

Introducción a los algoritmos - 1º cuatrimestre 2010

Axiomas y Teoremas del Cálculo Proposicional

Docentes: Araceli Acosta, Laura Alonso i Alemany, Javier Blanco,
Renato Cherini, Mauricio Tellechea, Pedro Sánchez Terraf.

Axiomas

A1 Asociatividad equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro equivalencia:

$$P \equiv \text{True} \equiv P$$

A4 Definición de Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de False:

$$\text{False} \equiv \neg \text{True}$$

A6 Definición de discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad disyunción con equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A12 Regla dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A13 Definición de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A14 Definición de consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas Básicos

T1 Metateorema de True:

Si P está demostrado, $P \equiv \text{True}$

T2 Doble negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T3 Equivalencia y negación:

$$P \equiv \text{False} \equiv \neg P$$

T4 Elemento absorbente de la disyunción:

$$P \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

T5 Elemento neutro de la disyunción:

$$P \vee \text{False} \equiv P$$

T6 Teorema (*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

T7 Negación de una implicación:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

Niveles de Precedencia

Los que están más arriba tienen mayor precedencia —“pegan más”, se ponen entre paréntesis primero, se aplican primero.

$E(x := a), \cdot$	sustitución y evaluación
$\sqrt{}, (\cdot)^2$	raíces y potencias
$*, /$	producto y división
máx, mín	máximo y mínimo
$+, -$	suma y resta
$=, \leq, \geq$	conectivos aritméticos
\neg	negación
$\vee \wedge$	disyunción y conjunción
$\Rightarrow \Leftarrow$	implicación y consecuencia
$\equiv \neq$	equivalencia y discrepancia

Los operadores que están en un mismo nivel tienen exactamente la misma prioridad, así que deben ponerse siempre con paréntesis, a menos que asocien entre sí (\vee y \wedge , \neq y \equiv , máx y mín).

Teoremas No Tan Básicos

T8 *Caracterización de implicación:*

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

T9 *De Morgan para la disyunción:*

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

T10 *De Morgan para la conjunción:*

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

T11 *Distributividad de la disyunción con la conjunción:*

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

T12 *Asociatividad de la conjunción:*

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

T13 *Idempotencia de la conjunción:*

$$p \wedge p \equiv p$$

T14 *Neutro de la conjunción:*

$$p \wedge \text{True} \equiv p$$

Teoremas con Implicación

T15 *Modus ponens:*

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

T16 *Modus tollens:*

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

T17 *Currificación:*

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q \Rightarrow r)$$

T18 *Transitividad de \Rightarrow :*

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

T19 *Debilitamiento para \wedge :*

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

T20 *Debilitamiento para \vee :*

$$p \Rightarrow p \vee q$$