Estructura de la materia a grandes rasgos:

Primera Parte: Lenguaje imperativo

Segunda Parte: Lenguaje aplicativo puro, y lenguaje aplicativo con referencias y asignación

Ejes de contenidos de la primer parte

¿Qué define una ecuación recursiva?

Consideramos la siguiente definición en Haskell:

```
g ::  Int -> Int
g n = if n == 0 then 0
       else if n == 1 then 1
            else g (n-2)
```

¿Cúal es el significado de este programa?

¿Qué objeto abstracto constituye el significado de este programa?

Una ecuación recursiva para una función entera

$$f\ n \ = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases} \qquad (ER)$$

¿la ecuación define una función?

¿define varias?

¿puede una ecuación no definir ninguna función?

Problemas de las definiciones recursivas

Surgen varias dificultades al pretender dar significado de manera genérica a las funciones definidas de esta manera.

El dominio semántico $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ es inadecuado, ya que al incluir la recursión se incorpora la posibilidad de que las ecuaciones "no digan nada" sobre el valor de la función en un entero particular.

En términos computacionales: la evaluación que efectúa haskell no termina.

Solucionamos este inconveniente incorporando un objeto al dominio de “resultados posibles” que denota la “no terminación”: $\perp$, denominado *bottom*.

Definimos: $\mathbf{Z}_\perp = \mathbf{Z} \cup \{\perp\}$.

Problemas de las definiciones recursivas

Además (y este es el problema principal) hay muchas funciones de $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_{\perp}$ que satisfacen la ecuación (ER).

Una solución:

$$mod2\ n \;=\; \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Otra solución:

$$modRara\ n \;=\; \begin{cases} n \,\%\, 2 & \text{si } n \geq 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

¿Cuál es entonces el significado de la ecuación?

¿Cómo hacemos para señalar "la" solución que nos interesa (en este caso mod2)?

La idea es la siguiente: vamos a inventar un orden parcial entre los elementos de forma tal que $\perp$ sea menor que todos los demás. Y cada vez que escribamos una ecuación como (ER), diremos que nos interesa la menor solución posible.

El sentido del orden es el siguiente. Evitamos las soluciones **demasiado informativas**, o sea las que proveen información que no surge de la ecuación (ER).

Esto se ajusta a la realidad: un programa que no termina no da ninguna información, ni siquiera da la información de que no termina.

Órdenes parciales, posets

Un **orden parcial** es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un **conjunto parcialmente ordenado** (poset) es un par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto y $\leq$ un orden parcial.

$(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ son ejemplos de posets

$(X, =)$ se llama **orden discreto**.

Por ejemplo

$(\mathbb{Z}, \leq)$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ \vdots \end{array}$$

$(\mathbb{Z}, =)$

$$\ldots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$$

Poset de Funciones

Si Y con $\leq_Y$ es poset, el espacio de funciones de

$$X \to Y$$

es un poset con $\leq$ definido así:

$$f \leq g \quad \text{sii} \quad \text{para todo } x \in X \text{ se tiene } f\ x \leq_Y g\ x$$

para $f, g \in X \to Y$.

Lifting

$(X, \leq_X)$ un poset

Entonces $X_\perp \;=\; X \cup \{\perp\}$ también es un poset con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \quad sii \;\; x \leq_X y \;\vee\; x = \perp$$

Si X es el orden discreto, $X_\perp$ se llama **llano.**

El lifting de $\mathbb{Z}$ (con el orden discreto) es el orden llano dado por el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\
 & & \ldots & \backslash & | & / & \ldots & & \\
 & & & & \perp & & & &
\end{array}$$

Infinito

$(X, \leq_X)$ un poset

entonces $X^\infty \;=\; X \cup \{\infty\}$ también es un poset con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \quad \text{sii} \quad x \leq_X y \quad \vee \quad y = \infty$$

Supremo

Dado $Q \subseteq P$, el supremo de Q (se escribe $\sup(Q)$) es el elemento de P que satisface:

- $\sup(Q)$ es cota superior de Q, y
- $\sup(Q)$ es menor que cualquier otra cota superior de Q.

El $\sup(Q)$ puede no existir (por ejemplo, en $\mathbb{N}$ con $\leq$, el supremo del conjunto de todos los números pares no existe).

Pero en los casos en que el supremo existe, es único. Cuando existe, decimos que Q tiene supremo (que puede no estar en Q, está en P).

Cadenas

En un orden parcial P con $\leq$, una **cadena** es una secuencia infinita $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n \leq \ldots$ de elementos de P.

Si el conjunto $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots\}$ es infinito, se dice que la cadena es **interesante**. Si dicho conjunto es finito, se dice que la cadena es **no interesante**.

Claramente la cadena es no interesante sii a partir de cierto punto la secuencia no hace más que repetir indefinidamente un elemento. Obviamente, una cadena no interesante siempre tiene supremo: es el elemento que se repite indefinidamente.

Predominios

Un predominio es un poset P tal que todas las cadenas tienen supremo. Como las cadenas no interesantes siempre tienen supremo, puede redefinirse así: "un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas interesantes tienen supremo".

Los órdenes discretos y llanos son predominios.

$\mathbb{Z}$ con $\leq$ no es predominio

$\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ es un predominio.

Predominio $X \rightarrow Y$

¿Cuándo $X \rightarrow Y$ es predominio?

Sea Y es predominio, y $f_0, f_1, f_2, ...$ una cadena en $X \rightarrow Y$. Entonces para cada $x \in X$, la cadena:

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...$$

tendrá supremo en Y.

Entonces definimos $f = sup(\{f_i\})$ de la siguiente manera:

$$f(x) = sup(\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...\})$$

Dominios

Un **dominio** es un predominio D con elemento mínimo (que se suele denotar $\perp$).

Los órdenes llanos son dominios (se los llama dominios llanos).
Los órdenes discretos en general no son dominios.
Si P es un predominio $P_\perp$ es un dominio.

¿Cuándo $X \to Y$ es dominio?

$X \to Y$ será dominio cuando Y lo sea. Además, el menor elemento será la función definida idénticamente $\perp_Y$:

$\perp_{X \to Y} \colon X \to Y \qquad\qquad \perp_{X \to Y}(x) = \perp_Y$

Funciones monótonas

Monotonía: Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ posets, y sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **monótona** si f preserva orden, es decir, si

$$x \leq_P y \Rightarrow f\ x \leq_Q\ f\ y$$

Proposición Si la función $f \in P \to Q$ entre predominios es monótona, entonces $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe, y

$$\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$$

La recíproca de la proposición no es cierta. ¿Contraejemplo?

Continuidad

Sean P y Q predominios con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente y $\sup_P$ y $\sup_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **continua** si f preserva supremos de cadenas, es decir, si

$$p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \ldots$$

entonces el supremo $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y

$$\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$$

Proposición Si f es continua, entonces f es monótona.

Corolario Sean P y Q predominios. Sea $f \in P \to Q$ monótona. Entonces, f es continua sii para toda cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$ vale:

$$f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})) \leq_Q \sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$$

Funciones estrictas Sean D y D' dominios con $\perp$ y $\perp'$ respectivamente. Se dice que la función $f \in D \to D'$ es **estricta** si f preserva elemento mínimo, es decir, si $f\ \perp = \perp'$.

Teorema del Menor Punto Fijo

Sea D un dominio, y $F \in D \to D$ continua. Entonces

$$\sup_D(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\})$$

existe y es el menor punto fijo de F.

Demostración del TMPF

Claramente $\perp \leq F \perp$. Como F es monótona obtenemos

$$F \perp \leq F\,(F \perp) = F^2 \perp$$

Iterando esto obtenemos $\perp \leq F \perp \leq F^2 \perp \leq F^3 \perp \leq \ldots$, es decir que $\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}$ es una cadena y por lo tanto el supremo $x = \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\})$ existe.
Veamos que es punto fijo de F, es decir, que $F\ x = x$:

$$\begin{aligned}
F\ x &= F\ \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\
&= \sup(\{F\ (F^i \perp) | i \in \mathbb{N}\}) \\
&= \sup(\{F^{i+1} \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\
&= \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\
&= x
\end{aligned}$$

Veamos que es el menor de ellos. Sea y punto fijo de F, es decir $F\ y = y$. Veamos que $x \leq y$.

Claramente $\perp \leq y$ por ser elemento mínimo.

Como F es monótona, se obtiene $F \perp \leq F\ y = y$.

Iterando, obtenemos $F^i \perp \leq y$ para todo i. Es decir, y es cota superior de la cadena $\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}$.

Como el supremo es la menor de esas cotas,

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ & \leq & y \end{array}$$

Fin de la demostración del TMPF.

Aplicación del TMPF al problema original

Queremos encontrar la menor solución a la ecuación

$$f\ n \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases} \qquad (ER)$$

Definiremos $F \in (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\perp}) \to (\mathbb{Z} \to Z_{\perp})$ de manera que:

f satisface (ER) si y sólo si f es punto fijo de F

Aplicación del TMPF al problema original

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Así, $F\ f\ n$ es un nombre para la parte derecha de la ecuación (ER), que ahora se puede reescribir

$$f\ n = F\ f\ n$$

O más brevemente,

$$f = F\ f$$

Es decir que buscar una solución a la ecuación (ER) es lo mismo que buscar un punto fijo de F. Y buscar la menor solución es lo mismo que buscar el menor punto fijo de F.

Asumiendo que F es continua, la menor solución es

$$\sup_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} (\{F^i \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} | i \geq 0\})$$

donde $\perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp}$ es el elemento mínimo de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$, es decir, la función que devuelve siempre $\perp$.

¿Cómo calcular el menor punto fijo en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$?

Dadas $f, g \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$, tenemos que

- $f \leq g$ sii f está menos definida que g, y donde están ambas definidas valen lo mismo.

  Decimos que f está menos definida que g si $f\ n = \perp$ cada vez que $g\ n = \perp$.

- $\mathbb{Z}_\perp$ es un orden llano, de manera que las únicas cadenas posibles son de la forma:

$$\perp \leq \perp \leq ... \leq \perp \leq k \leq k...$$

¿Cómo calcular el menor punto fijo en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$?

Conclusión:

Si f es la solución buscada (el menor punto fijo), entonces obtenemos el valor de $f\ n$ de la siguiente manera:

- Si la cadena

$$F^0 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n, \quad F^1 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n, \quad F^2 \perp_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_\perp} n \ldots$$

  adopta algún valor ditinto de $\perp$, ese será el valor de $f\ n$

- Si la cadena mencionada es siempre $\perp$, entonces $f\ n = \perp$