REPASO

MORFISMOS

La clase pasada consideramos la siguiente definición en Haskell:

```
g :: Int -> Int
g n = case n of
         0 -> 0
         1 -> 1
         _ -> g (n-2)
```

vimos que su semántica sería una función f ∈ Z -> Z ∪ {⊥} que satisfaga:

$$(*) \quad f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

Vimos también que hay infinitas soluciones: mod2, modRara, modFea, modParcial. De todas ellas, la que intuitivamente quisiéramos asociar a g es mod2, definida por

$$\text{mod2}\ n = \begin{cases} n \% 2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esta función, es la menos definida de todas las que satisfacen (*). Por ello, comenzamos a recorrer la teoría de dominios que, hoy veremos, nos permite solucionar ecuaciones como (*).

Nociones introducidas: orden parcial, orden discreto, orden llano. Cadena, cadena interesante, cadena no interesante. Predominio. Dominio. Espacio de funciones, lifting.

MORFISMOS

Vimos 3 componentes en la definición de un dominio: el orden parcial, el supremo, el elemento mínimo. Cuando una función preserva alguna de estas componentes recibe un nombre especial:

Monotonía

Sean P y Q órdenes parciales con ≤ y ≤' respectivamente. Sea f ∈ P -> Q. Se dice que f es monótona si f preserva orden, es decir, si x ≤ y ⇒ f x ≤' f y.

Ejemplo: las funciones constantes son monótonas
         la identidad es monótona
         las funciones monótonas de B_⊥ en B_⊥ son:
           a) las constantes (3)
           b) las que mandan ⊥ en ⊥ (ojo al contar que entre éstas 9 se encuentra también la función constante ⊥)
         total: 11

Prop 1: Si f es monótona, f aplicada a los elementos de una cadena devuelve una cadena.
Dem: Si p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ ..., entonces claramente f p0 ≤' f p1 ≤' f p2 ≤' f p3 ≤' ... ≤' f pn ≤' ... también.

Prop 2: Si f es monótona, f preserva el supremo de cadenas no interesantes.
Dem: Si p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ pn ≤ pn ≤ ... donde pn es el supremo, entonces claramente f p0 ≤' f p1 ≤' f p2 ≤' f p3 ≤' ... ≤' f pn ≤' f pn ≤' f pn ≤' ... con f pn es el supremo. O sea, f del supremo es el supremo.

Pero por más que sea monótona, f puede no preservar el supremo de cadenas interesantes, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Sea f entre el dominio vertical y el dominio llano de 2 elementos:

```
                ∞
                :
                :
                3
                2              T
                1              |
                0              ⊥
```

sea f tal que manda todos los naturales a ⊥ y manda ∞ a T. Claramente es monótona. Pero no preserva el supremo de la cadena 0 ≤ 1 ≤ 2 ≤ 3 ≤ 4 ≤ .... En efecto, el supremo de esa cadena es ∞, f de dicho supremo es T. Pero si aplico f a cada miembro de la cadena obtengo ⊥ ≤ ⊥ ≤ ⊥ ≤ ⊥ ≤ ⊥ ≤ ... cuyo supremo es ⊥ ≠ T. Por lo tanto el supremo no se preserva.

Es decir, una f monótona puede no preservar el supremo de las cadenas interesantes. Es decir, puede ocurrir que sup'(f pi) ≠ f(sup(pi)) para alguna cadena interesante p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ .... Pero en realidad, podemos demostrar que para toda cadena interesante p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ ... al menos se cumple sup'(f pi) ≤' f(sup(pi)):

Prop 3: Si f es monótona entonces sup'(f pi) ≤' f (sup(pi)).
Dem: Sea f monótona y p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ ... una cadena interesante (para las no interesantes ya vimos que el supremo se preserva). Para todo j, pj ≤ sup(pi). Como f es monótona, para todo j, f pj ≤' f(sup(pi)). Como eso vale para todo j, f(sup(pi)) es cota superior de {f p0, f p1, f p2, ...}. Como sup'(f pi) es la menor tal cota, sup'(f pi) ≤' f (sup(pi)).

En el ejemplo anterior, sup'(f pi) = ⊥ y f (sup(pi)) = T.

Como vimos en el último ejemplo, monotonía no alcanza para que se preserve el supremo de cadenas interesantes. A las funciones que preservan supremos se las llama continuas:

Sean P y Q predominios con ≤ y ≤' respectivamente y sup y sup' respectivamente. Sea f ∈ P -> Q. Se dice que f es continua si f preserva supremos de cadenas, es decir, si p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ ... entonces el sup'{f p0, f p1, ..., f pn} existe y sup'(f pi) = f (sup(pi)).

Observar que, a priori, no puedo asegurar que sup'{f p0, f p1, ..., f pn} exista, ya que no es seguro que {f p0, f p1, ..., f pn} sea una cadena. Lo sería si f fuera monótona. Pero se puede comprobar fácilmente que si f es continua, entonces f es monótona:

Prop 4: Si f es continua, entonces f es monótona.
Dem: Supongamos f ∈ P -> Q continua. Sea x ≤ y ∈ P. Entonces, x ≤ y ≤ y ≤ y ≤ ... es una cadena (no interesante) cuyo supremo es y. Como f es continua, sup'{f x, f y, f y, f y} existe y es igual a f (sup {x, y, y, y, ...}). Pero el primer miembro de esa igualdad es sup'{f x, f y} y el segundo es f (sup{x,y}) = f y. Por lo tanto, sup'{f x, f y} = f y, o sea, f x ≤' f y.

¿Y la inversa vale?
No. Como vimos en el último ejemplo, monotonía no implica continuidad.

Ejemplos de funciones continuas. Demostraremos algunos resultados que nos permitirán establecer fácilmente ejemplos de funciones continuas. En particular, las funciones constantes y la identidad son ejemplos de funciones continuas.

Corolario de Prop 2: Sean P y Q predominios con ≤ y ≤' respectivamente y sup y sup' respectivamente. Sea f ∈ P -> Q monótona. Entonces, f es continua sii para toda cadena interesante p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ ..., sup'(f pi) = f (sup(pi)).

Corolario de Prop 3: Sean P y Q predominios con ≤ y ≤' respectivamente y sup y sup' respectivamente. Sea f ∈ P -> Q monótona. Entonces, f es continua si para toda cadena interesante p0 ≤ p1 ≤ p2 ≤ p3 ≤ ... ≤ pn ≤ ..., f (sup(pi)) ≤' sup'(f pi).

Volviendo a los ejemplos, ahora resulta fácil comprobar que las funciones constantes son continuas y que la identidad también lo es. ¿Cuáles son las funciones continuas de B_⊥ en B_⊥? (son todas las monótonas ya que no hay cadenas interesantes).

Funciones estrictas

Sean D y D' dominios con ⊥ y ⊥' respectivamente. Sea f ∈ D -> D'. Se dice que f es estricta si f preserva elemento mínimo, es decir, si f ⊥ = ⊥'.

Las constantes no son estrictas (salvo la constante que siempre devuelve ⊥'). La identidad es siempre estricta. ¿Cuáles son las funciones continuas estrictas de B_⊥ en B_⊥? (son 9)

TEOREMA DEL MENOR PUNTO FIJO

Teorema: Sea D un dominio, y F ∈ D -> D continua. Entonces sup(F^i ⊥) existe y es el menor punto fijo de F.
Dem: Como ⊥ es el elemento mínimo, ⊥ ≤ F ⊥. Como F es continua, F es monótona. Aplicando F a ambos lados obtenemos
F ⊥ ≤ F (F ⊥) = F^2 ⊥. Iterando esto obtenemos ⊥ ≤ F ⊥ ≤ F^2 ⊥ ≤ F^3 ⊥ ≤ ..., es decir que F^i ⊥ es una cadena y por lo tanto el supremo sup(F^i ⊥) existe.

Veamos que es punto fijo de F, es decir, que F sup(F^i ⊥) = sup(F^i ⊥). Tenemos
F sup(F^i ⊥) = sup(F (F^i ⊥)) = sup(F^{i+1} ⊥) = sup(F^i ⊥), por lo tanto es punto fijo de F.

Veamos que es el menor de ellos. Sea x punto fijo de F, es decir F x = x. Veamos que sup(F^i ⊥) ≤ x. Claramente ⊥ ≤ x por ser elemento mínimo. Como F es monótona, F ⊥ ≤ F x = x. Iterando, obtenemos F^i ⊥ ≤ x para todo i. Es decir, x es cota superior de la cadea F^i ⊥. Como el supremo es la menor de esas cotas, sup(F^i ⊥) ≤ x.

VOLVIENDO AL PROBLEMA ORIGINAL

Queríamos encontrar la menor solución a la ecuación (*)

$$(*) \qquad f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

Definimos F ∈ (Z -> Z_⊥) -> (Z -> Z_⊥) por

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

Así, F f n es un nombre para la parte derecha de (*). La ecuación (*) se puede reescribir

f n = F f n

O más brevemente, f = F f. Es decir que buscar una solución a (*) es lo mismo que buscar un punto fijo de F. Y buscar la menor solución de (*) es lo mismo que buscar el menor punto fijo de F. Asumiendo que F es continua, la menor solución de (*) es sup'(F^i ⊥') donde ⊥' es el elemento mínimo de Z -> Z_⊥, es decir, la función que devuelve siempre ⊥.

Nos resta demostrar:
  que F es continua, y
  que sup'(F^i ⊥') es mod2

CÁLCULO DE sup'(F^i ⊥')

i = 0 => F^i ⊥' n = F^0 ⊥' = ⊥' n = ⊥

$$i = 1 \Rightarrow F^i\ \perp'\ n = F^1\ \perp'\ n = F\ \perp'\ n = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ \perp'\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\lceil\ n \qquad\qquad \text{si } n \in \{0, 1\}$$

$$i = 2 \Rightarrow F^i \perp' n = F^2 \perp' n = F\ (F \perp')\ n = \begin{cases} \\ (F \perp')\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ \\ F \perp'\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ n-2 & \text{si } n \notin \{0, 1\} \land n-2 \in \{0, 1\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

De la misma forma se obtiene

$$i = 3 \Rightarrow F^i \perp' n = F^3 \perp' n = F\ (F^2 \perp')\ n = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ \\ (F^2 \perp')\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ \\ F^2 \perp'\ (n-2) & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ (n-2) \,\%\, 2 & \text{si } n \notin \{0, 1\} \land n-2 \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

En general (se puede demostrar por inducción en i), se obtiene

$$F^i \perp' n = \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \in \{0, 1, ..., 2*i-1\} \\ \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

En el límite, tenemos

$$sup'(F^i \perp')\ n = sup(F^i \perp'\ n) = \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \geq 0 \\ \\ \perp & \text{c.c.} \end{cases}$$

Es decir sup'(F^i ⊥') n = mod2 n para todo n, es decir, sup'(F^i ⊥') = mod2 que es la solución que se deseaba.