int
g n = if n == 0 then 0
      else if n == 1 then 1
           else g (n-2)
```

¿qué función define? Si quisiera darle semántica a esta función, ¿cuál sería la f del metalenguaje que representaría el valor de g?

Intuitivamente, dicha f debería satisfacer una ecuación parecida a la que define a g en Haskell. Así $f \in Z \to Z \cup \{\perp\}$:

$$f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases}$$

Dado que la función puede no terminar, agregamos $\perp$ a los posibles resultados (recordemos que en el metalenguaje las funciones son totales, la no terminación se representa por el resultado $\perp$).

Por nuestro background, instantáneamente leemos la definición de f como si fuera una definición recursiva. Con esa intuición, enseguida concluimos que se trata de la función módulo 2 para los $n \geq 0$ y para los negativos "no termina". Llamemos mod2 a dicha función:

$$\text{mod2}\ n = \begin{cases} n \% 2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

Pero en realidad, esa lectura que hicimos y que nos permitió concluir que f era en realidad una forma de definir mod2, es apresurada. Es la que nos indica nuestra intuición, que proviene de los lenguajes de programación donde estamos acostumbrados a recursión y también a funciones parciales.

Pero no deberíamos olvidarnos de que nuestro metalenguaje tiene solamente funciones totales y que, por lo tanto, no podemos concluir tan fácilmente que nuestra intuición -acostumbrada a un contexto de funciones parciales- nos dé trivialmente la solución correcta.

Veamos, por ejemplo, si mod2 satisface la ecuación que se dió para definir f. Para ello, colocamos mod2 a ambos lados de la ecuación:

$$\text{mod2}\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ \text{mod2}\ (n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases}$$

¿Se satisface la ecuación?

Para analizarla, analicemos ambos miembros de la ecuación por separado:

izq = mod2 n

$$\text{der} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ \text{mod2}\ (n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases}$$

Cuando n = 0, izq = mod2 0 = 0 % 2 = 0 y der = 0. Por lo tanto la ecuación vale en este caso.

Cuando n = 1, izq = mod2 1 = 1 % 2 = 1 y der = 1. Por lo tanto la ecuación vale en este caso también.

Cuando n > 1, izq = mod2 n = n % 2 y der = mod2 (n-2) = (n-2) % 2 = n % 2. Vale en este caso también.

Cuando n < 0, izq = mod2 n = $\perp$ y der = mod2 (n-2) = $\perp$. Vale en este caso también, o sea siempre.

La solución mod2 no es la única solución. Por ejemplo la función modRara:

$$\begin{cases} n \% 2 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{modRara } n = \begin{cases} \\ 17 & \text{c.c.} \end{cases}$$

También es solución. Para comprobarlo, vale exactamente la misma cuenta que hicimos antes (con modRara en lugar de mod2), sólo habría que revisar el caso n < 0:

izq = modRara n = 17 y der = modRara (n-2) = 17. Listo.

Ejercicio: comprobar que modFea también es solución, donde modFea se define así:

$$\text{modFea } n = \begin{cases} n \% 2 & \text{si } n \geq 0 \\ 11 & \text{si } n < 0 \text{ par} \\ 23 & \text{si } n < 0 \text{ impar} \end{cases}$$

Volviendo a la ecuación que dió lugar a este análisis

$$(*) \qquad f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases}$$

podemos concluir que ecuaciones de esta forma no necesariamente tienen una única solución. ¿Cómo hacemos para señalar a "la" solución que nos interesa (en este caso mod2)? Si sólo escribimos la ecuación, como hemos visto, no alcanza.

La que nos interesa es la que tiene ⊥ en el lugar en que modRara tiene 17.

Haremos lo siguiente: vamos a inventar un orden parcial entre los elementos de forma tal que ⊥ sea < que todos los demás. Y cada vez que escribamos una ecuación como (*), diremos que nos interesa la menor solución posible. Eso excluirá a modRara y modFea, ya que son mayores que mod2, pues se obtienen de mod2 reemplazando ⊥ por otras cosas.

ORDEN PARCIAL

Un orden parcial es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Ejemplo: N con ≤, Z con ≤, Q con ≤, R con ≤, P(X) con ⊆ son ejemplos de órdenes parciales (también se dice, de conjuntos parcialmente ordenados). Cualquier conjunto X con = es un orden parcial. Se lo llama, el orden discreto.

Gráficamente, Z con ≤:

```
 :
 :
 3
 2
 1
 0
-1
-2
-3
 :
 :
```

Gráficamente, Z con =:

```
... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...
```

Funciones

Si Y con ≤ es un orden parcial, el espacio de funciones de X -> Y es un orden parcial con ≤' definido así:

$$f \leq' g \text{ sii } \forall x \in X.\ f\ x \leq g\ x$$

Ejercicio: demostrar que ≤' es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Lifting

Si X es un orden parcial con ≤, X_⊥ (que se define como X ∪ {⊥}) también es un orden parcial con ≤' definido así:

```
       x ≤' y sii x ≤ y ó x = ⊥
```

Ejercicio: demostrar que ≤' es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si X es el orden discreto, X se llama llano.
Si lifteamos Z con el orden discreto, obtenemos el siguiente orden llano:

```
       ... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...
                 \ | /
                  ⊥
```

Infinito

Si X es un orden parcial con ≤, X^∞ (que se define como X ∪ {∞}) también es un orden parcial con ≤' definido así:

```
       x ≤' y sii x ≤ y ó y = ∞
```

Ejercicio: demostrar que ≤' es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Supremo

Dado un subconjunto Q ⊆ P donde P con ≤ es un orden parcial, el supremo de Q (se escribe sup(Q)) es el elemento de P que satisface:

1) sup(Q) es cota superior de Q
2) sup(Q) es menor que cualquier otra cota superior de Q

En símbolos se escribe así:

1) ∀q∈Q. q ≤ sup(Q)
2) ∀s∈Q. (∀q∈Q. q ≤ s) ⇒ sup(Q) ≤ s

El sup(Q) puede no existir (por ejemplo, en N con ≤, el supremo del conjunto de todos los números pares no existe). Pero si existe es único (demostrar). Cuando existe, decimo que Q tiene supremo (que puede no estar en Q, está en P).

CADENA

En un orden parcial P con ≤, una cadena es una secuencia infinita p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ ... ≤ pn ≤ ... de elementos de P. Si el conjunto {p0, p1, p2, ..., pn ...} es infinito, se dice que la cadena es interesante. Si dicho conjunto es finito, se dice que la cadena es no interesante. Claramente la cadena es no interesante sii a partir de cierto punto la secuencia no hace más que repetir indefinidamente un elemento.

Obviamente, una cadena no interesante siempre tiene supremo: es el elemento que se repite indefinidamente.

Ejemplos:
  En N con ≤, 0 ≤ 2 ≤ 4 ≤ 6 ≤ ... ≤ 20 ≤ 22 ≤ ... es una cadena interesante. No tiene supremo.
  En N con ≤, 0 ≤ 2 ≤ 4 ≤ 4 ≤ ... ≤ 4 ≤ 4 ≤ ... es una cadena no interesante. Su supremo es 4.
  Un orden discreto sólo tiene cadenas no interesantes. Más aún, las cadenas son repeticiones indefinidas de un único elemento.
  Un orden llano sólo tiene cadenas no interesantes. Hay dos formas de cadenas: las que consisten de repetir indefinidamente ⊥, y las que consisten de repetir ⊥ una cantidad finita de veces (0 o más) y luego repiten otro elemento indefinidamente.
  Si tomamos N con ≤, y consideramos N^∞ con ≤' como se definió más arriba 0 ≤ 2 ≤ 4 ≤ 6 ≤ ... ≤ 20 ≤ 22 ≤ ... es una cadena interesante con supremo. El supremo es ∞. Dar un ejemplo de cadena no interesante que tenga como supremo a ∞.
  Si X es finito, P(X) con ⊆ no tiene cadenas interesantes. ¿cuántos elementos diferentes puede tener una cadena?. Si X es infinito, tiene cadenas interesantes. Todas ellas tienen supremo. ¿cuál?

Como vimos, N -> N_⊥ es un orden parcial, donde N_⊥ es el orden llano. La secuencia f0 ≤' f1 ≤' f2 ≤' ... ≤' fn ≤' ... es una cadena interesante, donde fi se define de la siguiente forma

$$\text{fi n} = \begin{cases} n & \text{si } n < i \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esta cadena tiene como supremo a la función identidad.

PREDOMINIO

Un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas tienen supremo. Como las cadenas no interesantes siempre tienen supremo, puede redefinirse así: "un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas interesantes tienen supremo".

Por esa misma razón, los órdenes discretos y llanos que vimos son predominios. En cambio N con ≤, Z con ≤, Q con ≤, R con ≤ no son predominios porque todos tienen cadenas interesantes que no tienen supremo (por ejemplo, la cadena de los naturales pares). P(X) con ⊆ es un predominio.

Si Y es un predominio, X -> Y también lo es. Comprobarlo.

DOMINIO

Un dominio es un predominio D con elemento mínimo (que se suele denotar ⊥). Los órdenes llanos son dominios (se los llama dominios llanos). Los órdenes discretos en general no son dominios porque no tienen elemento mínimo, salvo que se trate de un conjunto de exactamente un elemento, en cuyo caso es un dominio trivial. Si P es un predominio, P_⊥ es un dominio. P(X) con ⊆ es un dominio, donde ⊥ es el conjunto vacío. A N^∞, donde N viene con el orden usual ≤, se lo llama el dominio vertical, y se lo grafica así:

```
                ∞
                :
                :
                3
                2
                1
                0
```

Claramente 0 es el ⊥ del dominio.

Si D es un dominio, X -> D también lo es. Comprobarlo.